ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Методические материалы для предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2026 года

МАТЕМАТИКА

Москва, 2026

Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФГБНУ «ФИПИ».

Авторы–составители: И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, П. И. Самсонов.

Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике.

Методические материалы включают в себя описание экзаменационной работы 2026 г., научно-методические подходы к проверке и оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, примеры ответов участников экзамена с комментариями к оценке этих ответов, а также материалы для самостоятельной работы эксперта.

Авторы будут благодарны за предложения по совершенствованию пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Основной государственный экзамен (ОГЭ) является формой государственной итоговой аттестации. ОГЭ проводится с целью определения соответствия результатов освоения обучающимися основной образовательной программы (базового или углубленного уровня) основного общего образования требованиям Федерального государственного образовательного стандарта. Для проведения ОГЭ по математике используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплекты заданий, представленных в открытом банке заданий ФИПИ.

ОГЭ проводится в соответствии с Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 № 273-ФЗ и Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования, утверждённым приказом Минпросвещения России и Рособрнадзора от № 232/551 от 04.04.2023.

Содержание КИМ определяется Федеральным государственным образовательный стандартом основного общего образования (приказ Минобрнауки России от 31.05.2021 № 287) и Федеральной образовательной программой основного общего образования (приказ Минпросвещения России от 18.05.2023 под №370 с изменениями от 09.10.2024).

В КИМ обеспечена преемственность проверяемого содержания с Федеральным компонентом государственного стандарта основного общего образования по математике (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении Федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования») и Федеральной образовательной программой основного общего образования.

Настоящее пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию заданий с развернутым ответом, которые являются частью измерительных материалов КИМ для основного государственного экзамена по математике. Пособие состоит из четырех частей.

1. Первая часть содержит краткое описание КИМ ОГЭ по математике 2026 г., характеризуются общие подходы к применению критериев оценивания решений заданий с развёрнутым ответом, приводятся примеры оценивания решений и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

2. Во второй части в целях организации самостоятельной и групповой работы экспертов приводятся примеры решений, которые эксперты должны по результатам коллективного обсуждения оценить в соответствии с критериями оценивания выполнения заданий с развернутым ответом. Задания снабжены комментариями и ответами, помещенными в конце второй части.

3. В третьей части приведены примеры решений заданий с развёрнутым ответом, предназначенные для проведения индивидуальных зачетных работ по проверке подготовки экспертов.

4. Четвертая часть содержит материалы по оцениванию решений заданий с развернутым ответом для зачета или квалификационной работы экспертов.

Все задания второй части КИМ ОГЭ по математике оцениваются в баллах в соответствии с критериями проверки заданий. Максимальный балл за каждое задание равен 2. Таким образом, суммарный максимальный балл за часть 2 равен 12.

Тематическая принадлежность заданий осталась неизменной по сравнению с 2025 г. (табл.1).

Табл. 1

Задание	Тематическая принадлежность
20	Преобразование алгебраических выражений, решение уравнений, неравенств или систем уравнений
21	Текстовая задача
22	Построение и исследование графика функции
23	Геометрическая задача на вычисление
24	Геометрическая задача на доказательство
25	Геометрическая задача высокого уровня сложности

Часть 1. Характеристика экзаменационной работы и общие подходы к оцениванию заданий

Характеристика экзаменационной работы ОГЭ

Контрольные измерительные материалы (далее КИМ) разработаны с учетом положения, что результатом освоения основной образовательной программы основного общего образования должна стать математическая компетентность выпускников основной школы. Они должны овладеть математическими знаниями и видами деятельности, научиться применению полученных знаний в учебных и во внеучебных ситуациях, сформировать навыки математического мышления, использования математической терминологии, методов и приемов решения задач.

Работа состоит из двух частей, соответствующих проверке на базовом, повышенном и высоком уровнях.

При проверке базовой математической компетентности обучающиеся должны продемонстрировать владение основными алгоритмами, знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.), умение пользоваться математической записью, применять знания к решению математических задач, не сводящихся к прямому применению алгоритма, а также применять базовые математические знания в практических ситуациях.

Задания части 2 КИМ направлены на проверку владения материалом на повышенном уровне. Их назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, составляющую потенциальный контингент профильных классов.

Эти части содержат задания повышенного уровня сложности из различных разделов курса математики. Все задания требуют записи решений и ответа. Задания расположены по нарастанию трудности – от простых к сложным, предполагающим свободное владение материалом и высокий уровень математической культуры.

Все задания второй части носят комплексный характер. Они позволяют проверить способность к соединению знаний из различных тем школьного курса, владение широким набором приемов и способов рассуждений, а также умение грамотно записать решение.

Задания части 2 КИМ относятся к алгебре и геометрии. Задания 20 и 23 наиболее простые. Они направлены на проверку владения формально-оперативными навыками: преобразование выражения, решение уравнения, неравенства, системы и решение несложной задачу на вычисление геометрической величины.

Задания 21 и 24 более высокого уровня сложности.

И, наконец, задания 22 и 25 высокого уровня сложности, они требуют свободного владения материалом и высокого уровня математической культуры. Эти задачи рассчитаны на обучающихся, изучавших математику на углубленном уровне. При их выполнении участник экзамена должен продемонстрировать владение широким набором математических приемов, проявить элементарные умения исследовательского характера, которые помогут успешно продолжать образование в 10 – 11 классах углубленного или профильного изучения математики, информатики и естественнонаучных дисциплин.

Общие подходы к проверке и оцениванию решений заданий с развернутым ответом

Развернутое решение задания части 2 должно быть математически грамотным и полным. Из решения должен быть понятен ход рассуждений. Там, где это необходимо, участник экзамена может ограничиться краткими пояснениями без описания и ссылок на общеизвестные алгоритмы и факты. Лаконичное решение, содержащее основные шаги решения и не содержащее неверных утверждений и ошибочных выкладок, следует рассматривать как решение без недостатков. Краткое, полное, математически верное решение свидетельствует о высокой математической культуре участника экзамена и должно высоко оцениваться.

Если решение задания второй части удовлетворяет этим требованиям, то за него следует выставить 2 балла. При этом решение может содержать описки, не влияющие на ход решения и ответ. Также не снижаются баллы за нерациональное решение, или избыточные рассуждения.

Если эксперт делает общее заключение, что участник экзамена решил задачу, то решение заслуживает не менее одного балла. Два балла выставляются за полное, верное и обоснованное решение. Описки, неточности записи, отсутствие очевидных пояснений не оказывают влияния на оценивание. При наличии в верном решении непринципиальных ошибок в вычислениях, иных недостатков, не влияющих на основной ход решения, в соответствии с критериями оценивания выставляется один балл.

Если решение отсутствует (в частности, дан только ответ), состоит из фрагментарных записей, несвязных рассуждений или содержит существенную математическую ошибку, то за решение следует выставить 0 баллов. Эту же оценку – 0 баллов – следует выставить и в том случае, если ошибка в записях или даже описка привели к тому, что участник экзамена решал, по сути, другую задачу (задачу с измененным условием).

Участник экзамена может использовать без доказательств и обоснований, утверждения, факты, методы из любого действующего учебника. Если утверждение избыточно, но эквивалентно общеизвестному истинному высказыванию (например, утверждение о подобии треугольников по трём углам), то его использование в решении не является недостатком.

В решении задач, где требуется составление стандартной математической модели (например, задачи на движение или совместную работу), отсутствие комментариев к составлению верного уравнения и его решению в общепринятых, естественных обозначениях и ограничениях на переменные (явно следующих из условия задачи), отсутствие явного указания на единицы измерения (при условии верного составления и решения уравнения) не является основанием для снижения баллов.

Ключевая задача ОГЭ по математике – дать возможность участнику экзамена продемонстрировать уровень освоения требований ФГОС. Избыточные требования при проверке приводят к получению нулевых баллов как теми участниками, кто вовсе не приступал к выполнению задания, так и теми, кто математически верно его выполнил, но изложил в форме, отличной от ожидаемой конкретным экспертом. Это приводит к демотивации школьников и учителей, к снижению количества участников, приступивших к выполнению заданий второй части экзамена и, в целом, количества школьников, выбирающих профильный уровень изучения математики.

Должно быть выполнено единство требований к участникам ОГЭ по математике во всех регионах Российской Федерации, исключены ситуации принципиально разного подхода к оцениванию разными предметными комиссиями.

На основе накопленного опыта можно сформулировать несколько принципов работы экспертов и предметных комиссий.

1. Эксперт *не оценивает оформление задания* (расположение текста и выкладок, наличие или отсутствие тех или иных элементов записи и т. п.). Эксперт *оценивает только математическую корректность и полноту о решения*.

2. Следует различать функции ГИА и текущего контроля. Разумеется, грамотный учитель отрабатывает рациональные подходы к решению и оптимальные способы записи, требует от учеников дополнительных обоснований и проверок, которые уменьшают вероятность ошибки.

Однако на итоговом контроле, если решение отличается от методических образцов, но не содержит ошибок, оно должно быть оценено полным числом баллов.

Поэтому эксперт *не должен, опираясь на свой методический опыт, требовать конкретных подходов к записи решения, ожидать дословных формулировок утверждений или типовых алгоритмов решения задач,* поскольку это приводит к субъективному расширению критериев оценивания и противоречит цели экзамена.

Следует оценивать *грамотность и истинность утверждений и формулировок, данных в решении*. Не следует оценивать их соответствие формулировкам в определённом учебнике или методическом пособии.

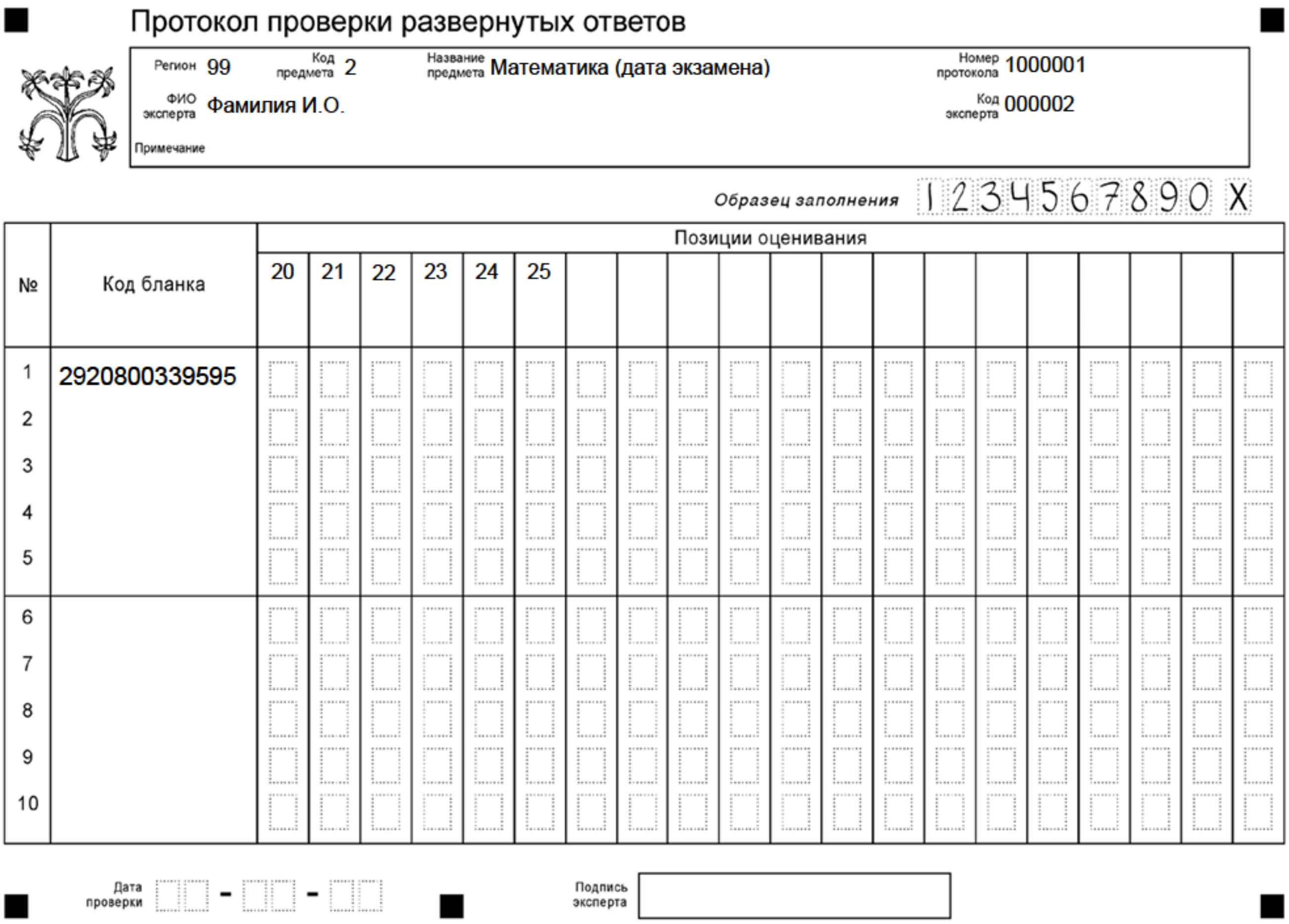
3. *Не следует оценивать продвижение участника экзамена в решении задачи. Оценивается только решение целиком*. Если оно содержит существенные математические ошибки, то в соответствии с критериями оценивания должна быть выставлена оценка 0 баллов.

4. Экзаменационные комиссии *не должны принимать дополнительные требования к оформлению или способу изложения решений заданий*. Такие требования недопустимы, поскольку расширяют или сужают общие критерии оценивания, при этом нарушается принцип единства требований.

Результаты проверки фиксируются в протоколе проверки развернутых ответов[1].

---

[1] Организационно-технологическая схема, используемая при проведении ОГЭ в субъектах Российской Федерации, может предполагать заполнение протокола проверки развернутых ответов в печатной или в электронной форме.



Протокол проверки развернутых ответов

Регион 99 | Код предмета 2 | Название предмета Математика (дата экзамена) | Номер протокола 1000001

ФИО эксперта Фамилия И.О. | Код эксперта 000002

Примечание

Образец заполнения 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 X

№	Код бланка	Позиции оценивания																				
		20	21	22	23	24	25															
1	2920800339595																					
2																						
3																						
4																						
5																						
6																						
7																						
8																						
9																						
10																						

Дата проверки - -

Подпись эксперта

Рис. 1. Вариант бланка протокола проверки развернутых ответов

К сожалению, случаи необоснованного снижения баллов за верные и корректные решения отталкивают школьников от математики и провоцирует в учительской среде подмену изучения математики натаскиванием на шаблоны решений. Необоснованные и непредсказуемые требования экспертов дезориентируют учащихся и учителей, смещая фокус с математики на «оформление» решений.

Главная задача эксперта – отличить математически верное и обоснованное решение от неверного и оценить представленное решение в соответствии с критериями оценивания.

Недопустимо как занижение оценки не в соответствии с критериями, так и завышение в том случае, когда решение содержит математические ошибки.

Часть 2. Примеры оценивания решений заданий 20 – 25 с краткими комментариями

Задание 20

Пример 1. Решите уравнение $x^2-6x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+7$.

№20 $x^2-6x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+7$

$x^2-6x=7$ и $6-x\geq 0$

$x^2-6x-7=0$

$D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot(-7)=64$

$\sqrt{D}=\sqrt{64}=8$

$x_1=\dfrac{-(-6)+8}{2\cdot 1}=\dfrac{14}{2}=7$ – не подходит

$x_2=\dfrac{-(-6)-8}{2\cdot 1}=-\dfrac{2}{2}=-1$

Ответ: -1.

Комментарий. Приведенное решение задачи, в соответствии с критериями проверки задания, соответствует 2 баллам. Оно полное и не содержит математических ошибок.

Считать, что участник экзамена, не решив линейное неравенство $6-x\geq 0$, не объяснил, почему число 7 не является корнем данного уравнения, нельзя.

Следует считать избыточным и требование, чтобы неравенство $6-x\geq 0$ было доведено до вида $x\leq 6$, или чтобы была непосредственная ссылка на неравенство. Такие требования не улучшают решение. В приведенном решении ясно видны все шаги, необходимые преобразования и логические переходы.

Пример 2. Решите уравнение $x^4 = (x-12)^2$.

Задача 20. $x^4=(x-12)^2$

$x^2=|x-12|$

$x^2=x-12$

$x^2-x+12=0$

$D=1-4\cdot\overset{48}{12}=-47$

корней нет

$x^2=-(x-12)$

$x^2=-x+12$

$x^2+x-12=0$

$x_1+x_2=-1$

$x_1\cdot x_2=-12$

$x_1=-4$

$x_2=3$

Ответ: $-4;\ 3$

Комментарий. Приведенное решение уравнения полное, верное и лаконичное. Оно не содержит ошибок, ход решения понятен.

Обратим внимание на то, что участник экзамена может решать квадратное уравнение любым доступным ему способом: выделять полный квадрат, использовать формулы корней, теорему Виета, искать один или оба корня подбором и т.п. При использовании теорем Виета проверка положительности дискриминанта избыточна.

Заметим, что запись «нет корней» для квадратного уравнения является корректной. Не нужно требовать от участников экзамена уточнения о существовании или отсутствии именно действительных корней.

Оценка 2 балла.

Пример 3. Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

№ 20

$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$

$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$

$(x-2)((x-2) - \sqrt{3}) \cdot 1) < 0$

$(x-2)(x+2-\sqrt{3}) < 0$

$x-2<0$ или $x+2-\sqrt{3}<0$

$x<2$ или $x<\sqrt{3}-2$

Ответ: $(\sqrt{3}-2;\ 2)$

Комментарий. Критерии обязывают выставить 0 баллов, поскольку решение квадратного неравенства ошибочное.

Пример 4. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

Задание № 20

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0,$

$(x^3 - x) - (3x^2 - 3) = 0,$

$x(x^2 - 1) - 3(x^2 - 1) = 0,$

$(x-3)(x^2-1) = 0,$

$x - 3 = 0$ или $x^2 - 1 = 0$

$x = 3$ $\qquad$ $x^2 = 1$

Ответ: 1; 3

Комментарий. Критерии обязывают выставить 0 баллов. Помимо неверного знака во второй строке перед второй скобкой, допущена ошибка при решении уравнения $x^2 = 1$.

Пример 5. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$.

№20

$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}-6=0$

$\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}^{\backslash x}-6^{\backslash x^2}=0$

$1-x-6x^2=0$, ОДЗ: $x^2\neq 0$
$x\neq 0$

$-6x^2-x+1=0 \;|\cdot(-1)$

$6x^2+x-1=0$

$D=b^2-4ac$

$D=1+4\cdot 6=1+24=25=5^2$

$x_1=\frac{-1+5}{2\cdot 6}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

$x_2=\frac{-1-5}{12}=\frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}=-0{,}5$

Ответ: $-0{,}5;\ \frac{1}{3}$

Комментарий. Критерии обязывают выставить 2 балла, поскольку в решении нет ни ошибок, ни неточностей.

Пример 6. Решите уравнение

$$\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4=0.$$

Комментарий. Оценка 2 балла.

Уравнения $\frac{1}{x}=a$ может быть решено различными способами. Возможно пользоваться тем, что x и a взаимно обратны или свойством пропорции. Приведенное решение математически корректное и полное.

№20

$\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x}-4=0$

Пусть $\frac{1}{x}=t$, тогда

$t^2-3t-4=0$

$D=(-3)^2-4\cdot(-4)=25$

$t_1=\frac{3+5}{2}=4;\ t_2=\frac{3-5}{2}=-1$

$4=\frac{1}{x}$ $\quad$ $-1=\frac{1}{x}$

$x=\frac{1}{4}$ $\quad$ $x=-\frac{1}{1}$

$x=0{,}25$ $\quad$ $x=-1$

Ответ: $0{,}25;-1$

Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

Решение. Преобразуем исходное неравенство:

$$(x-2)\left(x-2-\sqrt{3}\right) < 0,$$

откуда $2 < x < 2+\sqrt{3}$.

Ответ: $(2; 2+\sqrt{3})$.

Критерии оценивания выполнения задания 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущены вычислительные ошибки, с их учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 20

Пример 7. Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

Ответ: $(2; 2+\sqrt{3})$.

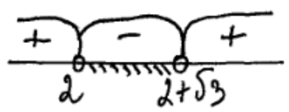
Задание 20

$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$

$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2) < 0$

$(x-2)(x-2-\sqrt{3}) < 0$

$x = 2$; $x = 2+\sqrt{3}$



Ответ: $(2; 2+\sqrt{3})$

Комментарий. Все этапы решения присутствуют, ответ найден верно.

Оценка 2 балла.

Пример 8. Решите неравенство $-\frac{16}{(x+2)^2-5} \geq 0$.

Ответ: $\left(-2-\sqrt{5};\ -2+\sqrt{5}\right)$

№20

$\frac{-16}{(x+2)^2-5} \geq 0$

$\frac{-16}{x^2+4x-1} \geq 0$

$x^2+4x-1<0$

$(x+2)^2-5=0$

$x^2+4x+4-5=0$

$x^2+4x-1=0$

$D=16+4=20$

$x_1=\frac{-4+2\sqrt{5}}{2}=-\sqrt{5}$

$x_2=\frac{-4-2\sqrt{5}}{2}=-3\sqrt{5}$

ОДЗ:

$x \neq -\sqrt{5}$

$x \neq -3\sqrt{5}$

Ответ. $(-3\sqrt{5}; -\sqrt{5})$

$(-3\sqrt{5}; -\sqrt{5})$

Комментарий: Алгоритм решения неравенства верный. Допущена грубая ошибка в преобразовании иррациональных выражений.

Оценка: 0 баллов.

Пример 9. Решите неравенство $(x-2)^2<\sqrt{3}(x-2)$.

Ответ: $(2; 2+\sqrt{3})$.

№ 20

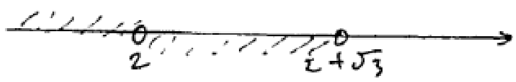
$(x-2)^2<\sqrt{3}(x-2)$

$(x-2)^2-\sqrt{3}(x-2)<0$

$x-2(x-2-\sqrt{3})<0$

$x-2<0 \qquad x-2-\sqrt{3}<0$

$x<2 \qquad x<2+\sqrt{3}$



Ответ: $x \in (2; 2+\sqrt{3})$

Комментарий. Допущена ошибка в разложении выражения на множители, имеется логическая ошибка в решении неравенства.

Оценка 0 баллов.

Задание 21

Пример 1. Баржа прошла против течения реки 24 км и, повернув обратно, прошла ещё 32 км, затратив на весь путь 4 часа. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

№21.

Пусть x км/ч - собственная скорость баржи, тогда $(x+5)$ км/ч - скорость баржи по течению и $(x-5)$ км/ч - скорость баржи против течение. $x \geq 0$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{24^{\backslash x+5}}{x-5} + \frac{32^{\backslash x-5}}{x+5} = 4$$

$$\frac{24x+120+32x-160}{(x-5)(x+5)} = 4$$

$$\frac{56x-40}{x^2-25} = \frac{4}{1}$$

$$4(x^2-25) = 56x-40$$

$$4x^2-100-56x+40=0$$

$$4x^2-56x-60=0 \quad |:4$$

$$x^2-14x-15=0$$

$$a=1;\ b=-14;\ c=-15$$

$$D=b^2-4\cdot a\cdot c=(-14)^2-4\cdot 1\cdot(-15)=196+60=256$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{256}=16$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{14+16}{2\cdot 1}=\frac{30}{2}=15 \text{ км/ч}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{14-16}{2\cdot 1}=\frac{-2}{2}=-1 \text{ км/ч}$$ (не подходит, так как скорость не может быть отрицательной и $x \geq 0$)

Ответ: 15 км/ч.

Комментарий. Решение полное и верное. В соответствии с критериями оно оценивается 2 баллами.

Отсутствие явных ограничений на знаменатель дроби не является ошибкой в данной задачи, так как множители в знаменателе - это скорости, и по смыслу задачи скорость баржи не может быть равна скорости течения реки. Поэтому, в данном случае переход от дробно-рационального уравнения к квадратному корректный, учитывающий естественные ограничения. Дополнительных пояснений к составленному уравнению не требуется.

Пример 2. Автомобиль двигался с постоянной скоростью из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми 720 км. Другой автомобиль двигался с постоянной скоростью, которая была на 30 км/ч больше, чем скорость первого автомобиля, и приехал в Б на 4 часа раньше первого автомобиля. Найдите скорость второго автомобиля.

21.

$x>0$ *	S(км)	V(км/г)	t(г)
I	720	$x+30$	$\frac{720}{x+30}$
II	720	x	$\frac{720}{x}$ — на 4 ч б.

Пусть x (км/г) - скорость II автомобиля, тогда $x+30$ (км/г) - скорость I автомобиля. Составим и решим уравнение.

$$\frac{720}{x}-\frac{720}{x+30}=4 \quad |:4$$

$$\frac{180}{x}-\frac{180}{x+30}=1 \quad |\cdot x(x+30)$$

$$180(x+30)-180\cdot x=1\cdot x(x+30)$$

См. доп. бланк № 2.

$$\cancel{180x}+180\cdot 30-\cancel{180x}=x^2+30x$$

$a=1$, $b=30$, $c=5400$

$$x^2+30x-5400=0$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=30^2-4\cdot1\cdot(-5400)=900+21600=22500=150^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x=\frac{-30+150}{2\cdot 1}=\frac{120}{2}=60 \qquad x=\frac{-30-150}{2\cdot1}=\frac{-180}{2}=-90 \text{ - не удовл.} *$$

$x=60$ (км/г) - скорость II автомобиля.

$60+30=90$ (км/г) - скорость I автомобиля.

Ответ: 90 км/г.

Комментарий. Приведенное решение понятное, верное и завершенное. Решая квадратное уравнение, участник экзамена на полях допускает описку $c=5400$. Однако в следующей строке используется число –5400. Отсутствует явное указание на условие $x(x+30)\neq 0$, но в данном случае это следует из естественных ограничений.

В соответствии с критериями оценка соответствует 2 баллам.

Пример 3. Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

№21	S	v	t
по теч.	210	$x+3$	$\frac{210}{x+3}$
против теч.	210	$x-3$	$\frac{210}{x-3}$

$$\frac{210}{x+3} - \frac{210}{x-3} = 4 \qquad x+3\neq 0 \quad x-3\neq 0 \quad x\neq -3 \quad x\neq 3$$

$$210x - 630 - 210x + 630 = 4x^2 - 36$$

$$\cancel{210x} \quad 4x^2 = 36$$

$$x^2 = 9$$

$x = 3$ неверно

решений нет

***Комментарий*.** В приведённом решении неверно составлена математическая модель к задаче. Критерии диктуют оценку 0 баллов.

Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Решение. Пусть скорость моторной лодки в неподвижной воде равна v км/ч. Получаем уравнение:

$$\frac{210}{v-3}-\frac{210}{v+3}=4;$$

$$210v+630-210v+630=4v^2-36;$$

$$v^2=324,$$

откуда $v=18$.

Ответ: 18 км/ч.

Критерии оценивания выполнения задания 21

Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 21

Пример 4. Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21. Обозначим скорость лодки в неподвижной воде за x.

	км/ч	км	время
по теч.	$x+3$	210	$\frac{210}{x+3}$
пр. теч.	$x-3$	210	$\frac{210}{x-3}$

$$\frac{210}{x-3}^{\backslash x+3} - \frac{210}{x+3}^{\backslash x-3} = 4^{\,(x+3)(x-3)}$$

$210x+630-210x+630=4x^2-12x+12x-36$

$1260=4x^2-36$

$-4x^2+1296=0$

$4x^2=1296$

$x^2=324$

$x_1=18$ Ответ: 18

$x_2=-18$ не подходит по смыслу

Комментарий. Задача решена верно.

Оценка 2 балла.

Пример 5. Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№2 1 $x_{км/ч}$ – собственная скорость лодки

	$S_{км}$	$v_{км/ч}$	$t_ч$
против течения реки	210	$x+3$	$\frac{210}{x+3}$
по течению реки	210	$x-3$	$\frac{210}{x-3}$

так как на обратный путь лодка затратила на 4 часа меньше, чем на путь против течения, составим уравнение и решим его.

$\frac{210}{x-3} - \frac{210}{x+3} = 4$

Общий знаменатель ; $(x-3)(x+3)$

ОДЗ: $(x-3)(x+3) \neq 0$

$x \neq \pm 3$ $x > 0$ так как скорость не может быть отрицательной и, в данной ситуации, равной нулю.

$\frac{210}{x-3}^{\backslash x+3} - \frac{210}{x+3}^{\backslash x-3} = 4^{\backslash (x-3)(x+3)}$

$210x + 630 - 210x + 630 = 4x^2 + 12x - 12x - 36$

$4x^2 = 1260 - 36$

$4x^2 = 1224$

$x^2 = 306$

$x = \pm\sqrt{306}$

$x = -\sqrt{306}$ посторонний корень

$x = \sqrt{306} = \sqrt{9 \cdot 34} = 3\sqrt{34}$

Ответ: $3\sqrt{34}$ км/ч

Комментарий. Верно составлено уравнение. Допущена ошибка в преобразованиях.

Оценка 1 балл.

Пример 6. Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№21 $\quad S \quad v \quad t$

по теч. $\quad 210 \quad x+3 \quad \frac{210}{x+3}$

против теч. $\quad 210 \quad x-3 \quad \frac{210}{x-3}$

$$\frac{210}{x+3} - \frac{210}{x-3} = 4 \qquad x+3 \neq 0 \quad x-3 \neq 0 \quad x \neq -3 \quad x \neq 3$$

$$210x - 630 - 210x + 630 = 4x^2 - 36$$

$$\cancel{210x} \quad 4x^2 = 36$$

$$x^2 = 9$$

$$x = 3$$ неверно

решений нет

Комментарий. Неверно составлено уравнение к задаче.

Оценка 0 баллов.

Задание 22

Пример 1. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+4x+7, & \text{при } x\ge -4,\\ -\dfrac{16}{x}, & \text{при } x<-4. \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y=m$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции?

№22.

$$y=\begin{cases} x^2+4x+7 & \text{при } x\geqslant -4\\ -\frac{16}{x} & \text{при } x<-4 \end{cases}$$

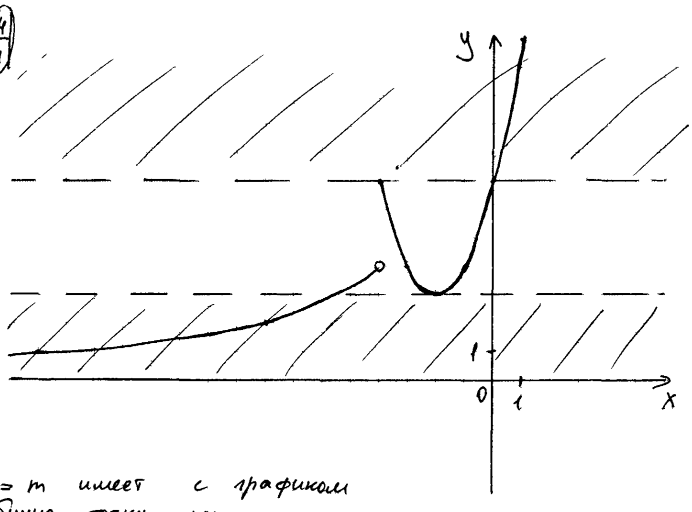
1. Если $x\geqslant -4$, то $y=x^2+4x+7$, ветви вверх.

$x_в=\frac{-4}{2}=-2$, $y_в=4-8+7=3$

x	-4	-3	-2	-1	0
y	7	4	3	4	7

2. Если $x<-4$, то $y=-\frac{16}{x}$

x	-16	-8	-4
y	1	2	4



Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при

$m\in(0;3)\cup(7;+\infty)$

Ответ: $m\in(0;3)\cup(7;+\infty)$.

Комментарий. В решении нет ошибок, обе части графика построены верно, продемонстрировано понимание алгоритмов построения гиперболы и параболы, показаны области, где расположены нужные прямые, границы промежутков, в которых находятся значения параметра, считываются однозначно из таблиц. Критерии диктуют оценку 2 балла.

Обратим внимание, что указание вида линии избыточно, это не требуется условием.

Постройте график функции

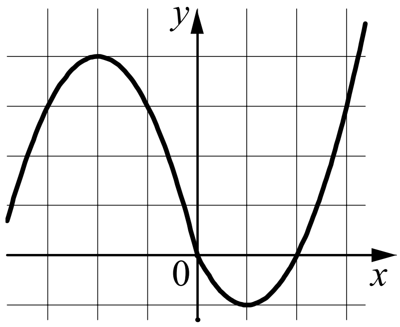
$$y = |x| \cdot (x+1) - 3x.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение. Построим график функции $y = -x^2 - 4x$ при $x < 0$ и график функции $y = x^2 - 2x$ при $x \geq 0$.

Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки, если она проходит через вершину одной из парабол. Получаем, что $m = -1$ или $m = 4$.

Ответ: $m = -1$; $m = 4$.



Критерии оценивания выполнения задания 22

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 22

Пример 2. Постройте график функции
$$y=|x|\cdot(x+1)-3x.$$
Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $m=-1$; $m=4$.

22. $y=|x|\cdot(x+1)-3x$

1) $y=x(x+1)-3x$

$y=x^2+x-3x$

$y=x^2-2x$ – Квадратичная функция. График - парабола, ветви вверх.

$x_0=\frac{2}{2}=1$

$y_0=1-2=-1$

$(1;-1)$ – вершина

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

2) $y=-x(x+1)-3x$

$y=-x^2-x-3x$

$y=-x^2-4x$ – Квадратичная фукция. График-парабола, ветви вниз.

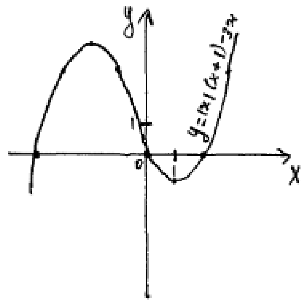
Смотреть на лист 1 →

$x_0 = \frac{4}{-2} = -2$

$y_0 = -4 + 8 = 4$

$(-2; 4)$ – вершина

x	-4	-3	-2	-1	0
y	0	3	4	3	0



$y = m$ – семейство прямых параллельных оси OX

при $m \in (-\infty; -1)$ – 1 точка пересечение

$m = -1$ – 2 точки пересечения

$m \in (-1; 4)$ – 3 точки пересечения

$m = 4$ – 2 точки пересечения

$m \in (4; +\infty)$ – 1 точка пересечения

Ответ: -1; 4.

Комментарий. Решение полное и верное.

Оценка 2 балла.

Пример 3. Постройте график функции

$$y = |x| \cdot (x+1) - 3x.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $m = -1$; $m = 4$.

№22 $y = |x| \cdot (x+1) - 3x$

$$y = \begin{cases} x \cdot (x+1) - 3x \\ -x \cdot (x+1) - 3x \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + x - 3x \\ -x^2 - x - 3x \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x \\ -x^2 - 4x \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 2x$ — квадратичная функция, график порабола, ветви вверх, вершина $(\text{в};n)$

$$\text{в} = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$$

$$n = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$$

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

$y(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$

$y(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$

2) $y = -x^2 - 4x$ — квадратичная функция, график порабола, ветви вниз, вершина $(\text{в};n)$;

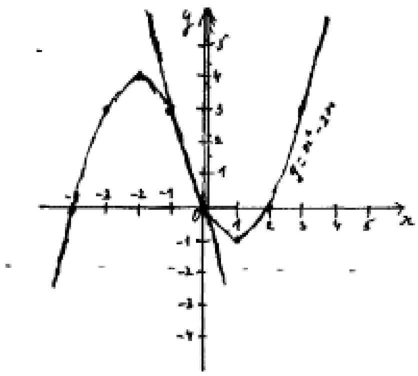
$$\text{в} = \frac{-(-4)}{2 \cdot (-1)} = \frac{4}{-2} = -2$$

$$n = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) = -4 + 8 = 4$$

x	-4	-3	-2	-1	0
y	0	3	4	3	0

$y(-1) = -(-1)^2 - 4 \cdot (-1) = -1 + 4 = 3$

$y(0) = -0^2 - 4 \cdot 0 = 0$



y = m – линейная функция; график прямая; график проходит || Oy
Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

Комментарий. График построен верно, но значения *m* не найдены.

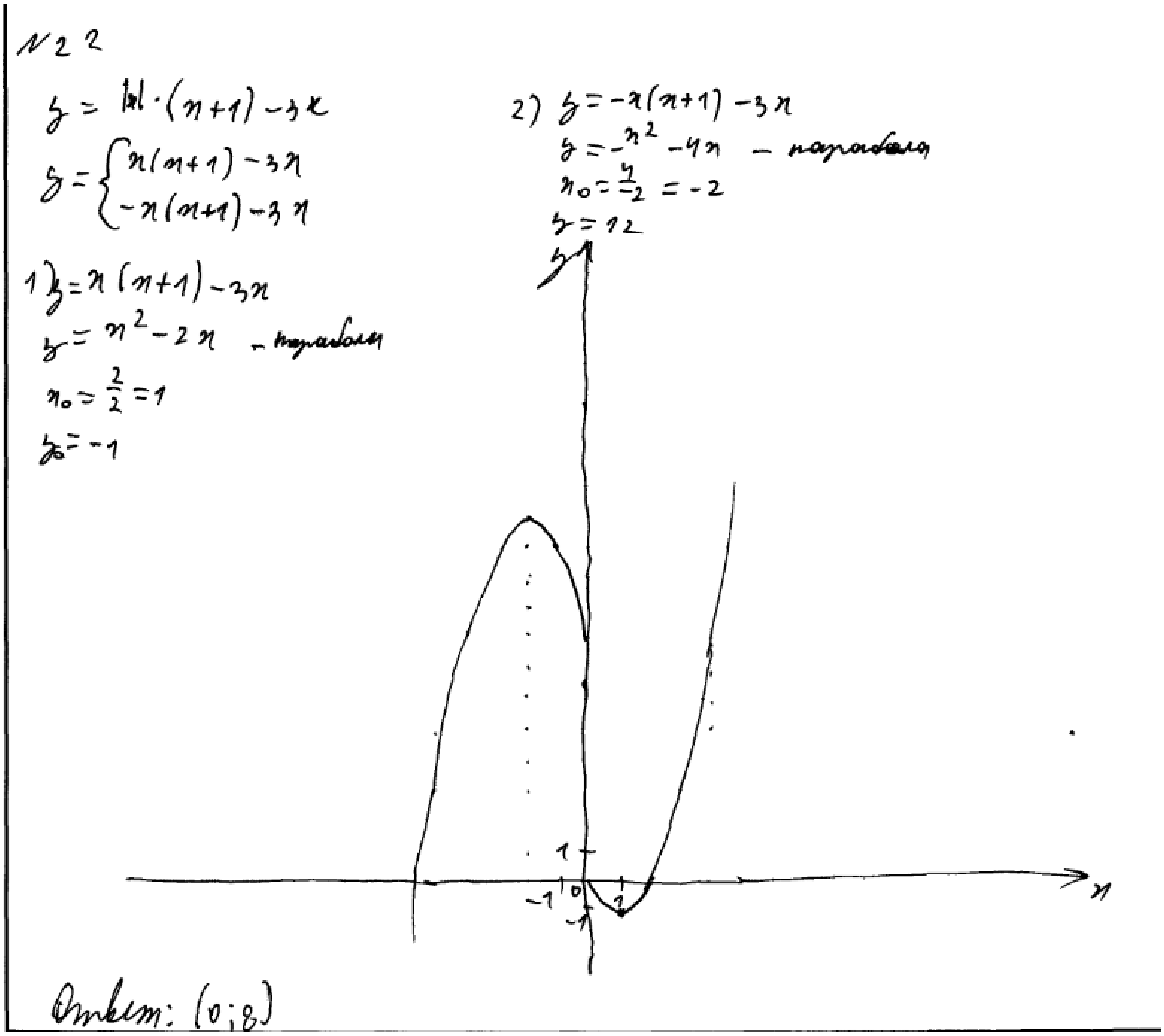
Оценка 1 балл.

Пример 4. Постройте график функции

$$y = |x| \cdot (x+1) - 3x.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Ответ: $m = -1$; $m = 4$.

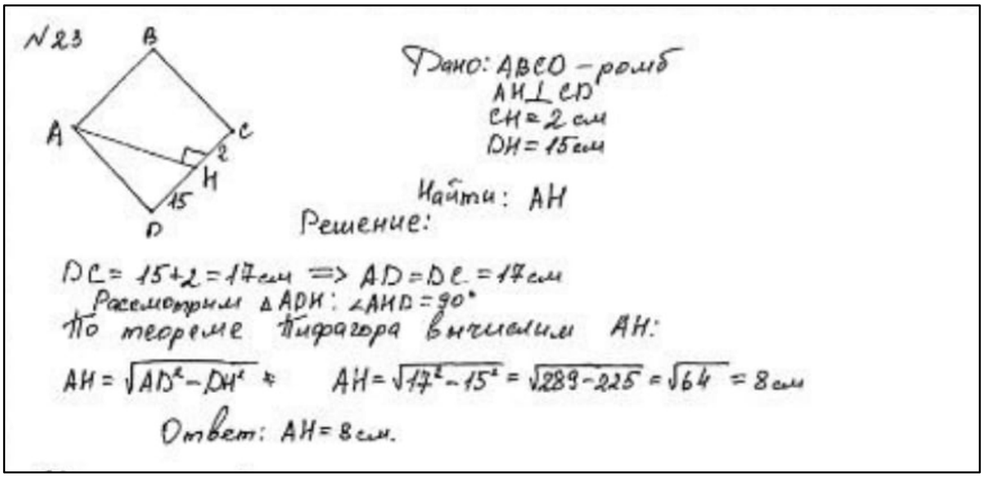


Комментарий. График построен с ошибкой: неверно найдена ордината вершины второй параболы и в точке $x = 0$ явно видна точка разрыва.

Оценка 0 баллов.

Задание 23

Пример 1. Высота *AH* ромба *ABCD* делит сторону *CD* на отрезки *DH* = 15 и *CH* = 2. Найдите высоту ромба.



Дано: ABCD – ромб
$AH \perp CD$
CH = 2 см
DH = 15 см

Найти: AH

Решение:

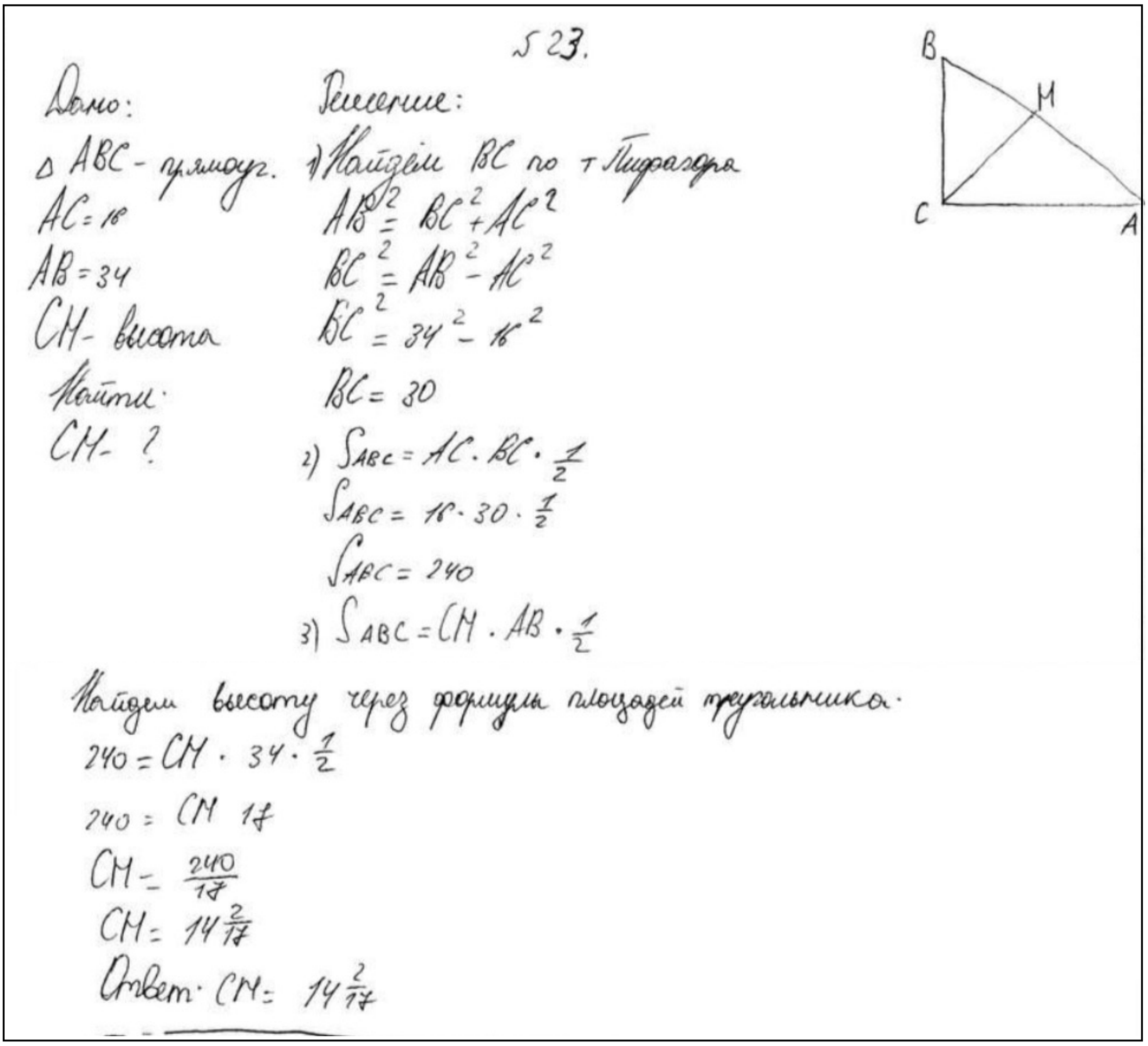
DC = 15+2 = 17 см => AD = DC = 17 см
Рассмотрим $\triangle ADH$: $\angle AHD = 90°$
По теореме Пифагора вычислим AH:
$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$; $AH = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289-225} = \sqrt{64} = 8$ см

Ответ: AH = 8 см.

Комментарий. В решении использована не теорема Пифагора в формулировке учебника, а эквивалентное ей утверждение. В экзаменационной работе чертеж является лишь иллюстрацией к решению геометрической задачи, качество его построения не оценивается.

В соответствии с критериями 2 балла.

Пример 2. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 16, а гипотенуза равна 34. Найдите высоту этого треугольника, проведенную к гипотенузе.



№ 23.

Дано:

$\triangle ABC$ - прямоуг.

$AC = 16$

$AB = 34$

CH- высота

Найти:

CH- ?

Решение:

1) Найдём BC по т Пифагора

$AB^2 = BC^2 + AC^2$

$BC^2 = AB^2 - AC^2$

$BC^2 = 34^2 - 16^2$

$BC = 30$

2) $S_{ABC} = AC \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$

$S_{ABC} = 16 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2}$

$S_{ABC} = 240$

3) $S_{ABC} = CH \cdot AB \cdot \frac{1}{2}$

Найдем высоту через формулы площадей треугольника.

$240 = CH \cdot 34 \cdot \frac{1}{2}$

$240 = CH\ 17$

$CH = \frac{240}{17}$

$CH = 14\frac{2}{17}$

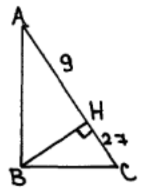
Ответ: $CH = 14\frac{2}{17}$

Комментарий. Указание на то, что гипотенузой является сторона *AB*, прямо следует из описания условия в рубрике «Дано», прямой переход от квадрата длины *BC* к самой длине верный.

Критерии оценивания предписывают поставить 2 балла.

Пример 3. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 9$, $AC = 36$.

23.



Дано: ΔABC, $\angle B = 90^\circ$, $AH = 9$, $HC = 27$,

т.к $AC = 36$

Найти: AB

Решение:

Сторона $\frac{AH}{HC} = \frac{1}{3}$, значит $\angle ABH =$

$= 90 \cdot \frac{1}{3} = 30^\circ \Rightarrow AB = 9 \cdot 2$, т.к сторона

лежащая напротив угла 30°, равна

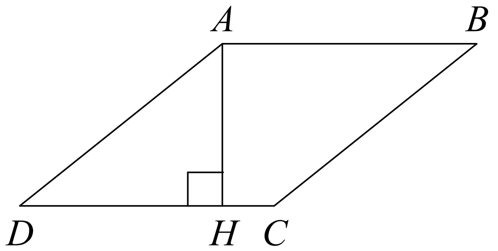
половине гипотенузы.

$AB = 18$ Ответ: 18

Комментарий. Критерии обязывают выставить 0 баллов, поскольку решение содержит ошибки в нахождении отношения отрезка AH к HC и угла ABH. Обратим внимание на то, что верный ответ в данном случае не играет роли.

Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Решение.



$ABCD$ — ромб, поэтому $AD = DC = DH + HC = 29$. Из треугольника ADH находим:

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 20.$$

Ответ: 20.

Критерии оценивания выполнения задания 23

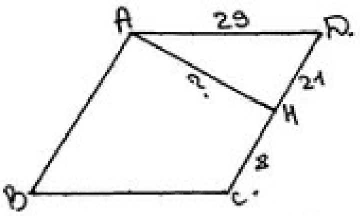
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 23

Пример 4. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

задание 23



Дано: ABCD - ромб

AH - высота

CH = 8

DH = 21

Найти: $h_{ромб}$

Решение:

1) DC = AD = AB = BC = 29 (т.к. у ромба все стороны равны)

2) △ADH. По т. Пифагора:

$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

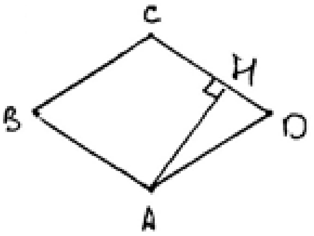
Ответ: 20 см

Комментарий. Решение полное и верное.

Оценка 2 балла.

Пример 5. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



Дано:
ABCD - ромб
AH - высота
CH = 2
DH = 24
AH - ?

Решение:

1) т.к. ромб стороны равны $CD = AD = CH + DH$
$AD = 26$

2) $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$ (по th Пифагора на $\triangle AHD$)
$AH = \sqrt{676-576} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Отв: $10\sqrt{2}$

Комментарий. Вычислительная ошибка при нахождении разности под знаком корня.

Оценка 1 балл.

Пример 6. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

23.

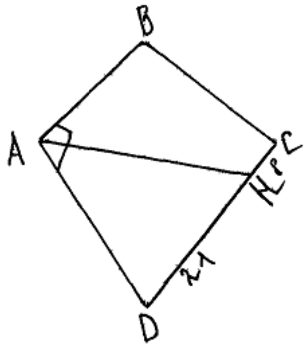
Дано:

ABCD – ромб

AH – высота

DH=21

CH=8



Найти:

AH – ?

Решение:

~~По свойству высоты, опущенной из прямого угла:~~

~~∠A – прямой ⇒ AH =~~

1) $AD = DH + HC = 21 + 8 = 29$ (по свойству 2-ух пропорциональных сторон).

Рассмотрим $\triangle ADH$:

2) $\angle H$ – прямой $\Rightarrow \triangle ADH$ – прямоугольный

По теореме Пифагора:

$AH^2 = AD^2 - DH^2$

$AH = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

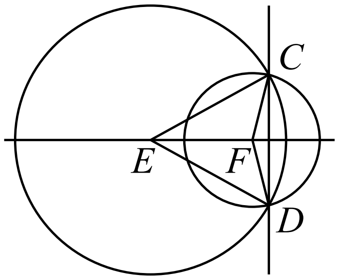
Ответ: $AH = 20$

Комментарий. Ответ верный, однако, решение содержит геометрическую ошибку: сторона AD не складывается из отрезков DH и HC.

Оценка 0 баллов.

Задание 24

Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.



Доказательство. Точка E равноудалена от точек C и D, поэтому эта точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CD. Аналогично, точка F лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CD. Значит, прямая EF является серединным перпендикуляром к отрезку CD.

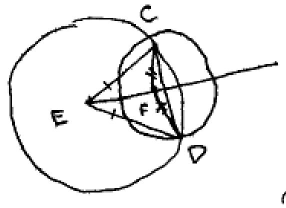
Критерии оценивания выполнения задания 24

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит несущественные недостатки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 24

Пример 1. Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, причём точки *E* и *F* лежат по одну сторону от прямой *CD*. Докажите, что прямые *CD* и *EF* перпендикулярны.

24.



Дано: CD - прямая, (·)C и (·)D - пересечение двух окружностей

Доказать: $CD \perp EF$

Доказательство.

1) EC = ED - радиусы

FC = FD - радиусы

2) (·)E и (·)F равноудалены от концов отрезков CD

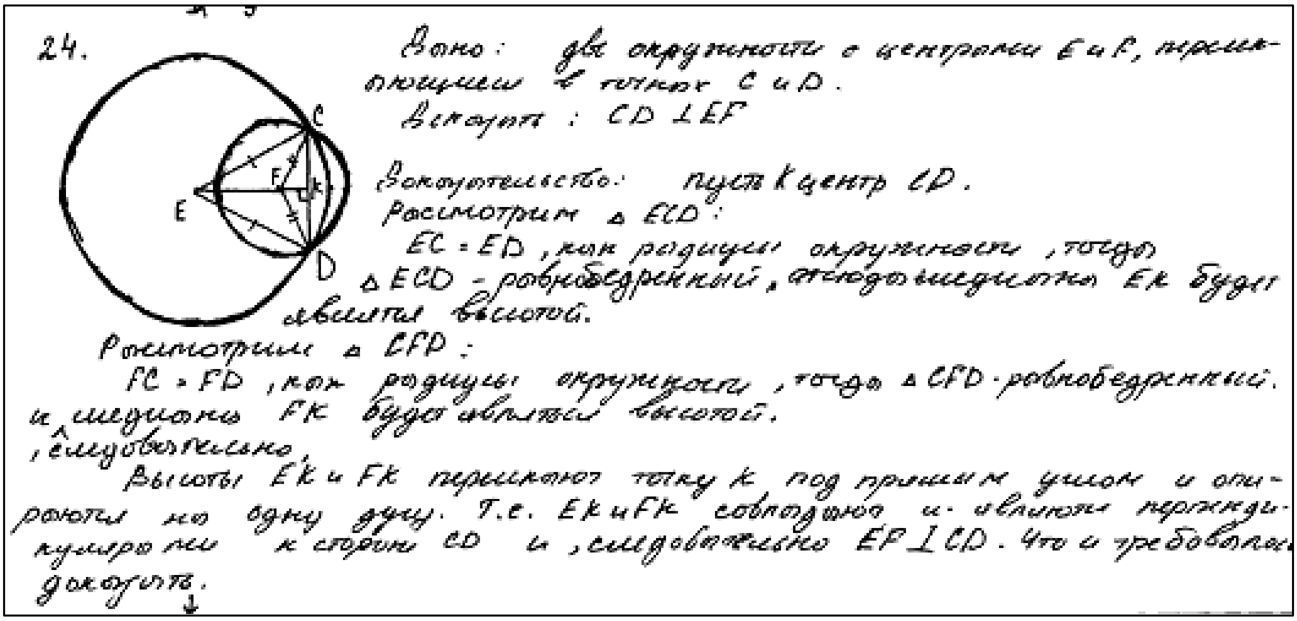
=> EF - срединный перпендикуляр => $CD \perp EF$

ч.т.д.

Комментарий. Доказательство понятное, полное и верное.

Оценка 2 балла.

Пример 2. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.



24.

Дано: две окружности с центрами E и F, пересекающиеся в точках C и D.

Доказать: $CD \perp EF$

Доказательство: пусть K центр CD.

Рассмотрим $\triangle ECD$:

EC = ED, как радиусы окружности, тогда $\triangle ECD$ – равнобедренный, а следовательно медиана EK будет являться высотой.

Рассмотрим $\triangle CFD$:

FC = FD, как радиусы окружности, тогда $\triangle CFD$ - равнобедренный. и медиана FK будет являться высотой, следовательно,

Высоты EK и FK пересекают точку K под прямым углом и опираются на одну дугу. Т.е. EK и FK совпадают и являются перпендикулярами к стороне CD и, следовательно $EF \perp CD$. Что и требовалось доказать.

Комментарий. В последнем абзаце содержатся лишенные смысла утверждения «высоты пересекают точку под прямым углом», «высоты опираются на одну дугу». Имеется в виду, что оба отрезка EF и FK перпендикулярны CD, и это доказано выше. Поскольку рассуждение, в целом, понятное и верное, эти недостатки можно отнести к несущественным неточностям.

Оценка 1 балл.

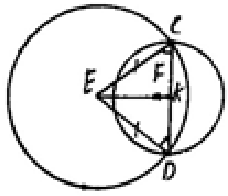
Пример 3. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

Дано:

окр(E); окр(F)

окр$(E) \cap$ окр$(F) = C$ и D

Док-ть: $CD \perp EF$



~~Решение~~ Доказательство

Проведём EC и ED — радиусы, тогда $EC = ED$.

$\triangle ECD$ - равнобедренный, т.к $EC = ED$ (как радиусы) $\Rightarrow \angle EDC = \angle ECD$,

$CK = KD \Rightarrow \triangle EKC = \triangle EKD$ (по 2 сторонам и углу между ними).

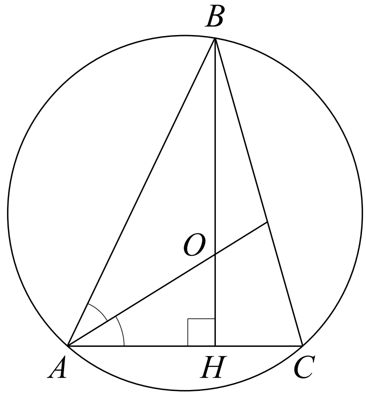
Тогда $\angle CEK = \angle DEK \Rightarrow EK$ - биссектриса $\angle CED$. В равнобедренном треугольнике биссектриса, выпущенная из вершины, является медианой и высотой $\Rightarrow EF \perp CD$ ч.т.д.

Комментарий. Не доказано, что $CK = KD$, не доказано, что точка F лежит на высоте EK. Без этого рассуждение не является достаточным.

Оценка 0 баллов.

Задание 25

В треугольнике ABC биссектриса угла A, делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $25:24$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 14$.



Решение. Пусть биссектриса, проведенная из угла A, пересекает высоту BH в точке O (см. рис.). Пользуясь свойством биссектрисы, из треугольника ABH находим:

$$\frac{BA}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{25}{24}.$$

Следовательно,

$$\cos A = \frac{AH}{AB} = \frac{24}{25}.$$

Тогда

$$\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{24}{25}\right)^2} = \frac{7}{25}.$$

По теореме синусов из треугольника ABC находим:

$$\frac{BC}{2\sin A} = \frac{14 \cdot 25}{2 \cdot 7} = 25.$$

Ответ: 25.

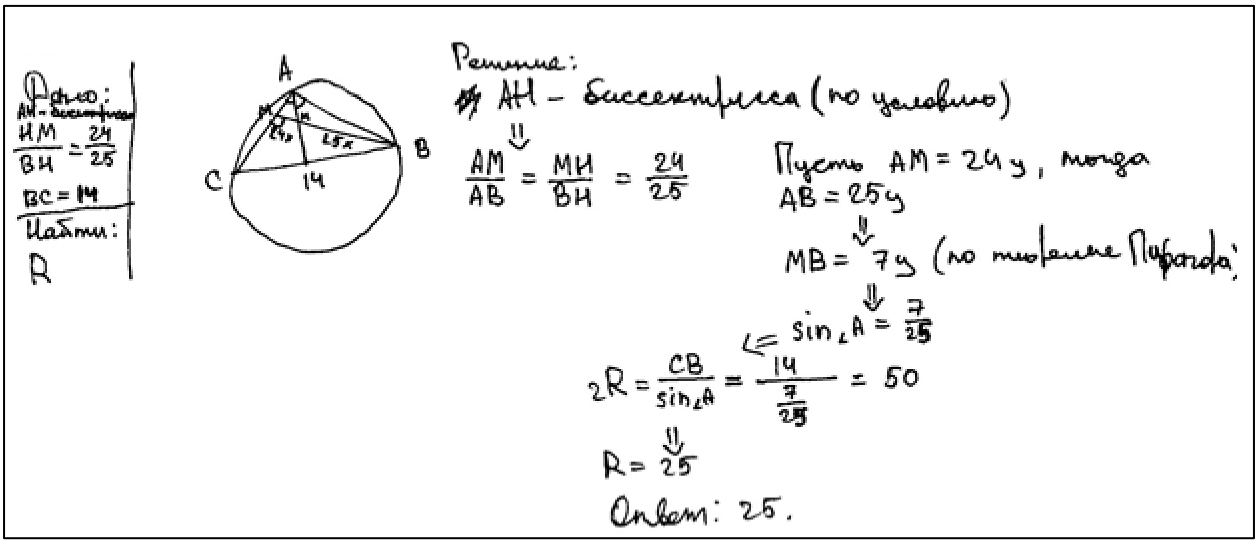
Критерии оценивания выполнения задания 25

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 25

Пример 1. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $25:24$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 14$.

Ответ: 25.



Дано:
AH – биссектриса
$\frac{HM}{BH} = \frac{24}{25}$
$BC = 14$
Найти:
R

Решение:
AH – биссектриса (по условию)
$\Downarrow$
$\frac{AM}{AB} = \frac{MH}{BH} = \frac{24}{25}$

Пусть $AM = 24y$, тогда
$AB = 25y$
$\Downarrow$
$MB = 7y$ (по теореме Пифагора)
$\Downarrow$
$\Leftarrow \sin\angle A = \frac{7}{25}$

$2R = \frac{CB}{\sin\angle A} = \frac{14}{\frac{7}{25}} = 50$
$\Downarrow$
$R = 25$

Ответ: 25.

Комментарий. Решение полное и верное.

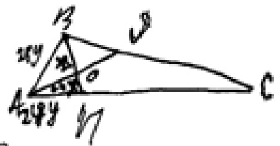
Оценка 2 балла.

Пример 2. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $25:24$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 14$.

Ответ: 25.

Дано:
$\triangle ABC$
BH – высота
AO – биссектриса
$BC = 14$
$BO : OH = 25x : 24x$

R – ?



Решение:

1) $\dfrac{AB}{AH} = \dfrac{BO}{OH} = \dfrac{24(y)}{25(y)}$ – свойство биссектрисы в $\triangle ABH$

2) $\triangle ABH$ – прямоугольный =>
$25y^2 = AB^2 = AH^2 + BH^2$ (Пифагор) =>
$25y^2 = 24y^2 + (49x)^2 \Rightarrow y^2 = (49x)^2 \Rightarrow y^2 = 49^2x^2$
$\Rightarrow y = 7x$

3) $\sin\angle BAH$ в $\triangle BAH = \dfrac{BH}{AB} = \dfrac{49x}{25y} = \dfrac{49x}{7x\cdot 25} = \dfrac{7}{25}$

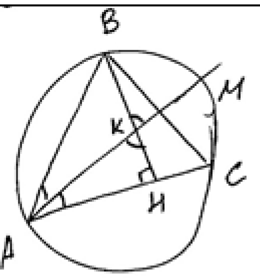
4) $2R = \dfrac{BC}{\sin A}$ (следствие из теоремы синусов) =>
$2R = \dfrac{14}{\frac{7}{25}} \Rightarrow 2R = 50 \Rightarrow R = 100$ Ответ: $R = 100$

Комментарий. Ход решения понятен, все шаги присутствуют, но допущена математическая ошибка: при возведении в квадрат выражений $25y$ и $24y$ коэффициенты остались без изменения.

Оценка 0 баллов.

Пример 3. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $25:24$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 14$.

Ответ: 25.



Решение

1) $\angle BKM$ опирается на ту же дугу что и $\angle BAM$, значит

$\angle BKM = \angle BAM$

2) $\angle BKM = \angle AKH$, как вертикальные углы

$\angle BKM = \angle BAM = \angle MAC$

Дано
$\triangle ABC$
AM - биссектриса
BH - высота
$BK : KH = 25 : 24$
$BC = 14$

R - ?

3) Рассмотрим $\triangle AKH$:

$\angle AHB = 90°$ - прямой, т.к. BH - высота к AC.

$\angle KAH = \angle AKH$ (по 2.), то

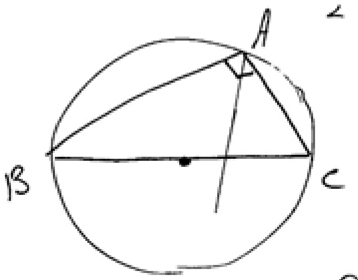
$\angle KAC = 45°$

4) $\angle BAC = \angle BAM + \angle MAC$

$\angle MAC = 45° = \angle BAM$, то

$\angle BAC = 45° + 45° = 90°$

5)



$\angle BAC = 90°$, то

$BC = d = 2R = 14$

$R = 7$

Ответ: 7

Комментарий. Свойство вписанных углов применяется к углу BKM, который не является вписанным. Это геометрическая ошибка.

Оценка 0 баллов.

ЧАСТЬ 3 Материалы для практических занятий

Оцените решения, данные в упражнениях. Комментарии и ответы в конце части.

Задание 20

Упражнение 20.1. Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

Ответ: $\left(2; 2+\sqrt{3}\right)$.

№20

$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$

$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$

$(x-2)((x-2) - \sqrt{3}) < 0$

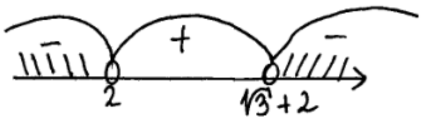
Метод интервалов:

Нули функции: $(x-2)((x-2)-\sqrt{3})=0$

$(x-2)(x-2-\sqrt{3})=0$

$x-2=0$ или $x-2-\sqrt{3}=0$

$x=2$ $\qquad$ $x=\sqrt{3}+2$



Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (\sqrt{3}+2; +\infty)$

Упражнение 20.2. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

Ответ: -3; -1; 1.

№ 20

1) $\cancel{x^2}$ $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

2) Вынести множители за скобку:

$x^2(x+3) - 1(x+3) = 0 = x^2(x+3) - (x+3) = 0$

3) $x^2(x+3) = (x+3)$ из этого следует, что x^2 никак не влияет на остальные члены, либо члены равны нулю.

3) $x_1 = 1 \Rightarrow$

$1^2(1+3) - (1+3) = 0 \qquad (1+3) - (1+3) = 4 - 4 = 0$

4) $x_2 = -1 \Rightarrow$

$-1^2(-1+3) - (-1+3) = 0 \qquad (-1+3) - (-1+3) = 0 \qquad -1+3+1-3 = 0$

5) $x_3 = -3 \Rightarrow$

$-3^2(-3+3) - (-3+3) = 0 \qquad 9(-3+3) - (-3+3) = 0 \qquad 9 \cdot 0 + 3 - 3 = 0$

Ответ: -3; -1; 1

Упражнение 20.3. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

Ответ: -3; -1; 1

№ 20

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

$x^2(x+3) - (x+3) = 0$

$(x+3) - (x^2 - 1) = 0$

$x + 3 = 0$ или $x^2 - 1 = 0$

$x = -3 \qquad x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Упражнение 20.4. Уравнение $x^4 = (2x - 15)^2$.

Ответ: $-5; 3$

№ 20

$x^4 = (2x - 15)^2$

$x^2 = 2x + 15$ и $x^2 = -(2x - 15)$

$x^2 - 2x + 15 = 0$

$D = 4 - 60 < 0$ – нет решений.

$x^2 + 2x - 15 = 0.$

$x_1 = -5$

$x_2 = 3$

Ответ: $-5; 3$.

Упражнение 20.5. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$.

Ответ: $-4, -1, 1$.

№ 20

$x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

$x^2(x+4) - 1 \cdot (x+4)$

$(x+4)(x^2-1) - 5$

$x^2 - 4 = 0$

$x_1 = -1$

$x^2 - 1 = 0$

$x_2^2 = 1$

$x_2 = 1$

$x_2 = -1$

Ответ: $-4; 1; -1$

Упражнение 20.6. Решите уравнение $x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 40$.

Ответ: -5.

20.

$x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 40$

$x^2 - 3x + \cancel{\sqrt{6-x}} - \cancel{\sqrt{6-x}} - 40 = 0$

$x^2 - 3x - 40 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 9 + 160 = 169$

$D > 0 \Rightarrow 2\ k$

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{3+13}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{3-13}{2} = \frac{-10}{2} = -5.$

Ответ: $-5;\ 8.$

Упражнение 20.7. Решите уравнение $(x-2)(x^2+2x+1) = 4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

№ 20

$(x-2)(x^2+2x+1) = 4(x+1)$

$(x-2)(x^2+2x+1) - 4(x+1) = 0$

$\cancel{x^3 + 2x^2 + x - 2x^2 - 4x - 2 - 4x - 4 = 0}$

$\cancel{x^3 - 7x - 6 = 0}$

$\cancel{x^3 - 7x = 6}$

$\cancel{x(x^2 - 7) = 6}$

$\cancel{x = 6}$ ~~или~~ $\cancel{x^2 - 7 = 6}$

$\cancel{x^2 = 13 \quad x = \sqrt{13}}$ ~~Ответ:~~ $\cancel{\sqrt{13};\ 6}$

$(x-2)(x+1)^2 - 4(x+1) = 0$

$(x+1)((x-2)(x+1) - 4) = 0$

$x + 1 = 0$ или $(x-2)(x+1) - 4 = 0$

$x = -1 \qquad x^2 - x - 6 = 0$

$D = 1 - 4(-6) = \sqrt{25} = 5$

$x_1 = \frac{1-5}{2} = 2$

$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$

Ответ: $-1; 2; 3$

Упражнение 20.8. Решите уравнение $x^3+3x^2-x-3=0$.

Ответ: -3; -1; 1.

№20

$x^3+3x^2-x-3=0$

$x^2(x+3)-(x+3)=0$

$(x+3)(x^2-1)=0$

$x=-3$ или $x^2=1$

$x=\pm 1$ Ответ: -3; ± 1

Упражнение 20.9. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0{,}2$, $0{,}5$.

$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0 \mid \cdot x^2$; $x\neq 0$

$1+3x-10x^2=0 \mid \cdot(-1)$

$10x^2-3x-1=0$

$D=b^2-4ac$

$D=(-3)^2-4\cdot 10\cdot(-1)=49$; $\sqrt{D}=\pm 7$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$; $x=\frac{3\pm 7}{2\cdot 10}$

$x_1=\frac{3+7}{20}$

$x_1=0{,}5$

$x_2=\frac{3-7}{20}$

$x_2=-0{,}2$

Ответ: $x_1=0{,}5$; $x_2=-0{,}2$

Упражнение 20.10. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0,2,\ 0,5$.

$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$

$\frac{1}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{10x^2}{x^2}=0$ $\qquad x\neq 0$

$1+3x-10x^2=0$

$-10x^2+3x+1=0$

$D=9-4\cdot 1\cdot(-10)=9+40=49$

$\sqrt{D}=\pm 7$

$x_1=\frac{-3-7}{-20}=\frac{-10}{-20}=2$

$x_2=\frac{-3+7}{-20}=\frac{4}{-20}=-0,2$

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-0,2$

Упражнение 20.11. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0,2,\ 0,5$.

$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-\frac{10}{1}=0$ $\qquad$ ОДЗ: $x\neq 0$

$1+3x-10x^2=0.$

$-10x^2+3x+1=0 \quad :(-1).$

$x^2+3x+1=0.$

$D=b^2-4ac=9-4\cdot(-1)\cdot 10=49.$

$x_1=\frac{3+7}{20}=0,5.$

$x_2=\frac{3-7}{20}=-0,8.$

Ответ: $0,5$; $-0,8$.

Упражнение 20.12. Решите уравнение $(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

$$(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$$

$$(x^2+2x+1)=(x+1)^2$$

$$(x-2)(x+1)^2-4(x+1)=0$$

$$(x-2)(x+1)(x+1)-4(x+1)=0$$

$$(x+1)((x-2)(x+1)-4)=0$$

$$x+1=0$$

$$x=-1$$

$$(x-2)(x+1)-4=0$$

$$x^2-2x+x-2=0$$

$$x^2-3x-2=0$$

$$x^2-3x-2=0$$

$$a=1 \quad b=-3 \quad c=-2$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=3^2-4\cdot1\cdot(-2)=9+8=-1$$

$D<0$ корней нет

Ответ: -1

Упражнение 20.13. Решите уравнение

$$x^3+3x^2-x-3=0.$$

Ответ: -3; -1; 1.

№ 20

$x^3+3x^2-x-3=0$

$x^2(x+3)-(x+3)=0$

$(x+3)\cdot(x^2-1)=0$

Нули: -3; 1

Ответ: -3; 1

Упражнение 20.14. Решите уравнение $x^3+3x^2-x-3=0$.

Ответ: -3; -1; 1.

20. $x^3+3x^2-x-3=0$

$(x^3+3x^2)-(x-3)=0$

$x^2(x+3)-(x-3)=0$

$x^2(x+3)(x+3)=0$

$(x^2-1)(x+3)=0$

$x^2-1=0$ $\quad$ $x+3=0$

$x^2=\pm 1$ $\quad$ $x=-3$

Ответ: -3; -1; 1

Задание 21

Упражнение 21.1. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

Ответ: 20 км/ч.

S21

A $\xleftrightarrow{S_1 = 60 км}$ B B $\xleftrightarrow{S_2 = 60 км}$ A

t_1 - ~~неизвестно~~ y $t_2 = y + 3ч$

V_1 - ~~неизвестно~~ x $V_2 = x + 10 \frac{км}{ч}$

Нам над, что бы V_2 было больше V_1 на $10 \frac{км}{ч}$, а t_2 меньше чем t_1 на 3ч, то есть:

$(V_1 + 10 \frac{км}{ч}) \cdot t_1 =$

$= V_2 \cdot (t_2 + 3ч)$

	в-1	в-2	в-3
V_1	$15 \frac{км}{ч}$	$12 \frac{км}{ч}$	$10 \frac{км}{ч}$
t_1	4ч	5ч	6ч

	в-1	в-2	в-3
V_2	$60 \frac{км}{ч}$	$30 \frac{км}{ч}$	$20 \frac{км}{ч}$
t_2	1ч	2ч	3ч

в3) $(10 \frac{км}{ч} + 10 \frac{км}{ч}) \cdot 6ч =$

$= 20 \frac{км}{ч} \cdot (3ч + 3ч)$

Ответ: $20 \frac{км}{ч}$

Упражнение 21.2. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

1) Пусть работа, которую нужно сделать во всех случаях равна 1.
2) Пусть производительность труда Игоря - x, Паши - y, а Володи - z
3) Тогда: производительность труда Игоря и Паши $= x+y = \frac{1}{20}$ (ч)
Паши и Володи - $y+z = \frac{1}{21}$ (часа)
Володи и Игоря - $z+x = \frac{1}{28}$ (часа)
4) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y = \frac{1}{20} \\ y+z = \frac{1}{21} \\ z+x = \frac{1}{28} \end{cases}$$

$$x = \frac{1}{20} - y$$
$$z = \frac{1}{21} - y$$
$$\frac{1}{20} - y + \frac{1}{21} - y = \frac{1}{28}$$
$$-2y = \frac{1}{28} - \frac{1}{20} - \frac{1}{21}$$
$$-2y = \frac{15 - 20 - 21}{420}$$
$$-2y = \frac{-26}{420}$$
$$y = \frac{13}{420}$$
$$x = \frac{1}{20} - \frac{13}{420}$$
$$x = \frac{21}{420} - \frac{13}{420}$$
$$x = \frac{8}{420}$$
$$z = \frac{1}{21} - \frac{13}{420}$$
$$z = \frac{20}{420} - \frac{13}{420}$$
$$z = \frac{7}{420}$$

5) Таким образом производительность всех мальчиков:
$\frac{8}{420} + \frac{7}{420} + \frac{13}{420} = \frac{28}{420}$ - в час, а в минуту: $\frac{28}{420 \cdot 60}$
6) Время за которое она выполнят работу:
$1 : \frac{28}{420 \cdot 60} = \frac{420 \cdot 60}{28} = \frac{60 \cdot 60}{4} = 900$ минут

Ответ: за 900 минут мальчики покрасят забор, работая втроём.

Упражнение 21.3. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

$$И+П=14$$
$$П+В=15$$
$$В+И=30$$

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ z+x=\frac{1}{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y=\frac{1}{15}-z \\ x=\frac{1}{30}-z \end{cases}$$

$$\frac{1}{15}-z+\frac{1}{30}-z=\frac{1}{14}$$
$$-2z+\frac{3}{30}=\frac{1}{14}$$
$$-2z=\frac{1}{14}-\frac{3}{30}$$
$$-2z=\frac{30-42}{420}$$

$$2z=\frac{12}{420}$$
$$z=\frac{12}{420}:2=\frac{12}{420}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{70}$$
$$y=\frac{1}{15}-\frac{1}{70}=\frac{70-15}{1050}=\frac{55}{1050}$$
$$x=\frac{1}{30}-\frac{1}{70}=\frac{70-30}{2100}=\frac{40}{2100}=\frac{4}{210}$$

$$\frac{1}{70}+\frac{55}{1050}+\frac{4}{210}=\frac{7}{210}+\frac{55}{1050}=\frac{1}{30}+\frac{55}{1050}=\frac{1050+1650}{31500}=$$
$$=\frac{2700}{31500}=\frac{27}{315}\ (ч)$$
$$\frac{27}{315}\cdot\frac{60}{1}=\frac{1620}{315}=5\frac{45}{315}=5\frac{1}{7}\ (минут)$$

Ответ: $5\frac{1}{7}$ (минут)

Упражнение 21.4. Два велосипедиста одновременно отправляются в 209-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 8 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 8 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 11 км/ч.

21. Пусть x км/ч – скорость 2 велосипедиста, тогда $(x+8)$ км/ч – скорость 1 велосипедиста, общее расстояние 209 км.

$\frac{209}{x}$ ч – время 2 велосипедиста

$\frac{209}{x+8}$ ч – время 1 велосипедиста.

$\frac{209}{x}^{\backslash x+8} - \frac{209}{x+8}^{\backslash x} = 8^{\backslash x(x+8)}$

$209x + 1672 - 209x = 8x^2 + 64x$

$-8x^2 - 64x + 1672 = 0 \quad | : (-8)$

$x^2 + 8x - 209 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-209) = 64 + 836 = 900 \ (D > 0)$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

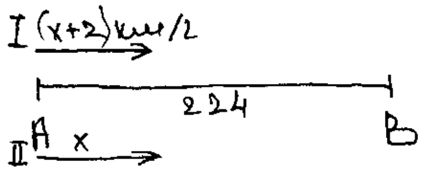
$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-8-30}{2} = -16$ – ~~не~~ не подходит по условию задачи.

$x_2 = \frac{-8 + \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-8+30}{2} = 11.$

Ответ: 11 км/ч.

Упражнение 21.5. Два велосипедиста одновременно отправляются в 224-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 14 км/ч.



	V	t	S
I	$(x+2)$ км/ч	$\frac{240}{x+2}$ ч	240 км
II	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км

По условию задачи известно, что первый велосипедист прибыл к финишу раньше на 2 часа второго, отсюда уравнение.

$$\frac{240}{x} - \frac{240}{x+2} = 2$$

$$\frac{240^{\backslash x+2}}{x} - \frac{240^{\backslash x}}{x+2} - 2^{\backslash (x^2+2x)}$$

$$\frac{240(x+2) - 240x - 2(x^2+2x)}{x(x+2)} = 0$$

$$\cancel{240x} + 480 - \cancel{240x} - 2x^2 - 4x = 0$$

$$-2x^2 - 4x + 480 = 0 \quad /:-2$$

$$x^2 + 2x - 240 = 0$$

ОДЗ

$x(x+2) \neq 0$

$x \neq 0 \quad x+2 \neq 0$

$x \neq -2$

$D = b^2 - 4ac$ $\;-240$

$D = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-480) = 4 + 960 = 964$

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{964}}{2}$ = не подходит по усл. задачи т.к. <0

$x_2 = \frac{-2+\sqrt{964}}{2}$ – скорость второго велосипедиста

Ответ: $\frac{-2+\sqrt{964}}{2}$ скорость второго велосипедиста.

Упражнение 21.6. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

Ответ: 20 км/ч.

Задание 21

$t_1 > t_2$ на 3 ч

	v, км/ч	t, ч	S, км
A→B	x	$\frac{60}{x}$	60
B→A	$x+10$	$\frac{60}{x+10}$	60

$$\frac{60}{x}^{\backslash x+10} - \frac{60}{x+10}^{\backslash x} = 3^{\backslash x(x+10)}$$

ОДЗ: $x \neq 0$ и $x \neq -10$

$$60(x+10) - 60x = 3x(x+10)$$

$$\cancel{60x} + 600 - \cancel{60x} = 3x^2 + 30x$$

$$3x^2 + 30x - 600 = 0 \quad |:3$$

$$x^2 + 10x - 200 = 0$$

$$D = 100 + 4 \cdot 200 = 900$$

$$x_1 = \frac{-10+30}{2} = 10$$

$$x_2 = \frac{-10-30}{2} = -20 < 0 \text{ неуд условиям}$$

значит

$v = 10$

Ответ: 10 км/ч

Упражнение 21.7. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

Ответ: 20 км/ч.

№21

	S км	V км/ч	t ч.
из А в В	60	x−10	$\frac{60}{x-10}$
из В в А	60	x	$\frac{60}{x}$

$$\frac{60}{x-10} = \frac{60}{x} + 3$$

$$\frac{60}{x-10} - \frac{60}{x}^{\,-10} - 3^{\,x-10} = 0$$

$$\frac{60 + 600 - 3x + 30}{x(x-10)} = 0$$

$$\frac{-3x + 690}{x(x-10)} = 0$$

$$\begin{cases} -3x + 690 = 0 \\ x(x-10) \neq 0 \end{cases}$$

$-3x = -690$ $\qquad x \neq 0$ и $x - 10 \neq 0$

$x = \frac{-690}{-3}$ $\qquad x \neq 10$

$x = 230$

Ответ: 230 км/ч

Упражнение 21.8. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

Ответ: 20 км/ч.

21. A 60км B

*) Предположим скорость велосипедиста ровна 10км/ч

3ч остановка

из В в А на 10км/ч быстрее

1) 60 : 10 = 6(ч) - время на дорогу из А в В

2) 10 + 10 = 20(км/ч) - скорость велосипедиста из В в А

3) 60 : 20 = 3(ч) - время на дорогу из В в А

4) 3 + 3 = 6(ч) - всего времени с остоновкой

Ответ: 20 км/ч

Упражнение 21.9. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

Ответ: 20 км/ч.

№21	v	t	S
Из А в В	x км/ч	$\frac{60}{x}$ ч.	60 км
Из В в А	$(x+10)$ км/ч	$\frac{60}{x+10}$ ч.	60 км

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3 \quad |: x(x+10)$$

ОДЗ $x(x+10) \neq 0$

$60(x+10) - 60x = 3x(x+10)$ $x \neq 0$ $x+10 \neq 0$

$\cancel{60x} + 600 - \cancel{60x} = 3x^2 + 30x$ $x \neq -10$

$3x^2 + 30x - 600 = 0 \quad |:3$

$x^2 + 10x - 200 = 0$

$D = b^2 - 4ac = 10^2 - 4\cdot 1\cdot(-200) = 100 + 800 = 900$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{900}}{2\cdot 1} = \frac{-10 \pm 30}{2}$

$x_1 = \frac{-10-30}{2} = \frac{-40}{2} = -20$ — не удовлетворяет условию задачи

$x_2 = \frac{-10+30}{2} = \frac{20}{2} = 10$ (ч.) Скорость из А в В и из В в А

$v_{\text{из А в В}} = \frac{60}{10} = 6$ (км/ч)

$v_{\text{из В в А}} = 6$ км/ч $+ 10$ км/ч $= 16$ (км/ч)

Ответ: 16 км/ч.

Задание 22

Упражнение 22.1. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0 < m < 2$, $m > 6$.

№22. $y = \begin{cases} x^2+2 & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{6}{x} & \text{при } x < -2 \end{cases}$

1) $y = x^2+2$ при $x \geq -2$

$y = x^2+2$ — парабола вида $y = x^2$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = 0$

$y_0 = 0 + 2 = 2$

Вершина $(0;2)$

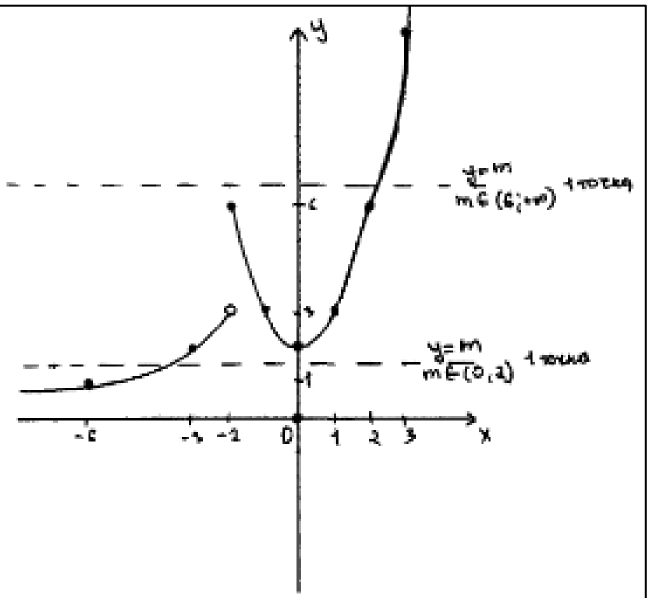
x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6	11

2) $y = -\frac{6}{x}$ при $x < -2$

$y = -\frac{6}{x}$ – график – гипербола

x	-6	-3	-2
y	1	2	3

← выколотая точка



$y=m$ – прямая параллельная Ox, имеет 1 общую точку с построенным графиком при $m \in (0;2) \cup (6;+\infty)$

Ответ: $(0;2) \cup (6;+\infty)$

Упражнение 22.2. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2$, $m>6$.

22.

$y=\begin{cases} x^2+2, & x \geq -2 \\ -\frac{6}{x}, & x<-2 \end{cases}$ — кусочно заданная функция с $D(y)=\mathbb{R}$

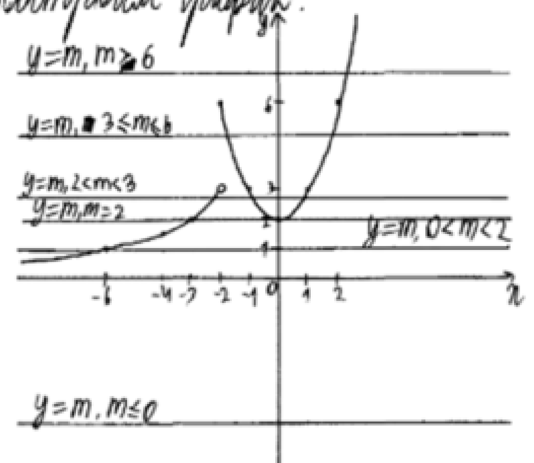
$y=x^2+2$ — квадратичная ф-ция, график — парабола с ветвями, направленными вверх и вершиной $(0;2)$

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6

$y=-\frac{6}{x}$ — ф-ция обратной пропорциональности, график — гипербола, расположенная в II и IV четвертях

x	-2	-3	-4	-6
y	3	2	$1\frac{1}{2}$	1

Построим график:



Прямая $y=m$ с графиком заданной ф-ции имеет: • 0 общих точек при $m\in(-\infty;0]$

• 1 общую точку при $m\in(0;2)\cup(6;+\infty)$

• 2 общие точки при $m\in\{2\}\cup[3;6]$

• 3 общие точки при $m\in(2;3)$

Ответ: $(0,2)\cup(6;+\infty)$

Упражнение 22.3. Постройте график функции

$$y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

22. $y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2$

$x + 2 \geq 0$

$x \geq -2$

при $x \geq -2$

$y = x^2 + 3x - 3x - 6 + 2 = x^2 - 3.$

x	-2	-1	0	1	2
y	1	-2	-3	-2	1

при $x < -2$

$y = x^2 + 3x + 3x + 6 + 2 = x^2 + 6x + 8$

$x_0 = \frac{-6}{2} = -3$

$y_0 = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$

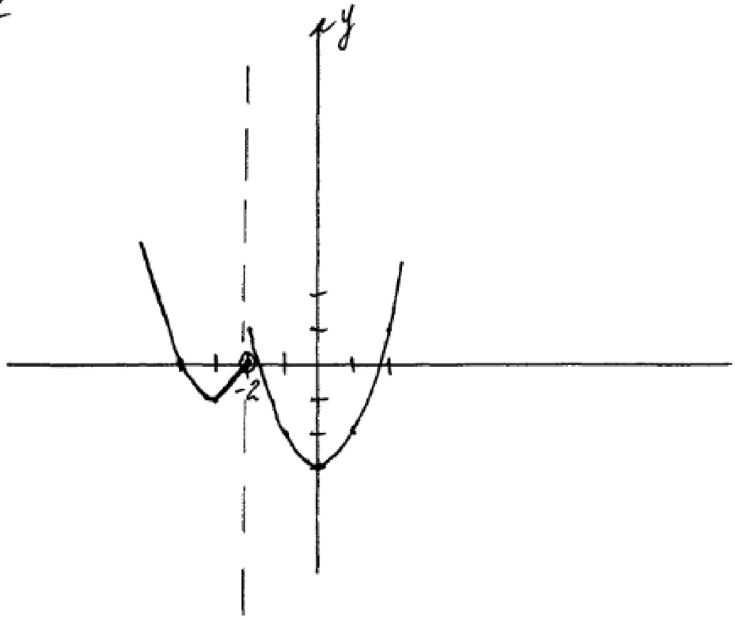
нули функции:

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$x_1 = -2$

$x_2 = -4$

$y = m;$ $m = -1,$ $m \ni [0; 1].$



Ответ: -1; $[0; 1]$.

Упражнение 22.4. Постройте график функции

$$y = x^2 + 3x - 3|x + 2| + 2.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: $m = -1$; $m = 0$.

№ 22

$y = x^2 + 3x - 3|x + 2| + 2$

$y = x^2 + 3x - 3x - 6 + 2$

$y = x^2 - 4$ — квадратичная функция, график — парабола.

Найдём вершину параболы $B_0(x_0; y_0)$.

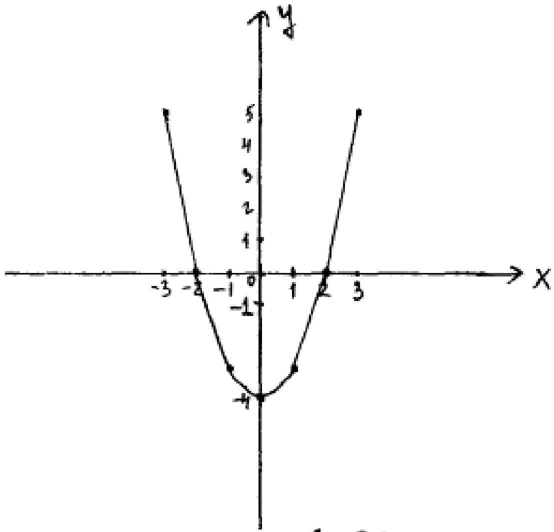
$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2 \cdot 1} = 0.$

$y_0 = 0^2 - 4 = -4.$

$B_0(0; -4)$

Построим таблицу значений.

x	1	-1	2	-2	3	-3
y	-3	-3	0	0	5	5



Прямая $y = m$ имеет с данным графиком ровно 2 общие точки при $m \in (4; +\infty)$.

Ответ: $(4; +\infty)$.

Упражнение 22.5. Постройте график функции $y=\dfrac{2{,}5|x|-1}{|x|-2{,}5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Ответ: $0,\ -6{,}25,\ 6{,}25$.

$y=\dfrac{2{,}5|x|-1}{|x|-2{,}5x^2}$

при $x \geq 0$

$x-2{,}5x^2 \neq 0$

$x(1-2{,}5x) \neq 0$

$x \neq 0$ или $1-2{,}5x \neq 0$

$2{,}5x \neq 1$

$x \neq \dfrac{1}{2{,}5}$

$x \neq 0{,}4$

при $x<0$

$-x-2{,}5x^2 \neq 0$

$-x(1+2{,}5x) \neq 0$

$x \neq 0$ или

$2{,}5x \neq -1$

$x \neq -0{,}4$

(1сл $|x| \geq 0$)

1сл $x \geq 0$

$|x| = x$

$y=\dfrac{2{,}5x-1}{x-2{,}5x^2}$

$y=-\dfrac{1-2{,}5x}{x(1-2{,}5x)}$

$y=-\dfrac{1}{x}$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	2	0,4
y	-2	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	2,5

2сл $x<0$

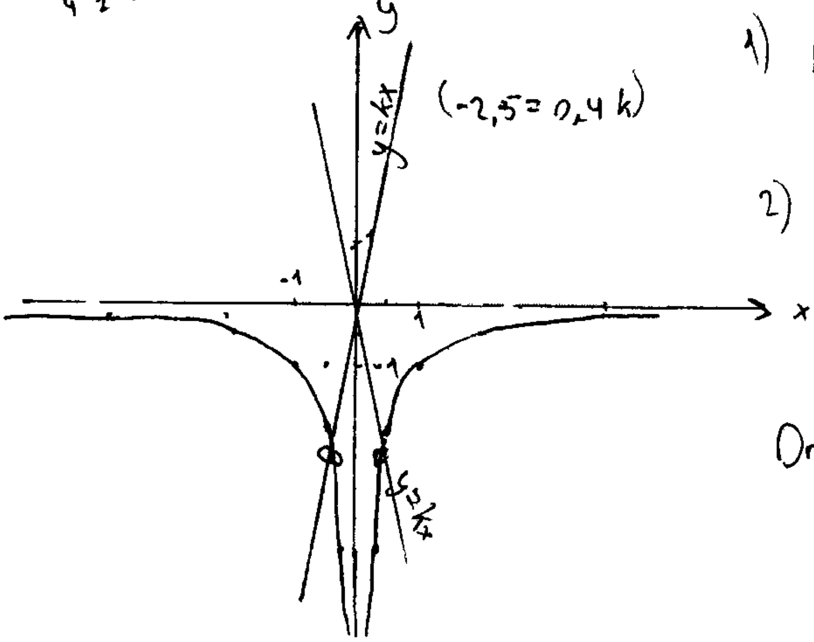
$|x| = -x$

$y=\dfrac{-2{,}5x-1}{-x-2{,}5x^2}$

$y=\dfrac{-(2{,}5x+1)}{-x(1+2{,}5x)}$

$y=\dfrac{1}{x}$

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-1	-2	-4	~~0~~	-0,4
y	-2	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$		-2,5



$-2{,}5 = 0{,}4k$

1) $k=\dfrac{-2{,}5}{0{,}4}$ $/\cdot 10$

$k=-6{,}25$

2) $-2{,}5=-0{,}4k$

$k=\dfrac{-2{,}5}{-0{,}4}$

$k=6{,}25$

Ответ: 6,25; -6,25

Упражнение 22.6. Постройте график функции

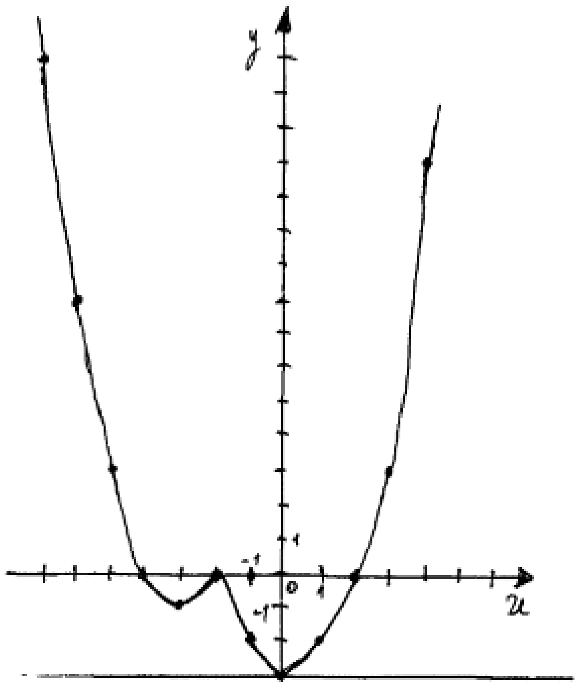
$$y = x^2 + 3x - 3|x + 2| + 2.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: $m = -1$; $m = 0$.

№22 $y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2$

x	0	1	2	3	4	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
y	-4	-3	0	3	12	-3	0	1	0	3	8	15



Ответ: $m \in [-1; 0]$

Упражнение 22.7. Постройте график функции

$$y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: $m = -1$; $m = 0$.

№22

$y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2$

$|x+2| \geq 0$

$y = x^2 + 3x - 3(x+2) + 2$

$y = x^2 + \cancel{3x} - \cancel{3x} - 6 + 2$

$y = x^2 - 4$

$|x+2| < 0$

$y = x^2 + 3x - 3(-x-2) + 2$

$y = x^2 + 3x + 3x + 6 + 2$

$y = x^2 + 6x + 8$

$x_B = \frac{-b}{2a}$

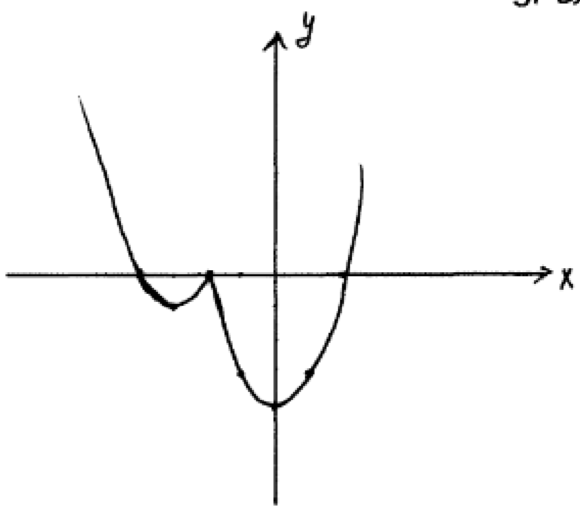
$x_B = \frac{-6}{2} = -3$

$y(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 8$

$y(-3) = 9 - 18 + 8$

$y(-3) = -1$. вершина $(-3; -1)$

x	-2	-4
y	0	0



$y = m$

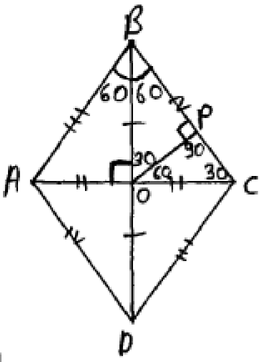
$m = 0$.

Задание 23

Упражнение 23.1. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 18, а одна из диагоналей ромба равна 72. Найдите углы ромба.

Ответ: $60°$; $120°$; $60°$; $120°$.

НОМЕР 23



$BD = 72$

$OP = 18$

$BO = 36$

т.к $OP = \frac{1}{2} BO$, то $\angle BOP = 30$; $\angle OBP = 60° \to \angle B = 120°$

т.к $\angle OBC = 60°$ и $\angle BOC = 90°$, то $\angle BCO = 30° \to C = 60°$

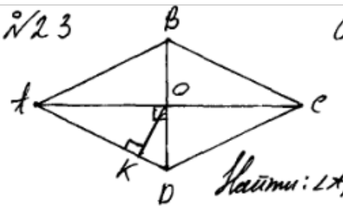
Ответ: $\angle A = \angle C = 60°$

$\angle B = \angle D = 120°$

Упражнение 23.2. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 18, а одна из диагоналей ромба равна 72. Найдите углы ромба.

Ответ: $60°$; $120°$; $60°$; $120°$.

№23



$OK = 18$

$AC = 72$

Т.к. $ABCD$ – ромб, то $\angle A = \angle C$ и $\angle B = \angle D$

$AO = OC = \frac{1}{2} AC$, т.к AC – диагональ.

Найти: $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D$. $AO = OC = 72 : 2 = 36$

Рассмотрим $\triangle AOK$ – прям. $\angle K = 90°$, $AO = 36$, $OK = 18$

$OK = \frac{1}{2} AO$ Значит, $\angle A = 30°$

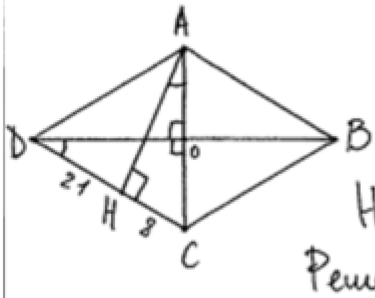
Следовательно $\angle A = \angle C = 60°$ и $\angle B = \angle D = 180° - 60° = 120°$

Ответ: $60°, 120°, 60°, 120°$

Упражнение 23.3. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

N 23.



Дано: $ABCD$ - ромб; AH - высота ($\angle H = 90°$); ($AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$; $AB = DC = AD = BC$); $DH = 21$; $HC = 8$, AC, DB - диагонали.

Найти: AH - ?

Решение: Рассмотрим $\triangle DOC$ и $\triangle AHC$.

см. лист. 4

$\angle ODC = \angle HAC$ (как $\angle$ с взаимоперпендик. сторонами);

$\triangle DOC$ и $\triangle AHC$ - прямоугол. ($\angle O = \angle H = 90°$) =>

$\triangle DOC \sim \triangle AHC$ (по 2-м углам).

$$\frac{BO}{AH} = \left(\frac{DC}{HC} = \frac{DC}{AC}\right)$$

Диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам. =>

$$OC = \frac{1}{2} AC$$

$$\frac{\frac{1}{2}AC}{HC} = \frac{DC}{AC}; \quad AC = \sqrt{2CH \cdot CD} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 29} = \sqrt{16 \cdot 29} = 4\sqrt{29}$$

По теореме Пифагора:

$$AH^2 = AC^2 + CH^2$$

$$AH^2 = (4\sqrt{29})^2 + 8^2$$

$$AH^2 = 16 \cdot 29 + 64$$

$$AH^2 = 464 + 64$$

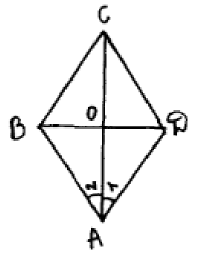
$$AH^2 = 528$$

$$AH = \sqrt{528} = \sqrt{64 \cdot 16 \cdot 29} = 8 \cdot 4 \cdot \sqrt{29} = 32\sqrt{29}$$

Ответ: $32\sqrt{29}$

Упражнение 23.4. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 18, а одна из диагоналей ромба равна 72. Найдите углы ромба.

Ответ: $60°$; $120°$; $60°$; $120°$.



23.

Дано:

ABCD - ромб

AC и BD - диагонали.

$OD = 18$

$AC = 72$

Найти: $\angle A$; $\angle B$; $\angle C$; $\angle D$

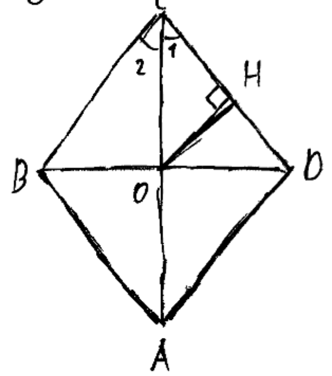
Решение:

1. Так как точка пересечения диагоналей делит диагональ на 2 равные части, то $72:2 = 36$
2. Видим, что $OD = \frac{36}{18} = 2 \Rightarrow OD$ в 2 раза меньше стороны AO. По свойству: сторона лежащая против $\angle$ в $30°$ равна половине гипотенузы $\Rightarrow \angle 1 = 30°$
3. $\angle 1 = \angle 2 = 30° \Rightarrow \angle 1 + \angle 2 = 60° \Rightarrow \angle A = 60°$
4. Так как в ромбе все стороны и углы равны, то получаем $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 60°$

Упражнение 23.5. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 18, а одна из диагоналей ромба равна 72. Найдите углы ромба.

Ответ: $60°$; $120°$; $60°$; $120°$.

задание №23



дано:
BD и AC - диагонали
OH - 18
AC = 72
найти: все углы

реш-е

$\frac{AC}{2} = AC$

$\frac{72}{2} = 36$

рассмотрим $\triangle COH$

$OH = \frac{CO}{2} \Rightarrow \angle 1 = 30$

$\angle 1 = \angle 2$ т.к диагональ $\Rightarrow \angle C = 60$; $\angle B = 120$;

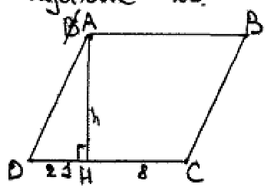
$\angle A = 60$; $\angle D = 120$

От: 60; 120; 60; 120

Упражнение 23.6. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

Задание 23.



Дано:

ABCD - ромб DH = 21 CH = 8

AH - высота делит CD

Найти.

AH-?

Решение

$AB = BC = CD = AD$ $AD = DH + CH = 21+8 = 29$ (по свойству ромба)

рассмотрим $\triangle ADH$, он прямоугольный т.к. AH - высота.

Воспользуемся теоремой пифагора

$AD^2 = DH^2 + AH^2$ $AH^2 = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

$AH^2 = AD^2 - DH^2$

Ответ. AH = 20

Упражнение 23.7. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AP = 21$, а сторона BC в 3 раза меньше стороны AB.

Ответ: 3.

№23 Дано:

△ABC

окружность

окр-ть пересекает AB в т. K

окр-ть пересекает AC в т. P

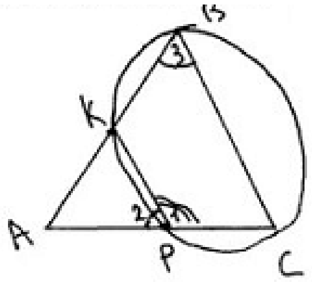
ок-рь проходит через т. B и т. C

AP = 9

BC в 3 раза < AB

Найти:

KP - ?



↓ смотреть лист 3

1) Рассмотрим четырехугольник KBCP, он вписанный => сумма противоположных углов = 180° $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ $\angle 3 = 180° - \angle 1$. 2) Рассмотрим $\angle 1$ и $\angle 2$ - смежные => сумма углов = 180° $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ $\angle 2 = 180 - \angle 1$

$\angle 3 \overset{\text{тоже равен}}{=} 180° - \angle 1 \Rightarrow \angle 3 = \angle 2$ 3) Рассмотрим △APK и △ABC

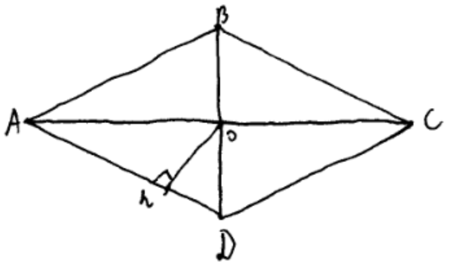
1) $\angle A$ - общий 2) $\angle 3 = \angle 2 \Rightarrow$ △APK ~ △ABC по двум равным углам. 4) Из подобия следует отношение сходственных сторон $\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{AB}$ т.к BC в 3 раза меньше AB возьмем BC = 3 AB = 1 $\frac{x}{3} = \frac{9}{1}$ $x = \frac{9 \cdot 3}{1} = 27$

Ответ: KP = 27

Упражнение 23.8. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 18, а одна из диагоналей ромба равна 72. Найдите углы ромба.

Ответ: $60°$; $120°$; $60°$; $120°$.

№ 23



Дано: $ABCD$ – ромб O – точка пересечения диагоналей Oh – высота (по свойству ромба) $= 18$

$AC = 72$

Найти: $\angle A$ – ?; $\angle B$ – ?; $\angle C$ – ?; $\angle D$ – ?

Решение: $AO = \frac{AC}{2}$ $AO = \frac{72}{2} = 36$ Рассмотрим Δ – AOh; AO – гипотенуза

Т.к. лежит напротив угла в $90°$ $Oh = \frac{AO}{2} \Rightarrow \angle OAh = 30°$ (по свойству прямоугольного Δ) $\angle A = 2 \cdot \angle OAh = 30 \cdot 2 = 60°$ $\angle A = 60° = \angle C$ (по свойству ромба) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$ $\angle B = \angle D$ – обозначим за x

$60° + 60° + x + x = 360°$

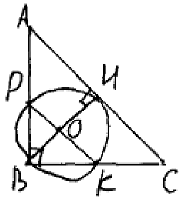
$120° + 2x = 360°$ $2x = 240°$ $(:2)$ $x = 120°$

$\angle B = \angle D = x = 120°$ Ответ: $\angle A = 60°$; $\angle B = 120°$; $\angle C = 60°$; $\angle D = 120°$

Упражнение 23.9. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 13$.

Ответ: 13.

№23



Дано: ABC-прямоугольный Δ; BH-высота; $PK=13$
$AB \cap P$; $CB \cap K$

Найти: BH

Решение:

точка $O \cap BH$ и PK
BH является диаметром окружности $\Rightarrow$ PK диаметр

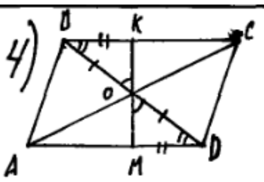
Значит $PK = BK = 13$

Ответ: 13

Задание 24

Упражнение 24.1. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

24)



Дано: $ABCD$ - параллелограмм

Док-ть: $BK = MD$

Док-во:

$\angle BOK = \angle MOD$ (по свойству вертик. углов)

$BO = OD$ (по свойству диагоналей параллелограмма)

$\triangle AOD = \triangle BOC$ - по I признаку равенства треуг. ($\angle AOD = \angle BOC$, ~~вертик. уг~~ $AO = OC$, $BO = OD$) $\Rightarrow$

$\angle ADO = \angle CBO$

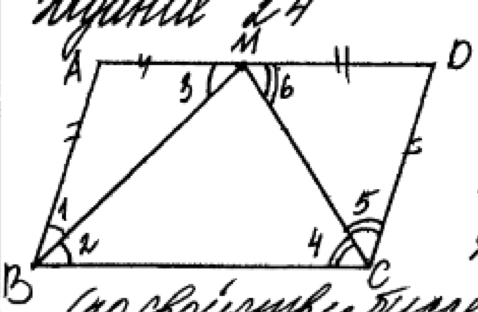
$\triangle BOK = \triangle DOM$ - по II признаку равенства треуг. ($\angle BOK = \angle MOD$, $\angle ADO = \angle CBO$, $BO = OD$) $\Rightarrow$

$BK = DM$

Ответ: Что и требовалось доказать.

Упражнение 24.2. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

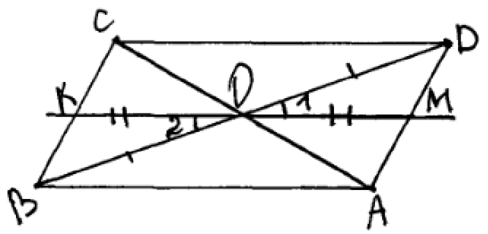
Задание 24



Дано: ABCD-параллелограмм
~~M-середина AD~~; BM и CM -биссектрисы.
Доказать: M-середина AD
Док-во: ∠ABM=∠MBC и ∠MCB=∠DCM (по свойству биссектрис); ∠2=∠3 и ∠4=∠6 как накрест лежащие при AD||BC. → △BAM и △MDC равнобедренные (по св-ву углов) → AM=MD ч.т.д.

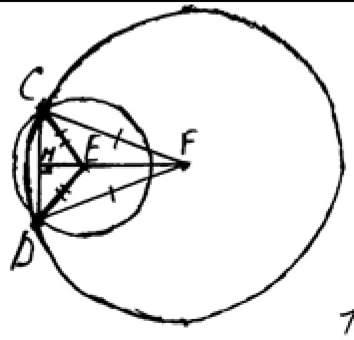
Упражнение 24.3. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

24.



Рассмотрим △KBO и △ODM.
В них: 1. ∠1=∠2, т.к. вертикальные.
2. BO=OD, т.к. O - середина диагонали BD.
3. KO=OM, т.к. O - середина KM - средней линии.
Тогда △KBO ∽ △OBM по 2-ум сторонам и углу между ними.
Следовательно если BO = OD, KO = OM, то и KB = DM.
Что и требовалось доказать.

Упражнение 24.4. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, приём точки E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.



Дано: C и D – точки пересечения окружностей;
E и F по одну сторону от CD.
Док-ть: $CD \perp EF$

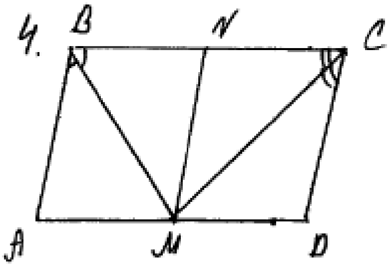
Док-во:

1) Проведём радиусы CE; ED; CF и FD.
2) Рассмотрим тр-к CDE. Радиусы равны => => тр-к равнобедренный.
3) Проведём медиану EM. В равнобедренном тр-нике медиана, проведённая к основанию явл. высотой => EM – высота.
4) Рассмотрим тр-к CFD. Радиусы равны => => тр-к равнобедренный => медиана, проведённая к основанию явл. высотой. => => FM – медиана и высота.
5) Высоты EM и FM лежат на одной прямой с отрезком FE; Основание CD лежит на прямой CD.
6) Так как высоты тр-ников $\perp$ к основанию CD и лежат на одной прямой с EF, то $EF \perp CD$.

Ч.Т.Д.

Упражнение 24.5. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

24.



Дано:

$ABCD$ - параллелограмм; BM - биссектриса $\angle B$; CM - биссектриса $\angle C$; $BM \cap CM = M$; $M \in AD$

Доказать:

$AM = MD$

Доказательство:

1. Д.п. $MN \parallel AB \parallel CD$ ($ABCD$ - параллелограмм)

$AB \parallel MN$ (по Д.п.)

$AM \parallel BN$ ($ABCD$ - параллелограмм, то $AD \parallel BC$)

$ABNM$ - параллелограмм, то $AB = MN$; $AM = BN$

$CD \parallel MN$ (по Д.п.)

$MD \parallel CN$ ($ABCD$ - параллелограмм, то $AD \parallel BC$)

$MNCD$ - параллелограмм, то $CD = MN$; $NC = MD$

2. Рассмотрим параллелограммы $ABNM$ и $MNCD$

$AB = CD = MN$

MN - общая

$\angle BNM = \angle NCD$ (соот.)

$\angle A = \angle NMD$ (соот.)

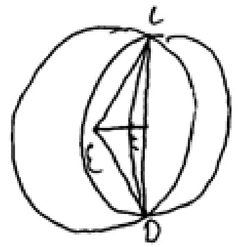
$\angle AMN = \angle MDC$ (соот.)

$\angle ABN = \angle MNC$ (соот.)

$ABNM = MNCD$, то $AM = MD = BN = NC \rightarrow$

$\rightarrow AM = MD$

Упражнение 24.6. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, приём точки E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.



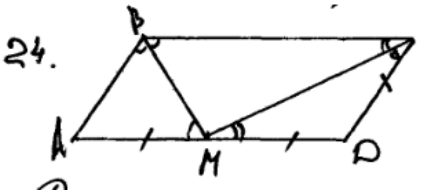
Дано: окр. с ц. E, окр. с ц. F
окр. пересекаются в C и D;
Док-ть: $CD \perp EF$

Док-во.

1). Проведем радиусы EC, ED, FC, FD
EC = ED (радиусы) => E равноудалено от C и D
FC = FD (радиусы) => F равноудалена от C и D
=> EF - сер. перпендикуляр к CD => $EF \perp CD$ ч.т.д.

Упражнение 24.7. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

24.



Рассмотрим △MDC:
1) ∠MCB = ∠DMC (т.к. BC∥AD и MC-секущая) - накрестлежащие углы =>
∠DMC = ∠DCM => △MDC - равнобедренный треугольник

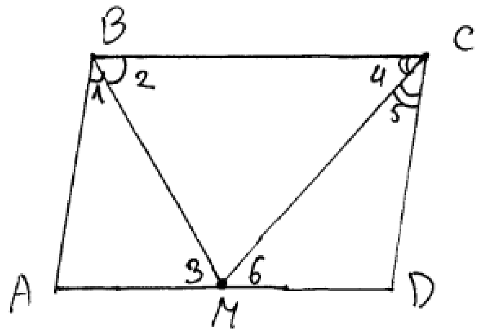
2) Рассмотрим △ABM:
∠CBM = ∠AMB (т.к. AD∥BC и секущая BM) - накрестлежащие углы =>
∠AMB = ∠MBA => △ABM - равнобедренный треугольник

3) ∠A = ∠C | по св-ву параллелограмма =>
∠B = ∠D |

AD = AM + MD => AM = MD => M - середина AD

ч.т.д.

Упражнение 24.8. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.



№ 24

Дано:

$ABCD$ - параллелограмм.

BM, CM - биссектрисы; т. $M \in AD$

Доказать, что M — середина AD.

Доказательство:

$\angle 1 = \angle 2$, т.к BM - биссектриса

$\angle 2 = \angle 3$, т.к они накрест лежащие

Если $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 2 = \angle 3$, то $\angle 1 = \angle 3$.

Значит $\triangle ABM$ - равнобедренный. Тогда $AB = AM$

Рассмотрим $\triangle MCD$.

$\angle 4 = \angle 5$, т.к CM - биссектрисса

$\angle 4 = \angle 6$, т.к они накрест лежащие.

Если $\angle 4 = \angle 5$, а $\angle 4 = \angle 6$, то $\angle 5 = \angle 6$

Значит $\triangle MCD$ - равнобедренный. Тогда $CD = MD$

$AB = CD$, т.к $ABCD$ - параллелограмм.

Если $AB = AM$, а $CD = MD$, то $AM = MD$

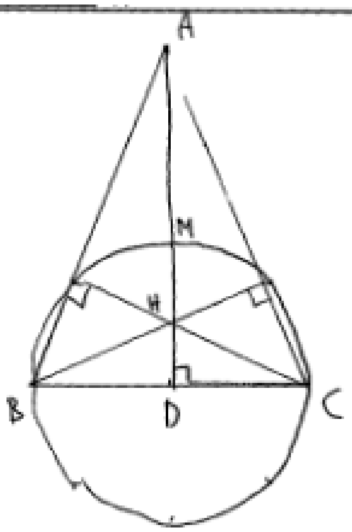
Значит т. M - середина AD.

Задание 25

Упражнение 25.1. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

23. Дано: $AD = 9$ $MD = 3$ $AH - ?$



1. Сравним $\triangle DHC$ и $\triangle ADC$

$\angle ADC$ – общий.

$\angle DCH = \angle DAC$ (т.к. CH и AD – высоты).

$\Downarrow$

$\triangle HDC \sim \triangle ADC$

2. $DC = MD = 3 \cdot (R)$

3. $\cancel{\frac{HD}{DC}} = \frac{DC}{HD} = \frac{AD}{DC} = \frac{9}{3}$

$\cancel{HD =} \frac{3}{HD} = \frac{9}{3}$

$9\,HD = 9$

$HD = 1$.

4. $HM = 3 - 1 = 2$.

$AM = 9 - 3 = 6$.

$AH = 6 + 2 = 8$ Ответ: 8

Упражнение 25.2. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

№25.

Дано:

ABC - остроуг. Δ

$\omega(O; r)$

BC - диам.; AD - выс

$M \in AD \cap \omega$

$AD = 9$; $MD = 3$

H - т. пересеч. выс. Δ

$AH = ?$

Решение:

$AD = AM + MD \Rightarrow AM = AD - MD = 9 - 3 = 6$

k - коэф. подобия, $k = \frac{MD}{AM} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

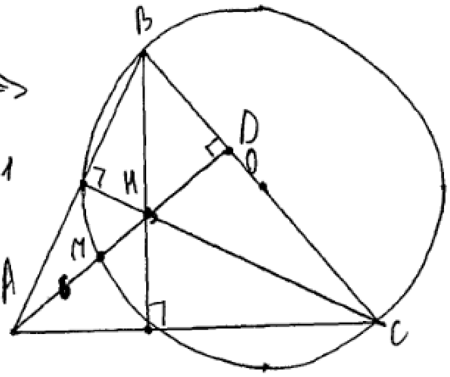
$\frac{MH}{HD} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ т.к. $MD = 3$, $x + 2x = 3 \Rightarrow x = 1$

$MH = 1$

$AH = AM + MH = 6 + 1 = 7$

Ответ: $AH = 7$.

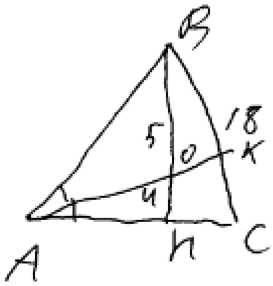
Чертёж:



Упражнение 25.3. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую
из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 18$.

Ответ: 15.

№25



Дано:

$BO : OH = 5 : 4$; $BC = 18$; BH – высота; AK – биссектриса

Найти:

R – ?

Решение:

Биссектриса прямоугольного треугольника делит стороны соответственно с высотой =>

=> $AB : AH = 5 : 4$

$AH = 4x$

$BH = \sqrt{25x^2 - 16x^2} = 3x$

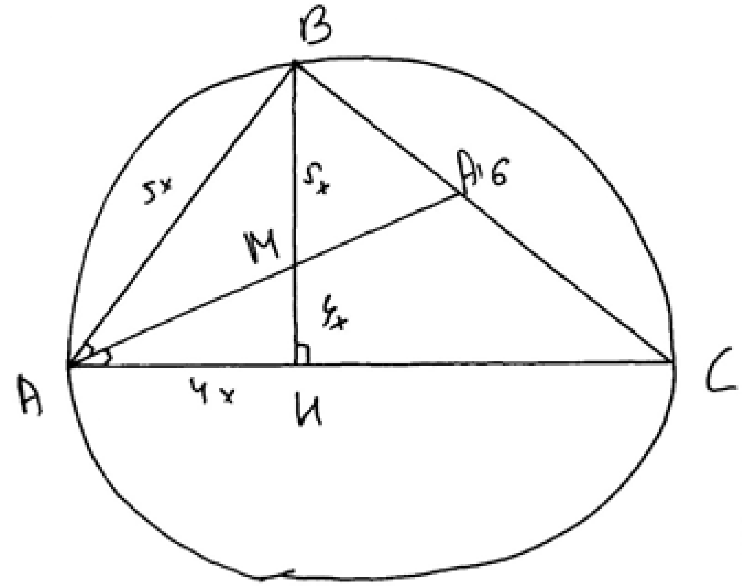
$\sin BAC = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

$2R = \frac{BC}{\sin BAC}$ $\quad$ $R = \frac{\cancel{18}^{3} \cdot 5}{\cancel{2 \cdot 3}} = 15$

Ответ: $R = 15$

Упражнение 25.4. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 6$.

Ответ: 5.



Дано:

Окр$(O;R)$

$\triangle ABC$

$BC = 6$

AA_1 - биссектриса

$BИ$ - высота.

$BM:MИ = 5:4$.

Найти:

R

Решение:

$$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\sin A} = \frac{3}{\sin A}.$$

1. Рассмотрим $\triangle ABИ$:

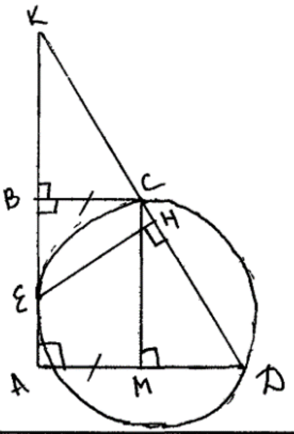
$\sin A = \frac{BИ}{AB} = \frac{9x}{AB} = \frac{9\cancel{x}}{5\cancel{x}} = 1{,}8$ (т.к. AM делит основание, в том же отношении, что и боковые стороны) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{3}{\sin A} = \frac{3}{1{,}8} = 1\frac{2}{3}$$

Ответ: $R = 1\frac{2}{3}$.

Упражнение 25.5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.



№ 25.

Дано: $ABCD$ – трап.
$AB \perp BC$
окр. т. C, D, E – на окр., т. $E \in AB$
$AD = 6$
$BC = 5$

Найти: EH – ?

см. лист 4

1. продлим DC и AB, т. пересеч. продолж. сторон обозначим т. K
2. из т. C проведём высоту к стороне AD, обозначим её CM.
3. т.к. $ABCD$ – трап. $\Rightarrow BC \parallel AM$, по усл. $AB \perp BC$, выс. $CM \perp BC$, $CM \perp AD$

$\Rightarrow CM \parallel AB$, $\angle ABC = 90°$, $\angle BAM = 90°$ (по св-ву трап.), $\angle CMA = 90°$, $\angle BCM = 90°$ (CM – выс., $CM \perp BC$, $CM \perp AD$)

4. $\left.\begin{array}{l} CM \parallel AB \text{ (п.3)} \\ BC \parallel AM \text{ (п.3)} \\ \text{все } \angle \text{ в четыр. } ABCM = 90° \text{ (п.3)} \end{array}\right\} \Rightarrow ABCM$ – прямоуг. $\Downarrow$ $BC = AM = 5$

5. $AD = AM + MD \Rightarrow MD = AD - AM = AD - BC = 6 - 5 = 1$

6. рассмотрим $\triangle KBC$ и $\triangle CMD$:
   - $\angle KBC = \angle CMD = 90°$
   - при $BC \parallel AD$ ($ABCD$ – трап.) KD – секущ., н/ накрест-лежащие $\angle =$ $\Rightarrow \angle KCB = \angle CDM$

$\Rightarrow \triangle KBC \sim \triangle CMD$ (по 2-м $\angle$) $\Downarrow$ $\dfrac{BC}{MD} = \dfrac{KC}{CD} \Rightarrow \dfrac{5}{1} = \dfrac{KC}{CD} \Rightarrow KC = 5CD$

7. по т. о квадрате касательной:

$EK^2 = KD \cdot KC$, $KD = KC + CD \Rightarrow$
$EK^2 = \cancel{KD} = (KC + CD) \cdot KC$

т.к. $KC = 5CD \Rightarrow EK^2 = 6CD \cdot CD \Rightarrow EK = \sqrt{6CD^2} = CD \cdot \sqrt{6}$

8. в четыр. $AEHD$ $\angle EAD = \angle EHD = 90°$, по т. о сумме $\angle$ в четыр.:

$$\underbrace{\angle EAD + \angle EHD}_{180°} + \angle HDA + \angle AEH = 360° \Rightarrow \angle HDA + \angle AEH = 180°$$

9. $\angle KEH$ и $\angle AEH$ — смежные $\Rightarrow$ по св-ву $\angle KEH + \angle AEH = 180°$

10. $\left.\begin{array}{l} \angle KEH + AEH = 180° \text{ (п. 9)} \\ \angle HDA + \angle AEH = 180° \text{ (п. 8)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle KEH = \angle HDA$

11. рассм. ΔKHE и ΔCMD:

$\left.\begin{array}{l} \cdot \angle KHE = \angle CMD = 90° \\ \cdot \angle KEH = \angle HDA \text{ (п. 10)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta KHE \sim \Delta CMD$ (по 2м $\angle$) $\Downarrow$ $\dfrac{EH}{MD} = \dfrac{EK}{CD}$ $EH = \dfrac{MD \cdot EK}{CD}$

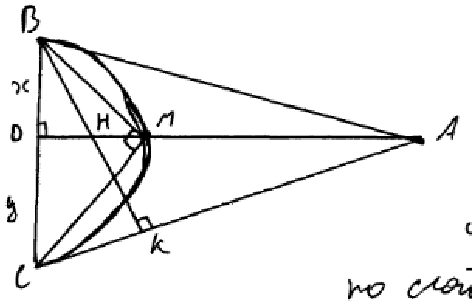
$EH = \dfrac{1 \cdot EK}{CD} = \dfrac{\cancel{CD} \cdot \sqrt{6}}{\cancel{CD}}$ (п 7) $= \sqrt{6}$

Ответ: $\sqrt{6}$

Упражнение 25.6. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

№25



BK - высота в ΔABC

достроим ΔCBM

$\angle BMC = 90°$ (лежит на диаметре)

MD - высота в ΔCBM

Пусть $BD = x$, а $DC = y$.

по свойству прямоугольного треугольника:

$MD^2 = xy$

$xy = 9$

$\left.\begin{array}{l} \Delta DBH \sim \Delta KBC \ (\angle CBK \text{ — общий}, \angle CKB = \angle HDB = 90°) \\ \Delta KBC \sim \Delta DAC \ (\angle DAC \text{ — общий}, \angle CDA = \angle CKB = 90°) \end{array}\right| \Rightarrow \Delta DBH \sim \Delta DAC$

$\dfrac{DH}{DB} = \dfrac{DC}{DA}$ $\dfrac{DH}{x} = \dfrac{y}{9}$ $DH = \dfrac{xy}{9} = \dfrac{9}{9} = 1$

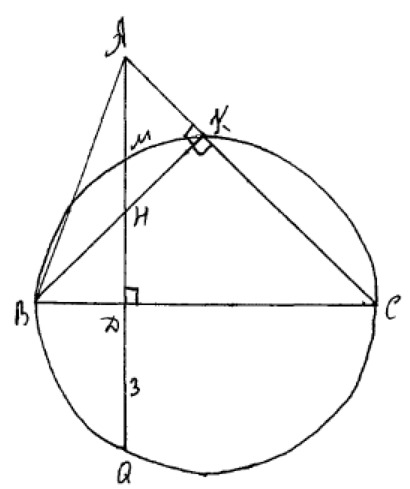
$AH = AD - DH = 9 - 1 = 8$

Ответ: 8

Упражнение 25.7. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

25



Дано: $\triangle ABC$
BC – диаметр окружности
окружность пересекает
AD в точке M
$AD \perp BC$
$BK \perp AC$
$AD \cap BK = H$
$AD = 9$
$MD = 3$

Найти: AH

Решение

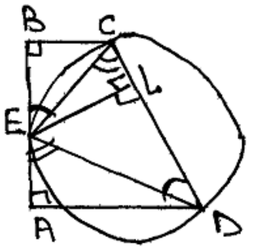
$\angle BKC$ опирается на диаметр, значит $\angle BKC = 90° \Rightarrow$ $\triangle BKC$ – прямоугольный.
Продолжу AD, точкой Q обозначу точку пересечения с окружностью $MD = DQ = 3$
Произведение секущей на её внешнюю часть равно произведению другой секущей на ее внешнюю часть, значит $AQ \cdot AM = AC \cdot AK = (AD + DQ)(AD - MD) = (9+3)(9-3) = 12 \cdot 6 = 72$
$\triangle AHK \sim \triangle ADC$ по двум углам ($\angle A$ – общий, $\angle AKH = \angle ADC = 90°$), значит $\frac{AH}{AC} = \frac{AK}{AD} \Rightarrow AH = \frac{AC \cdot AK}{AD} = \frac{72}{9} = 8$

Ответ: 8

Упражнение 25.8. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

25



Дано:

ABCD-трап; $AB \perp BC$; ω-окружность; [ω(O; R)]; $C \in \omega$; $D \in \omega$;

$E \in \omega$; $E \in AB$;

$EL \perp CD$; $AD = 6$; $BC = 5$

Найти: EL

Решение:

1) Проведём хорды EC и ED

2) Т.к. $AB \perp BC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$;

3) Т.к. ABCD-трап. (по усл.) $\Rightarrow BC \parallel AD$ (по ~~св-ву~~ определению т.к. BC и AD-основан.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CBA = 90^\circ$ (как односторонние при $BC \parallel AD$ и сек. AB)

4) Рас-м $\triangle EBC$ и $\triangle ELD$

$\angle ELD = \angle EBC = 90^\circ$

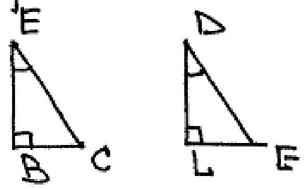
$\angle BEC = \angle ECD$ (по теореме об угле между касательной и хордой) $\Rightarrow$

СМ. ЛИСТ 5

$\Rightarrow \triangle EBC \sim \triangle ELD$ (по 2 углам)

5) $\triangle EBC \sim \triangle ELD$ (см. п.4) $\Rightarrow$

$$\frac{EB}{DL} = \frac{EC}{DE} = \frac{BC}{LE}$$



6) Рас-м $\triangle AED$ и $\triangle CEL$

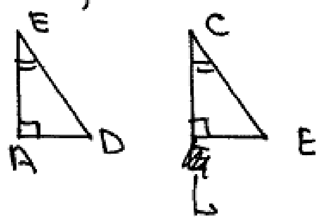
$\cancel{\angle CE}$ $\angle CLE = \angle EAD = 90^\circ$

$\angle ECL = \angle AED$ (по теореме об угле между касательной и хордой) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ECL$ (по 2 углам)

7) $\triangle AED \sim \triangle ECL$ (см. п.6) $\Rightarrow$

$$\frac{CL}{AE} = \frac{LE}{AD} = \frac{EC}{ED}$$



8) $\frac{EC}{ED} = \frac{LE}{AD}$ (см. п.7) ; $\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{LE}$ (см. п.5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\frac{BC}{LE} = \frac{LE}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = LE^2$

$LE^2 = 5 \cdot 6 = 30 \Rightarrow LE = \sqrt{30}$

Ответ: $\sqrt{30}$

Комментарии и оценивание

20.1. Допущена ошибка при определении знаков на интервалах. Оценка 0 баллов.
20.2. Рассуждения синтетические, необычные, содержат погрешности, однако верные и понятные; ответ верный. Оценка 2 балла.
20.3. Все этапы решения присутствуют. Три корня найдены верно. Отсутствие ответа не влияет на оценивание. Оценка 2 балла.
20.4. Решение полное и верное. Оценка 2 балла.
20.5. Во второй и третьей строках записи лишены смысла и не связаны друг с другом и с условием. Оценка 0 баллов.
20.6. Не учтено ограничение $6 - x \geq 0$. Оценка 0 баллов.
20.7. Некорректная запись при нахождении дискриминанта, объединяющая в одну последовательность равенств . Этот недостаток, по сути, связан с очевидно лишним знаком равенства, при этом, ход решения в этой части верен и понятен. При нахождении корня имеется арифметическая ошибка – потерян знак. Оценка 1 балл.
20.8. Решение полное и верное. Ответ верный. Оценка 2 балла.
20.9. Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ. Оценка 2 балла.
20.10. Преобразования выполнены верно. Арифметическая ошибка при нахождении корня. Оценка 1 балл.
20.11. Имеются признаки, характерные для несамостоятельного выполнения: строки решения, начиная с четвертой, не связаны между собой. Несколько раз «потеряны» знаки, несоответствия в записях и вычислительная ошибка в конце. Оценка 0 баллов.
20.12. Имеется арифметическая ошибка: вместо свободного члена -6, получился свободный член -2. В результате не найдены два корня из трех. Ошибка повлияла на ход решения. Оценка 0 баллов.
20.13. Отрицательный корень уравнения $x^2 - 1 = 0$ не найден. Оценка 0 баллов.
20.14. Множественные ошибки при разложении на множители многочлена, стоящего в левой части уравнения. Оценка 0 баллов.
21.1. Ответ найден подбором. Отсутствие других решений не обосновано. Критерий на 1 балл неприменим, так как составленное равенство неверно. Оценка 0 баллов.
21.2. Ход решения понятный, ответ верный. Оценка 2 балла.
21.3. Логическая ошибка — участник экзамена перепутал производительность труда и время. Оценка 0 баллов.
21.4. Ход решения понятный, ответ верный. Однако допущена арифметическая ошибка при вычислении побочного корня. Оценка 1 балл.
21.5. Вместо «224 км» написал «240 км». Относительно значения «240 км» задача решена верно. Но решена другая задача. Оценка 0 баллов.
21.6. Верно составлено и решено уравнение, но не найдена искомая скорость. Оценка 1 балл.
21.7. Уравнение составлено верно, но при его решении допущена ошибка при приведении алгебраических дробей к общему знаменателю. Оценка 1 балл.
21.8. Ответ найден подбором. Отсутствие других решений не обосновано. Оценка 0 баллов.

21.9. Верно составлено уравнение и найдены его корни. Однако, в интерпретации модели допущена грубая ошибка. Оценка 1 балл.
22.1. График построен верно, верно найдены значения m. Оценка 2 балла.
22.2. График построен верно, верно найдены значение m. Оценка 2 балла.
22.3. Неверно построена правая часть графика. Оценка 0 баллов.
22.4. График построен неверно, так как при раскрытии модуля не рассмотрен случай, когда $x+2<0$. Оценка 0 баллов.
22.5. График построен верно, верно найдены 2 из 3 значений *k.* Оценка 1 балл.
22.6. График изображён, но способ его построения не ясен. Кроме того, в таблице вместо точки $(-3;-1)$ стоит точка $(-3;1)$. Значения параметра найдены неверно. Оценка 0 баллов.
22.7. Построение графика по сути, не выполнено, в частности, не указано ни одно числовое значение на осях. Верно найдено одно значение m из двух. Оценка 0 баллов.
23.1. Решение содержит существенную геометрическую ошибку: неверно применено свойство прямоугольного треугольника. Оценка 0 баллов.
23.2. Решение лаконичное, но полное и верное. Оценка 2 балла.
23.3. Доказано подобие треугольников *DOC* и *AHC*, верно составлена пропорция, из неё верно найдена диагональ *AC*. Но в записи теоремы Пифагора для треугольника *AHC* допущена геометрическая ошибка. Оценка 0 баллов.
23.4. Решение содержит грубые ошибки: в определении расстояния от точки до прямой и в применении свойств ромба. Оценка: 0 баллов.
23.5. Задача решена верно. Имеется недочёт – отсутствие значка градус. Оценка 2 балла.
23.6. Ход решения понятен, все шаги выполнены правильно. Наличие квадрата в записи $AH^2=\sqrt{29^2-21^2}$ следует считать оплошностью, не влияющей на правильность решения и оценку. Оценка 2 балла.
23.7. Ход решения верный, все шаги выполнены правильно, но в конце допущена существенная ошибка: предположение $BC=3$, $AB=1$. Оценка 0 баллов.
23.8. Ход решения верный, все шаги выполнены правильно. Оценка 2 балла.
23.9. Не доказано, что отрезок *PK* является диаметром окружности. Оценка 0 баллов.
24.1. Доказательство верное, хотя и не очень рациональное. Все шаги обоснованы. Оценка 2 балла.
24.2. В доказательстве пропущены ключевые моменты доказательства. Оценка 0 баллов.
24.3. В работе вместо предложенной задачи рассматривается частный случай, когда точки K и M являются серединами сторон параллелограмма. Отметка 0 баллов.
24.4. Ход рассуждений понятен. В целом, доказательство верное. Оценка 2 балла.
24.5. Доказательство опирается на неверное утверждение: равенство двух параллелограммов по четырём углам и одной стороне. Оценка 0 баллов.
24.6. Доказательство верное, все шаги обоснованы. Оценка 2 балла.
24.7. Отсутствует логическая связность решения. Оценка 0 баллов.
24.8. Доказательство верное и полное. Оценка 2 балла.

25.1. Решение опирается на то, что точка D совпадает с центром окружности, что, вообще говоря, не верно. Оценка 0 баллов.
25.2. Решение опирается на то, что $MD : AM = MH : HD$, что неверно. Оценка 0 баллов.
25.3. В начале решения корявая попытка сформулировать свойство биссектрисы треугольника. Тем не менее, решение верное, полное и понятное. Отметка 2 балла.
25.4. Логическая ошибка, неверно применено свойство биссектрисы. Оценка 0 баллов.
25.5. Ход решения верный, все шаги присутствуют, допущена ошибка: при применении свойства касательной вместо $5CD$ подставлено CD. Отсюда неверный ответ. Оценка 1 балл.
25.5. Решение верное. Оценка 2 балла.
25.7. Ход решения верный, все шаги присутствуют, но не обосновано, что точка K лежит на окружности. Оценка 1 балл.
25.8. Ход решения верный, все шаги присутствуют, имеющееся неверное обозначение угла в п. 4 следует считать несущественной оплошностью. Оценка 2 балла.

ЧАСТЬ 4 Материалы по оценке решений заданий с развернутым ответом для зачета или квалификационной работы

Опираясь на приведенные критерии оценивания, оцените решения заданий 20 – 25 в предложенных вариантах.

Критерии оценивания выполнения задания 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущены вычислительные ошибки, с их учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Критерии оценивания выполнения задания 21

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Критерии оценивания выполнения задания 22

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Критерии оценивания выполнения задания 23

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Критерии оценивания выполнения задания 24

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит несущественные недостатки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Критерии оценивания выполнения задания 25

Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Вариант 1

Таблица оценивания

Задание	20	21	22	23	24	25
Оценка						

20. Решите уравнение $x^3+3x^2-x-3=0$.

Ответ: -3; -1; 1.

№20

$x^3+3x^2-x-3=0$

$(x^3+3x^2)+(-x-3)=0$

$x^2(x+3)+(x+3)=0$

$x^2=1$

$x=1$ или $x=-1$

Ответ; -1; 1

21. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

Ответ: 20 км/ч.

21.

	S	v	t
$A \to B$	60	x	$\frac{60}{x}$
$B - A$	60	$x+10$	$\frac{60}{x+10}$

остановка на 3 ч

$$\frac{60}{x} - \frac{60}{x+10} = 3$$

$$\frac{60}{x}^{\,x+10} - \frac{60}{x+10}^{\,x} - 3^{\,x(x+10)} = 0$$

$$\frac{60(x+10) - 60x - 3x^2 - 30x}{x(x+10)}$$

$$\cancel{60x} + 600 = \cancel{60x} - 3x^2 - 30x$$

$$-3x^2 - 30x + 600$$

$$-x^2 - 10x + 200 = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot (-1) \cdot 200 = 900\ (30)$$

$$x_{1;2} = \frac{10 \pm 30}{-2} \qquad x_1 = \frac{40}{-2} = -20 \text{ — не подходит}$$

$$x_2 = \frac{-20}{-2} = 10$$

Ответ: 10 км/ч

22. Постройте график функции

$$y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: $m = -1$; $m = 0$.

№22

$y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2$, $x+2=0$

$x = -2$

1. Если $x \geq -2$

$x^2 + 3x - 3(x+2) + 2 = x^2 + \cancel{3x} - \cancel{3x} - 6 + 2 = x^2 - 4$

$y = x^2 - 4$ график - парабола, ветви - вверх, вершина $(0;-4)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	5	0	-3	-4	-3	0	5

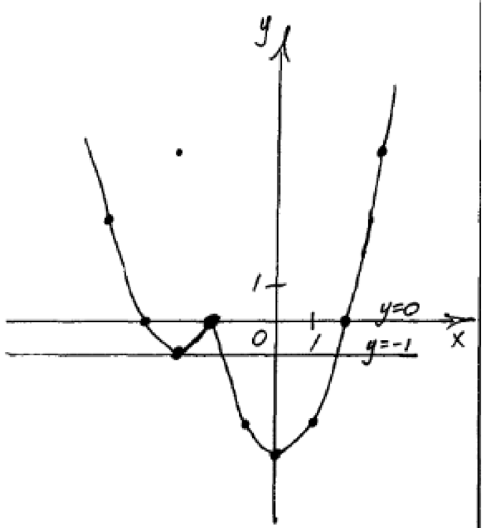
2. Если $x < -2$

$x^2 + 3x + 3(x+2) + 2 = x^2 + 3x + 3x + 6 + 2 = x^2 + 6x + 8$

$y = x^2 + 6x + 8$ график - парабола ветви - вверх.

$x_в = -\frac{6}{2} = -3$ $y_в = -1$

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	3	0	-1	0	3



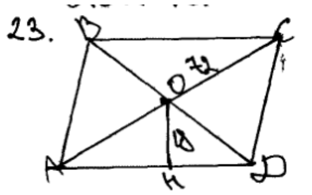
Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно 3 общие точки, при $m=-1$ и $m=0$

Ответ: -1; 0.

23. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 18, а одна из диагоналей ромба равна 72. Найдите углы ромба.

Ответ: $60°$; $120°$; $60°$; $120°$.

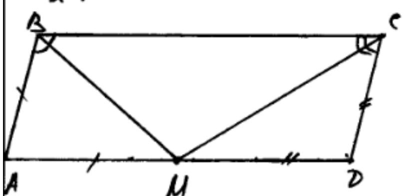
23.



Дано: ABCD – ромб. AC и BD – диагонали ромба.
O – т. пересечения диагоналей. OH = 18; AC = 72.
Найти: ∠A; ∠B; ∠C; ∠D.
Решение: Рассмотрим ромб ABCD.
AO = AC : 2 = 72 : 2 = 36. (диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам). Рассмотрим △AOH. Найдем ∠OAH.
∠OAH = 30° (катет, лежащий напротив угла в 30° равен половине гипотенузы)
AO : 2 = 36 : 2 = 18 т.е. OH половина AO.
Найдем ∠A; ∠B; ∠C; ∠D.
∠A = 30° + 30° = 60° (диагонали ромба делят углы пополам).
∠B = 180 – ∠A = 180 – 60° = 120° (свойства прил. углов).
∠A = ∠C = 60°; ∠B = ∠D = 120° (противолежащие углы ромба равны).
Ответ: 60; 60; 120; 120.

24. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

№ 24



BM и CM – биссектрисы

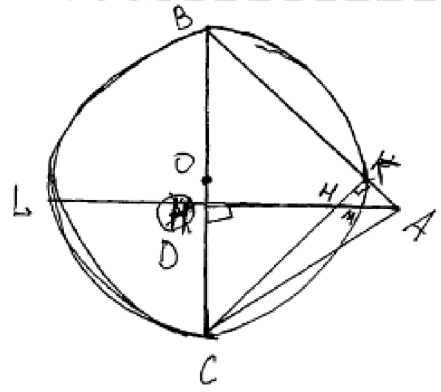
Док-ать: M – середина AD

BA = AM (т.к. BM – биссектриса)
CD = DM (т.к. CM – биссектриса)
BA = CD (т.к. параллелограмм)
⇓
AM = MD => M – середина AD.

25. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

№25



Дано: окр$(O; OB)$; ΔABC; ~~В~~ BC-диам; AD - высота; $AD = 9$; $AD \cap$ окр $=$ т. M; $MA = 3$; $\angle CDA = 90^\circ$; CK - высота; $CK \cap AD =$ т. H;

Найти: $AH = ?$

Решение:

1) Продлим AD до $\cap$ с окр $=$ т. L; AL - сек; AB-сек

$ML = MD + DL$; $DL = DM$ (Проведем $OL = OM = R \Rightarrow \Delta OLM$ - р/б $\Rightarrow$ $= OD$ - выс., мед., бис-са $\Rightarrow LD = DM$)

$ML = MD + MD = 9 - 3 + 9 - 3 = 12$; $AL = ML + MA = 12 + 3 = 15$

2) по теор о сек: $AM \cdot AL = AK \cdot AB$

3) $\Delta AKH \sim \Delta ADB$ ($\angle BAD = \angle MAK$ - общий; $\angle HKA = \angle BDA = 90^\circ$)

$$\frac{AK}{AD} = \frac{AH}{AB} = \frac{KH}{DB}$$

4) из п 3 $AK \cdot AB = AH \cdot AD$

5) п 2 + п 4 $= \left.\begin{array}{l} AK \cdot AB = AH \cdot AD \\ AK \cdot AB = AM \cdot AL \end{array}\right\} \Rightarrow AH \cdot AD = AM \cdot AL \Rightarrow$

$$= AH = \frac{AM \cdot AL}{AD} = \frac{3 \cdot 15}{9} = \frac{45}{9} = 5$$

Ответ: 5

Вариант 2

Таблица оценивания

Задание	20	21	22	23	24	25
Оценка						

20. Решите уравнение $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$.

Ответ: Ответ: -3; -1; 1.

задние 20.

$x^3 + 3x - x - 3 = 0$

$x^2(x+3) - 1(x+3) = 0$

$x^2 - 1 = 0$ $x + 3 = 0$

$x^2 = 1$ $x = -3$

$x = \pm 1$

21. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

Ответ: 20 км/ч.

№21

	v км/ч	t (ч	S (км
A	$x+10$	$\frac{60}{x+10}$	60
B	x	$\frac{60}{x}$	60

$t_1 = t_2$

3ч = 180 мин

$\frac{60^{(10}}{x} + \frac{60}{x+10} = \frac{180}{1}$

$600 + 60 = 180(x+10)$

$660 = 180x + 1800$

$180x = 1800 - 660$

$180x = 1140$

$x = \frac{1140}{180} \approx 6{,}33 = 6$

$A = 6 + 10 = 16$ км/ч

Ответ. 16 км/ч

22. Постройте график функции

$$y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: $m = -1$; $m = 0$.

№22

$y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2$

если $x+2 \geq 0$; $x \geq -2$, то

$y = x^2 + 3x - 3\cdot(x+2) + 2$

$y = x^2 + \cancel{3x} - \cancel{3x} - 6 + 2$

$y = x^2 - 4$

$y = x^2$ на 4 вниз

x	0	1	2
y	0	1	4

если $x+2 < 0$; $x < -2$, то

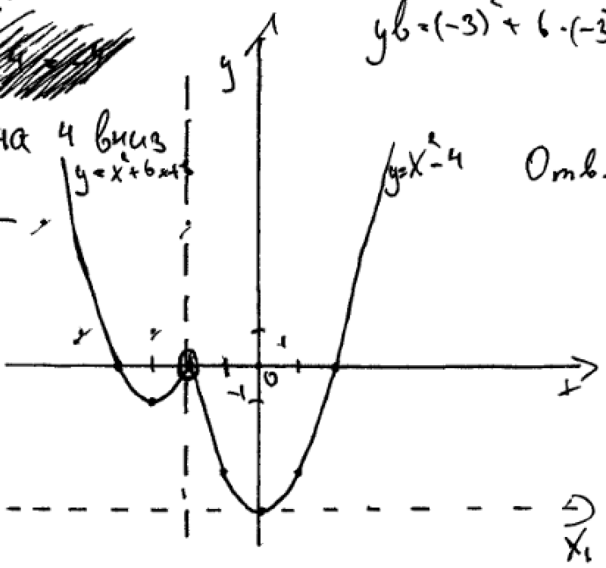
$y = x^2 + 3x - 3\cdot -(x+2) + 2$

$y = x^2 + 3x + 3x + 6 + 2$

$y = x^2 + 6x + 8$

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2} = -3$

$y_в = (-3)^2 + 6\cdot(-3) + 8 = -1$

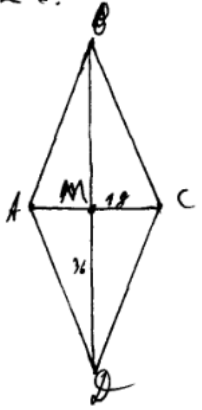


Ответ: $y = [-1; 0)$

23. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 18, а одна из диагоналей ромба равна 72. Найдите углы ромба.

Ответ: $60°$; $120°$; $60°$; $120°$.

23.



$ABCD$ – ромб $\Rightarrow$ все стороны равны

диагонали AC и BD являются биссектрисами.

~~ВМ~~ Диагонали пересекаются в точке

$M \Rightarrow MC = AM$ и $BM = DM$

$BM = DM = 72 : 2 = 36$

BMC – прямоугольный треугольник

$tg \angle B = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$

$tg \angle B$ в ромбе $ABCD = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \Rightarrow \angle B = 45°$

$\Rightarrow \angle D = 45°$

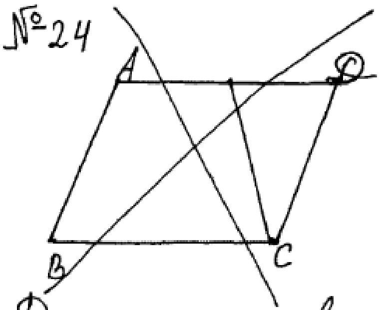
$\angle A = \angle C = (360 - 90) : 2 = 135°$

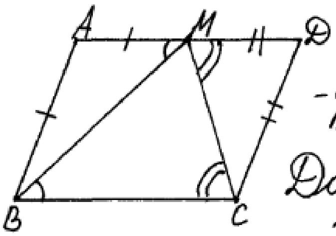
Ответ $\angle A = \angle C = 135°$

$\angle B = \angle D = 45°$

24. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

№24





Дано: ABCD-параллелограмм. BM, CM - биссектрисы

Доказать: M-середина AD

Доказательство:

1. ∠MBC = ∠AMB (т.к. накрест лежащие при AD//BC и секущей BM);

2. Так как BM -биссектриса, то она делит ∠B пополам (на равные углы) =>
=> ∠ABM = ∠MBC, а ∠MBC = ∠AMB (из пункта 1.) => ∠ABM = ∠MBC = ∠AMB.
Из этого можно сделать вывод, что △ABM - равнобедренный (т.к. углы при основании равны). Следовательно AB=AM.

3. Так как CM - биссектриса, то она делит ∠C пополам (на равные углы) =>
=> ∠DCM = ∠MCB, также ∠DMC = ∠MCB (т.к накрест лежащие при AD//BC и секущей CM). ~~Из этого~~ => ∠DCM = DMC, а это значит, что △MDC - равнобедренный (т.к углы при основании равны) => MD=DC.

4. AB=DC (т.к ABCD параллелограмм)
А это значит, что AB=DC=AM=MD (т.к. стороны у △AMB и △MDC - равные).

5 Из пункта 4. можно сделать вывод, что AM=MD (т.е. отрезки равны (находящиеся на одной прямой.) => M - середина AD

ЧТД.

25. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.

25

Дано: ΔABC - остроугольный, BC - диаметр полуокружности, пересекающей высоту AD в M, $AD = 9$, $MD = 3$,

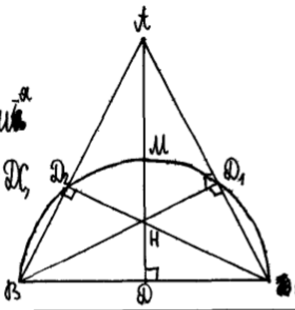
H - точка пересечения высот треугольника ABC

Найти: AH

Решение:

$AD = 9$, $MD = 3$, $AM = 6$

$AM : MD = 6 : 3 = 2 : 1$, т.к. M - точка пересечения ~~биссектрис~~ медиан $\Rightarrow$ AD - медиана и $BD = DC$, а также D - центр окружности и



ΔABC - равнобедренный.

$MD = r = BD = DC = 3$, $BC = 2BD = 6$

Рассмотрим ΔABD.

По теореме Пифагора: $AB = \sqrt{BD^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{9 + 81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

$AB = AC = 3\sqrt{10}$

$\Delta BD_1C \sim \Delta ADC$ ($\angle BD_1C = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle C$ - общий, $\angle D_1BC$ $(180^\circ - \angle C - 90^\circ) =$
$= \angle DAC$ $(180^\circ - \angle C - 90^\circ)$) $\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{D_1C}{DC} \Rightarrow D_1C = \frac{BC \cdot DC}{AC} = \frac{6 \cdot 3}{3\sqrt{10}} = \frac{6}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{10}$

$AD_1 = AC - D_1C = 3\sqrt{10} - \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{30\sqrt{10}}{10} - \frac{6\sqrt{10}}{10} = \frac{24\sqrt{10}}{10}$

$\Delta AD_1H \sim \Delta ADC$ ($\angle AD_1H = \angle ADC = 90^\circ$, $\angle DAC$ - общий, $\angle AHD_1$ $(180^\circ - 90^\circ - \angle DAC) =$
$= \angle ACD$ $(180^\circ - 90^\circ - \angle DAC)$) $\Rightarrow \frac{AD}{AD_1} = \frac{AC}{AH} = \frac{HD_1}{DC}$

$\frac{AD}{AD_1} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow AH = \frac{AD_1 \cdot AC}{AD} = \frac{\frac{24\sqrt{10}}{10} \cdot 3\sqrt{10}}{9} = \frac{24\sqrt{10}}{10} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{24\sqrt{10}\sqrt{10}}{30} =$

$= \frac{240}{30} = 8$

Ответ: $AH = 8$

Вариант 3

Таблица оценивания

Задание	20	21	22	23	24	25
Оценка						

20. Решите уравнение $x^3+3x^2-x-3=0$.

Ответ: Ответ: -3; -1; 1.

20

$x^3+3x^2-x-3=0$

$x^3-x+3x^2-3=0$

$x(x^2-1)+3(x^2-1)=0$

$x+3=0$ или $x^2-1=0$

$x=-3$ $\quad x^2=1$

$x=\sqrt{1}$

$x=1$

Ответ: -3; 1

21. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в A, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из B в A.

Ответ: 20 км/ч.

№21

	S, км	ϑ, км/ч	t, ч
из A в B	60	x	$\frac{60}{x}$
из B в A	60	x+10	$\frac{60}{x+10}$

Т.к. на обратном пути велосипедист сделал остановку на 3ч, то составим уравнение:

$\frac{60}{x} = \frac{60}{x+10} + 3 \quad | : 3$

$\frac{20}{x} = \frac{20}{x+10} + 1 \quad | \cdot x(x+10)$ ОДЗ: $\begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -10 \end{cases}$

$20(x+10) = 20x + x^2 + 10x$

$20x + 200 = x^2 + 30x$

$x^2 + 10x - 200 = 0$

$D = 100 - 4 \cdot (-200) = 900$

$x = \frac{-10-30}{2}$ = не удовлетворяет условию задачи $x = \frac{-10+30}{2} = 10$

Значит, скорость велосипедиста из A в B равна 10 км/ч, тогда скорость из B в A равна $10 + 10 = 20$ (км/ч).

Ответ 20 км/ч

22. Постройте график функции

$$y = x^2 + 3x - 3|x+2| + 2.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком ровно три общие точки.

Ответ: $m = -1$; $m = 0$.

№ 22.

$y = x^2 + 3x - 3\cdot|x+2| + 2$

Найдём нули модуля.

$x + 2 = 0,\quad x = -2$

$-$ $\quad -2 \quad$ $+$ $\quad x$

1) $x \in (-\infty; -2)$

$y = x^2 + 3x - 3(-x-2) + 2,$

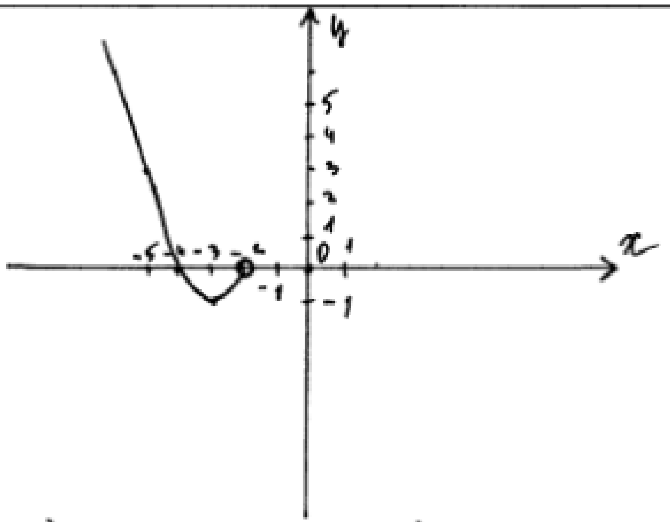
$y = x^2 + 3x + 3x + 6 + 2,\quad y = x^2 + 6x + 8$

$x_в = \frac{-6}{2} = -3,\quad y_в(-3) = -1.\quad (-3; -1)$

Квадратичная функция. График парабола. Ветви смотрят вверх.

x	-5	-4	-3	-2	-6
y	3	0	-1	0	8

$(-2; 0)$ – выколотая точка



2) $x \in [-2\,;\,+\infty)$

$y = x^2 + 3x - 3(x + 2) + 2,$

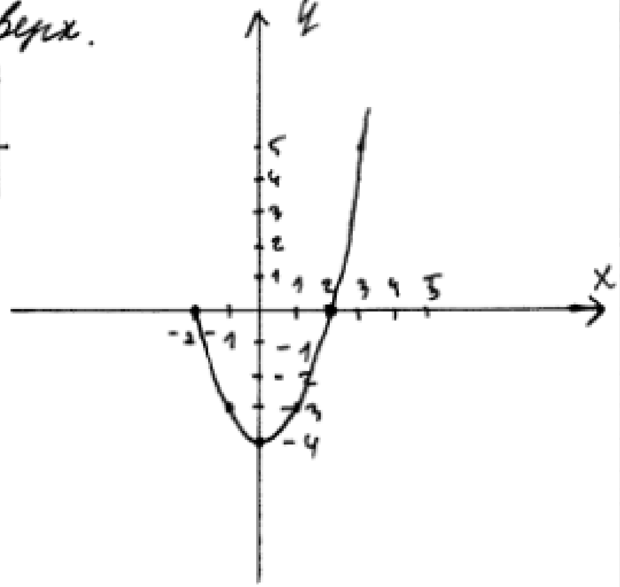
$y = x^2 + 3x - 3x - 6 + 2, \quad y = x^2 - 4$

$x_в = 0, \quad y_в = -4 \quad (0;-4)$

Квадратичная функция. График парабола.
Ветви смотрят вверх.

x	-2	-1	0	1	2	3		
y	0	-3	-4	-3	0	5		

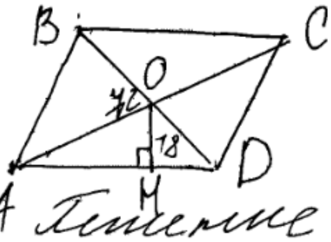
(2; 0) - закрашенная точка



23. Расстояние от точки пересечения диагоналей ромба до одной из его сторон равно 18, а одна из диагоналей ромба равна 72. Найдите углы ромба.

Ответ: $60°$; $120°$; $60°$; $120°$.

23.



Дано:

OH = 18 AC и BD - диагонали

AC = 42 ▱ABCD

Найти: $\angle ABC$; $\angle BCD$; $\angle CDA$; $\angle DAB$

Решение:

$\angle OAH = 30^\circ$ (гипотенуза AO в 2 раза больше катета OH) ⇒

диагональ делит угол пополам ⇒

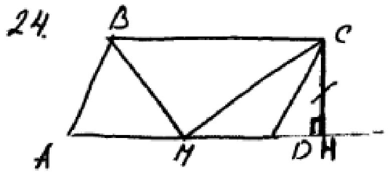
⇒ $\angle BAD = \angle BCD = 60^\circ$

$\angle ABC = \angle ADC = 120^\circ$

Ответ: 120°; 60°; 120°; 60°

24. Биссектрисы углов B и C параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке M, лежащей на стороне AD. Докажите, что M — середина AD.

24.



Дано:
ABCD - пар-мм
BM и CM - биссектрисы углов B и C
$M \in AD$

док-ть:
M - середина AD

док-во:

Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle CMD$, где $BM = CM$ (как биссектрисы)

1) Проведем высоту CH на продолжении стороны AD, CH будет равна и для $\triangle BAM$ и для $\triangle CMD$, тогда по формуле $S_\triangle = \frac{1}{2}ah$ запишем:

$S_{\triangle BAM} = \frac{1}{2} \cdot BM \cdot CH$

$S_{\triangle CMD} = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot CH$

$\frac{1}{2} \cdot BM \cdot CH = \frac{1}{2} \cdot CM \cdot CH$ — площади S треугольников повни $\Rightarrow$

Рассмотрим $\triangle ABM$ и $\triangle CMD$, где $BM = CM$ (как биссектрисы)

$AB = CD$ (т.к. стороны пар-мма попарно повни)

$\angle B = \angle 1$

$\triangle BAM = \triangle CHD \Rightarrow$

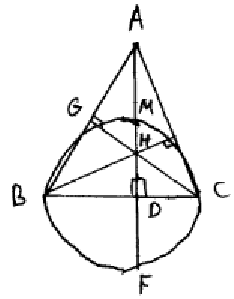
$AM = MD$ (как соотв. эл. равных треугольников) $\Rightarrow$

M - середина AD.

ч.т.д.

25. На стороне BC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена полуокружность, пересекающая высоту AD в точке M, $AD = 9$, $MD = 3$, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Найдите AH.

Ответ: 8.



№25.

Дано: $\triangle ABC$; $AD=9$; $MD=3$

Найти: AH.

Решение: Достроим окружность. Продлим AD до AF:

~~По св-ву хорд: MD·DF=BD·DC~~

$MD=DF=3$ (по св-ву хорды $\perp$ диаметру)

$AM=9-3=6$

$AF=6+3+3=12$

По св-ву секущих:

$AM \cdot AF = AG \cdot AB$.

$AG \cdot AB = 6 \cdot 12 = 72$.

Рассм $\triangle AGH$ и $\triangle ABD$:

$\angle AGH = \angle ADB$, $\angle A$ - общий $\Rightarrow \triangle AGH \sim \triangle ABD$ (по 2 углам) $\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{AD}{AG}$

$AG = \frac{72}{AB}$

$\Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{9AB}{72}$; $AH \cdot 9AB = 72AB$

$AH = 8$

Ответ: $AH=8$.

Вариант 4

Таблица оценивания

Задание	20	21	22	23	24	25
Оценка						

20. Решите уравнение $x\left(x^2+6x+9\right)=4\left(x+3\right)$.

Ответ: -4; -3; 1.

№20

$x(x^2+6x+9)=4(x+3)$

$x(x+3)^2=4(x+3)$

$x(x+3)(x+3)-4(x+3)=0$

$(x+3)(x(x+3)-4)=0$

Произведение равно 0 (нулю) тогда, когда один из множителей тоже равен 0 (нулю) =>

$x+3=0$ или $x(x+3)-4=0$

$x=-3$ $\quad$ $x^2+3x-4=0$

$a=1;\ b=3;\ c=-4$

$D=b^2-4ac=3^2-4\cdot1\cdot(-4)=9-4\cdot(-4)=9+16=25$

$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{-3-5}{2}=\frac{-8}{2}=-4$

$x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{25}}{2\cdot1}=\frac{-3+5}{2}=\frac{2}{2}=1$

Ответ: $-4;\ -3;\ 1$

21. Свежие фрукты содержат 88 % воды, а высушенные — 25 %. Сколько требуется свежих фруктов для приготовления 44 кг высушенных фруктов?

Ответ: 275 кг.

№21

	% воды	% (сухого вещества)	кол-во (кг)
свежие фрукты	88	12% = $0{,}12 \cdot x$	x
высушенные фрукты	25	75% = $0{,}75 \cdot 44$	44

100% − 88% = 12% − сухое вещество (свежие фрукты)

100% − 25% = 75% − сухое вещество (высушенные фрукты)

$0{,}12x = 0{,}75 \cdot 44$

$x = \dfrac{0{,}75 \cdot 44}{0{,}12}$

$x = \dfrac{\cancel{75}^{25} \cdot \cancel{44}^{11}}{\cancel{12}_{3\,1}}$

$x = 25 \cdot 11$

$x = 275$ (кг) − свежие фрукты

Ответ: 275 кг

22. Постройте график функции

$$y = 3 - \frac{x+2}{x^2+2x}.$$

Определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки..

Ответ: 3 и 3,5.

№ 22

$y = 3 - \frac{x+2}{x^2+2x}$

$D(y)$: $x^2+2x \neq 0$ $\quad D(y) = (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; +\infty)$

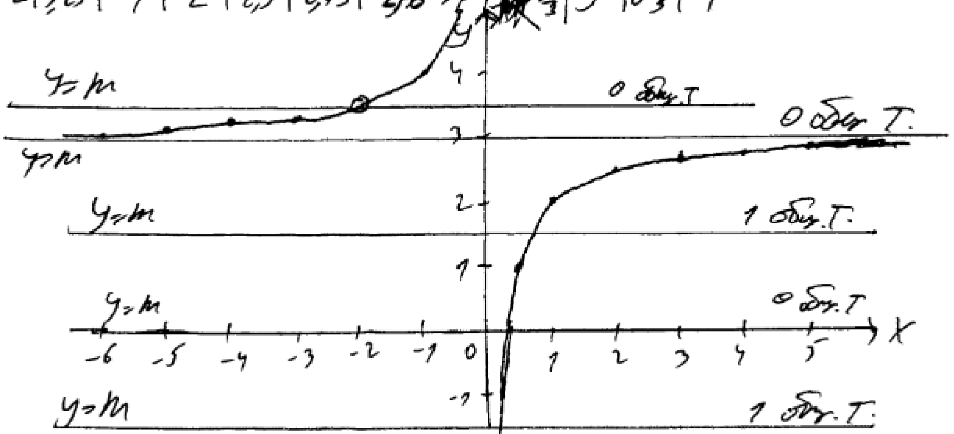
$x(x+2) \neq 0$

$x \neq 0, x \neq -2$

$3 - \frac{x+2}{x^2+2x} = 3 - \frac{x+2}{x(x+2)} = 3 - \frac{1}{x}$

$y = 3 - \frac{1}{x}$ — гипероб. с вык. ~~точк~~ $(-2; 3,5)$

x	-5	-4	-1	1	2	4	5	-6	-3	-0,5	3	0,5
y	3,2	3,25	4	2	2,5	3,75	2,8	$3\frac{1}{6}$	$3\frac{1}{3}$	5	$2\frac{2}{3}$	1

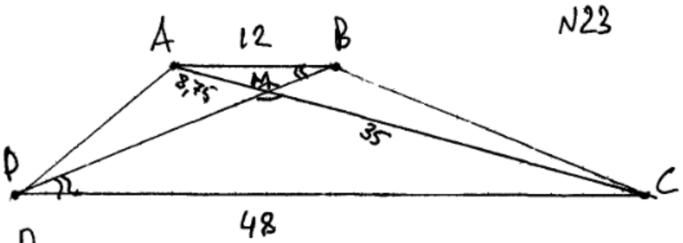


Прямая $y=m$ имеет с графиком функции 0 общих точек при $m \in \{0\} \cup \{3\} \cup \{3,5\}$

Ответ: $\{0\} \cup \{3\} \cup \{3,5\}$

23. Отрезки AB и DC лежат на параллельных прямых, а отрезки AC и BD пересекаются в точке M. Найдите MC, если $AB = 12$, $DC = 48$, $AC = 35$.

Ответ: 28.



№23

Дано: $AB=12$, $DC=48$, $AC=35$, $AB \parallel DC$

Найти: MC

Решение:

$ABCD$ – трапеция ($AB \parallel DC$)

$\angle ABD = \angle BDC$ т.к. они накрест лежащие ($AB \parallel DC$, BD – секущая)

$\angle AMB = \angle DMC$ т.к. они вертикальные

$\triangle AMB \sim \triangle DMC$ (по 2-м углам)

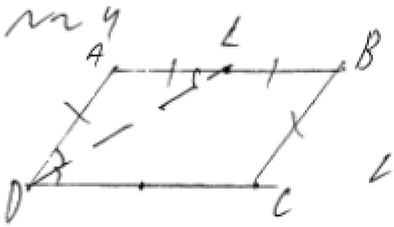
$K = DC:AB = 48:12 = 4$

$35:4 = 8,75 = AM$

$MC = AC - AM = 35 - 8,75 = 26,25$

Ответ: 26,25

24. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AD. Точка L — середина стороны AB. Докажите, что DL — биссектриса угла ADC.



$AB \parallel DC$

$AB = 2AD \Rightarrow \frac{1}{2}AB = AD \Rightarrow AL = AD$

$\angle ADL = \angle LDC$?

1) $AL = AD \Rightarrow \angle ADL = \angle ALD$

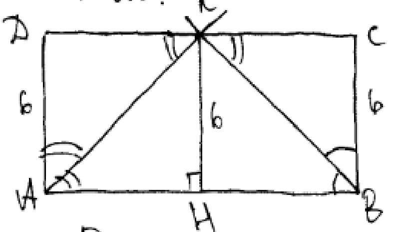
2) $\underbrace{AB \parallel CD \Rightarrow \angle ALD = \angle LDC}$ (накрест лежащие)

3) $\angle ADL = \angle ALD = \angle LDC \Rightarrow \angle ADL = \angle LDC$.

25. Биссектрисы углов A и B параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K. Найдите площадь параллелограмма, если $BC = 6$, а расстояние от точки K до стороны AB равно 6.

Ответ: 72.

№25.



Дано: AK - биссектриса; BK - биссектриса
$BC = 6$ $KH = 6$

Найти $S_{ABCD} = ?$

Решение.

~~биссектрисы параллелограмма пересекаются на стороне DC.~~

Данный параллелограмм является прямоугольником, т.к. $KH = BC = DA = 6$.

биссектрисы отсекают равнобедренный треугольник (по св-ву параллелограмма)

$\Downarrow$

$AB = 2 \cdot 6 = 12$; $S_{ABCD} = CB \cdot AB$

$S_{ABCD} = 6 \cdot 12 = 72$ ед^2

Ответ: 72 ед^2.

Вариант 5

Таблица оценивания

Задание	20	21	22	23	24	25
Оценка						

20. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0,2,\ 0,5$.

$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$

Пусть $\frac{1}{x}=y$, тогда получим уравнение:

$y^2+3y-10=0$

По теореме, обратной теореме Виета:

$\begin{cases} y_1+y_2=-3, \\ y_1\cdot y_2=-10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=-5, \\ y_2=2. \end{cases}$

Вернемся к исходной переменной:

$\frac{1}{x}=-5$ или $\frac{1}{x}=2$

$x=-\frac{1}{5}$ $\qquad$ $x=\frac{1}{2}$

$x=-0,2$ $\qquad$ $x=0,5$

Ответ: $-0,2$; $0,5$

21. Из А в В одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 55 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью, большей скорости первого на 6 км/ч, в результате чего прибыл в В одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста.

Ответ: 60 км/ч.

21.

	S, км	V, км/ч	t, ч
1	S	x	$\frac{S}{x}$
2.1	$\frac{S}{2}$	55	$\frac{S}{110}$
2.2	$\frac{S}{2}$	x+6	$\frac{S}{2x+110}$

1) пусть x – скорость первого.

2) путь 2 на первом и 2 участке равен.

3) пусть путь от A в B = S

А путь первого автомоб. = S,

а половина пути = $\frac{S}{2}$ (у 2 машины)

$$\frac{S}{x} = \frac{S}{110} + \frac{S}{2x+12}$$

ОДЗ: $x \neq 0 \quad x \neq -6$

$$\frac{1}{110}^{\backslash x\cdot(2x+12)} + \frac{1}{2x+12}^{\backslash 110x} - \frac{1}{x}^{\backslash 110(2x+12)} = 0$$

$$\frac{2x^2+12x+110x-220x-1320}{110\cdot x\cdot(2x+12)} = 0$$

$$2x^2-98x-1320=0 \Rightarrow x^2-49x-660=0$$

$$D = 2401+5280 = 7681$$

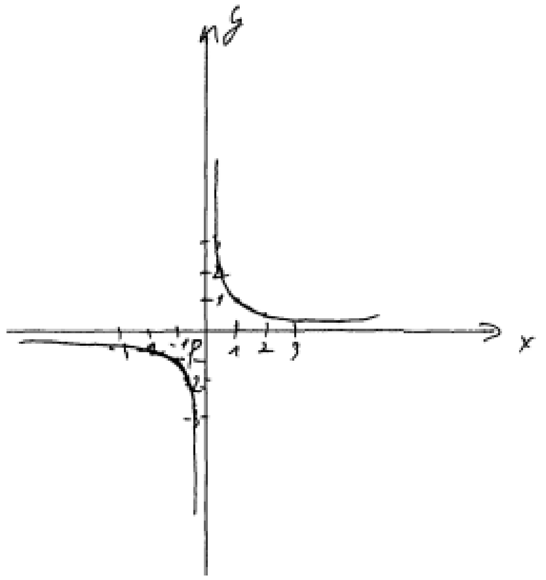
$$x_1 = \frac{49+\sqrt{7651}}{2} \qquad x_2 = \frac{49-\sqrt{7651}}{2}$$

т.к. V неотриц. то подх. первый корень

Ответ: $\frac{49+\sqrt{7651}}{2}$

22. Постройте график функции $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.



$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

x	1	2	0,5	-2	-1	-0,5
y	1	0,5	2	-0,5	-1	-2

$y = kx$

$kx = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

$9x + 1 = 9kx^3 + kx^2$

$9kx^3 + kx^2 - 9x - 1 = 0$

$D = k^2 - 4 \cdot 9k \cdot (-9) = k^2 + 324k$

$k(k + 324) = 0$

$k = 0$ или $k = -324$

Ответ: $k = 0; -324$

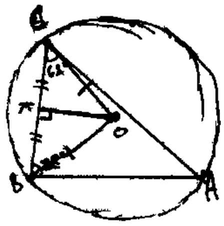
23. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно $62°$ и $88°$. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 12.

Ответ: 12.

№23
(рисунок на листе №2)

Дано:
Окружность,
ABC – треугольник
r = 12
∠B и ∠C соответственно 62° и 88°

Решение:



(1) Рассмотрим треугольник COB – равнобедренный, т.к. CO и BO – радиусы окружности.

(2) Найдём дугу, на которую опирается угол COB – BC.
BC = 360 – 88 – 88 – 62 – 62 = 60° = ∠COB – центр. угол = дуге, на которую опирается.
(градусная мера окружности = 360°).

(3) Проведём высоту OK с вершины O, треугольника COB, к стороне BC, которая будет являться и медианой и биссектрисой, ~~т.к.~~ по свойству равнобедренного треугольника. =>

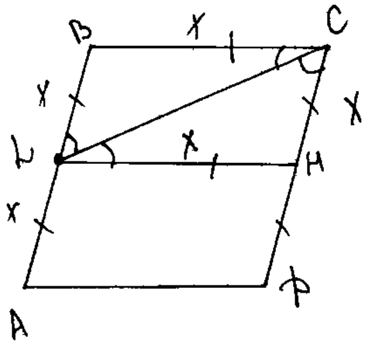
• треугольник OKB – ~~равнобедренный~~ прямоугольный.
• ∠KOB = 60 : 2 = 30° =>
катет лежащий напротив угла 30° равен половине гипотенузы =>
$KB = \frac{OB}{2} = \frac{12}{2} = 6.$

(3) KB = KC = 6 + 6 = 12 = BC

Ответ: BC = 12.

24. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC. Точка L — середина стороны AB. Докажите, что CL — биссектриса угла BCD.

N 24



Дано: $ABCD$ – парал-м

$BC = 2AB$

L = середина AB $AL = LB$

Док-ть: CL – биссектр $\angle BCD$

Док-во:

Сделали доп. построение! H – середина CD

Т.к. в парал-ме противоположные стороны равны, то в $LBCH$ $BL = CH \Rightarrow AL = LB = CH = HD = X$

Обозначим: $AB = 2x$, $BC = x$.

Т.к $LB = LA = x$. $\Rightarrow LB = BC = x \Rightarrow \triangle LBC$ – равнобедр. $\cancel{\angle LBC = \angle C}$

$BC = LH$ (т.к. в парал-ме противоположные стороны равны) $\angle BLC = \angle BCL$

$\Downarrow$

$BC = LH = x$

$LB = CH = x$ $\Rightarrow LH = HC \Rightarrow \triangle LCH$ – равнобедр. $\angle CLH = \angle LCH$

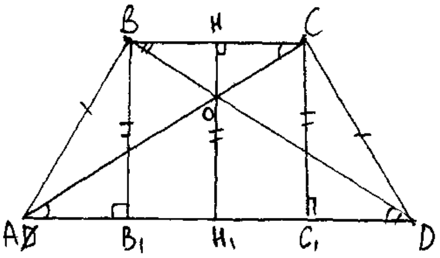
$\Downarrow$

$\angle BCL = \angle LCH \Rightarrow$ (CL – биссектр.)

Ч.Т.Д.

25. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 160, а площадь равна 1280, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 6,4.



Дано: $ABCD$ - трапеция $AB=CD$

$P_{ABCD}=160$ $S_{ABCD}=1280$.

Можно вписать окружность.

Найти: OH

Решение:

$BC+AD=AB+CD$, т.к. по условию в трапецию можно вписать окружность.

$P=160$ - по усл. $BC+AD=AB+CD=\frac{P_{ABCD}}{2}=80$, $AB=CD=40$

$S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot HH_1$ $S=1280$ - по усл $BC+AD=80$

$\Rightarrow HH_1 = 1280 \quad \frac{80}{2} = 1280:40=32$

$CC_1=HH_1=32$. $CD=40$ - в $\triangle CC_1D$

По т. Пифагора $C_1D^2=CD^2-CC_1^2$

$C_1D=\sqrt{1600-1024}=\sqrt{576}=24$

$AB_1=C_1D=24$, $B_1C_1=BC$

$AD=AB_1+C_1D+B_1C_1=48+B_1C_1$ $AD+BC=80$, $B_1C_1+BC=80-48=32$

$B_1C_1=BC=16$ $AD=48+16=64$.

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$, т.к.:

$\angle A=\angle C$ - накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC

$\angle B=\angle D$ - накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD

$\frac{AD}{BC}=\frac{64}{16}=3$, $k=3$ $\frac{OH_1}{OH}=\frac{3}{1}$

$HH_1=OH_1+OH=3+1=4$ части

$OH=\frac{HH_1}{4}=\frac{32}{4}=8$

Ответ: 8

Ответы и комментарии к материалам части 4

Вариант	Задание	Оценка	Комментарий
1	20	0	Алгебраическая ошибка: потерян знак, логическая ошибка: потерян корень -3
	21	1	Верно составлено и решено уравнение, но не найден ответ на поставленный вопрос
	22	2	Полное и верное решение
	23	1	Полное и верное решение, но имеется недостаток: ссылка на утверждение, обратное нужному
	24	0	Отсутствуют ключевые элементы доказательства
	25	0	Неверное условие, ученик, по сути, решает другую задачу
2	20	2	Решение верное
	21	0	Неверно составлено уравнение
	22	1	График построен верно, значения параметра не найдены
	23	0	Решение содержит грубые ошибки: в определении расстояния от точки до прямой и в применении свойств тригонометрических функций
	24	2	Решение полное и верное, содержит избыточные объяснения
	25	0	Решение опирается на неверное утверждение: если точка делит чевиану в отношении 2:1, то это точка пересечения медиан
3	20	0	Потерян корень
	21	2	Решение полное и верное
	22	1	График построен верно, но найдены не все значения параметра
	23	2	Решение содержит все ключевые шаги, верное и обоснованное
	24	0	Несвязные рассуждения, неверные утверждения
	25	1	Не обосновано, почему точка G лежит на окружности

4	20	2	Решение верное и полное. Имеется недочёт в формулировке
	21	2	Решение полное и верное. Имеется недочёт в записи
	22	1	График построен, но значения параметра найдены неверно
	23	0	Допущена существенная ошибка при применении подобия треугольников
	24	2	Решение содержит все ключевые шаги, верное и обоснованное
	25	0	Рассмотрен только случай, когда точка K лежит на стороне DC
5	20	2	Решение полное и верное
	21	1	Арифметическая ошибка, ответ неверный
	22	0	Вид функции не определен, точки не выколоты, дальнейшие вычисления содержат многочисленные ошибки
	23	2	Решение полное и верное, хотя нерациональное
	24	0	Равенство нужных углов не доказано, многочисленные логические ошибки
	25	1	Арифметическая ошибка