ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

Методические материалы для предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развернутым ответом экзаменационных работ ОГЭ 2025 года

МАТЕМАТИКА

Москва
2025

Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов для проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике И.В. Ященко, в.н.с. ФГБНУ «ФИПИ».
Авторы–составители: И. В. Ященко, И. Р. Высоцкий, П. И. Самсонов.

Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике.

Методические материалы включают в себя описание экзаменационной работы 2025 г., научно-методические подходы к проверке и оцениванию выполнения заданий с развернутым ответом, примеры ответов участников экзамена с комментариями к оценке этих ответов, а также материалы для самостоятельной работы эксперта.

Авторы будут благодарны за предложения по совершенствованию пособия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Основной государственный экзамен (ОГЭ) представляет собой форму государственной итоговой аттестации, проводимой с целью определения соответствия результатов освоения обучающимися основных образовательных программ основного общего образования требованиям федерального государственного образовательного стандарта. В ОГЭ используются контрольные измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплексы стандартных заданий.

ОГЭ проводится в соответствии с Федеральным законом «Об образовании в Российской Федерации» от 29.12.2012 № 273-ФЗ и Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего образования, утверждённым приказом Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 189/1513.

Содержание КИМ определяется Федеральнымо государственным образовательный стандартом основного общего образования (приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 № 1897) и Федеральной образовательной программой основного общего образования (приказ Минпросвещения России от 18.05.2023 под №370).

В КИМ обеспечена преемственность проверяемого содержания с Федеральным компонентом государственного стандарта основного общего образования по математике (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089 «Об утверждении Федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования») и Федеральной примерной программой основного общего образования (одобрена решением Федерального учебно-методического объединения по общему образованию (протокол от 08.04.2015 № 1/15).

Настоящее пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию заданий с развернутым ответом, которые являются частью измерительных материалов КИМ для основного государственного экзамена по математике. Пособие состоит из трех частей.

В первой части дается краткое описание КИМ ОГЭ по математике 2025 г., характеризуются общие подходы к применению критериев оценивания решений заданий с развёрнутым ответом, приводятся примеры оценивания решений и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

Во второй части в целях организации самостоятельной и групповой работы экспертов приводятся примеры решений, которые эксперты должны по результатам коллективного обсуждения оценить в соответствии с критериями оценивания выполнения заданий с развернутым ответом. Задания снабжены комментариями и ответами, помещенными в конце второй части.

В третьей части «Материалы для проведения зачёта» приведены примеры решений заданий с развёрнутым ответом, предназначенные для проведения индивидуальных зачетных работ по проверке подготовки экспертов.

Каждое задание второй части КИМ ОГЭ по математике оценивается в баллах. Максимальный балл равен 2.

	Нумерация заданий						Общ. балл
Задание	№ 20	№ 21	№ 22	№ 23	№ 24	№ 25	
Максимальный балл	2	2	2	2	2	2	12

Тематическая принадлежность заданий осталась неизменной по сравнению с 2024 г. А именно, задание № 20 – упрощение алгебраических выражений, решение уравнений, неравенств или систем уравнений, № 21 – текстовая задача, № 22 – построение графика функции, № 23 – геометрическая задача на вычисление, № 24 – геометрическая задача на доказательство, № 25 – геометрическая задача высокого уровня сложности.

Часть 1. Характеристика экзаменационной работы и общие подходы к оцениванию заданий

Характеристика экзаменационной работы ОГЭ

Контрольные измерительные материалы (далее КИМ) разработаны с учётом положения, что результатом освоения основной образовательной программы основного общего образования должна стать математическая компетентность выпускников, т.е. они должны: овладеть специфическими для математики знаниями и видами деятельности; научиться преобразованию знания и его применению в учебных и внеучебных ситуациях; сформировать качества, присущие математическому мышлению, а также овладеть математической терминологией, ключевыми понятиями, методами и приёмами.

Работа состоит из двух частей, соответствующих проверке на базовом, повышенном и высоком уровнях.

При проверке базовой математической компетентности участники экзамена должны продемонстрировать владение основными алгоритмами решения задач, знание и понимание ключевых элементов содержания (математических понятий, их свойств, приемов решения задач и пр.), умение пользоваться математической записью, применять знания к решению математических задач, не сводящихся к прямому применению алгоритма, а также применять базовые математические знания в практических ситуациях.

Задания *части* 2 направлены на проверку владения материалом на повышенном уровне. Их назначение – дифференцировать хорошо успевающих школьников по уровням подготовки, выявить наиболее подготовленную часть выпускников, составляющую потенциальный контингент профильных классов.

Эти части содержат задания повышенного уровня сложности из различных разделов курса математики. Все задания требуют записи решений и ответа. Задания расположены по нарастанию трудности – от простых к сложным, предполагающим свободное владение материалом и высокий уровень математической культуры.

Все задания второй части носят комплексный характер. Они позволяют проверить способность к соединению знаний из различных тем школьного курса, владение широким набором приемов и способов рассуждений, а также умение грамотно записать решение.

Задания части 2 относятся к алгебре и геометрии. Задание 20 (алгебраическое), задание 23 (геометрическое) – наиболее простые. Они направлены на проверку владения формально-оперативными алгебраическими навыками: преобразование выражения, решение уравнения, неравенства, системы, построение графика и умению решить несложную задачу на вычисление геометрической величины.

Задание 21 (алгебраическое), задание 24 (геометрическое) – более высокого уровня, они сложнее предыдущих.

И, наконец, задания 22 (алгебраическое), задание 25 (геометрическое) – высокого уровня сложности, они требуют свободного владения материалом и высокого уровня математической культуры. Рассчитаны эти задачи на обучающихся, изучавших математику, в рамках углубленного курса математики. При их выполнении участник экзамена должен продемонстрировать владение широким набором общематематических приемов, проявить элементарные умения исследовательского характера, которые помогут успешно продолжать образование в 10–11 классах углубленного или профильного изучения математики, информатики и естественно-научных дисциплин.

Общие подходы к проверке и оцениванию решений заданий с развернутым ответом

Самое важное требование к выполнению заданий с развернутым ответом: решение должно быть математически грамотным и завершенным. Из решения должен быть понятен ход рассуждений. Участник экзамена может ограничиться краткими пояснениями без подробного описания известных алгоритмов и ссылок на общеизвестные факты. Лаконичное решение, содержащее все основные шаги решения, не содержащее неверных утверждений и ошибочных выкладок, следует рассматривать как решение без недостатков. Краткое, лаконичное, математически верное решение свидетельствует о высокой математической культуре участника экзамена и должно высоко оцениваться.

Если решение задания второй части (20 – 25) удовлетворяет этим требованиям, то за него следует выставить 2 балла. При этом решение может содержать описки, не влияющие на ход решения и ответ, неточности в терминологии или обозначениях. Также не снижаются баллы за нерациональное решение, или решение, содержащее избыточные рассуждения.

Если эксперт делает общее заключение о том, что участник экзамена решил задачу, но решение не доведено до численного ответа или допущена непринципиальная вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения, или имеются несущественные недостатки (например, отсутствие обоснования вспомогательных фактов), то за решение выставляется 1 балл.

Если решение отсутствует (в частности, приведен только верный ответ), состоит из фрагментарных записей, несвязных рассуждений или содержит существенную математическую ошибку, то за решение следует выставить 0 баллов. Эту же оценку – 0 баллов – следует выставить и в том случае, если незначительная ошибка в записях или даже описка привели к изменению задачи.

Участник экзамена может использовать, без доказательств и обоснований, утверждения, факты, методы из любого действующего учебника. Если утверждение отсутствует в учебниках или избыточно, но эквивалентно общеизвестному (например, утверждение о подобии треугольников по трём углам), то оно является истинным, и потому использование такого утверждения не является ошибкой.

В решении текстовых или сюжетных задач, где требуется составление стандартной математической модели (например, задачи на движение), отсутствие комментариев к составлению уравнения и его решению, в общепринятых, естественных обозначениях и ограничениях на переменные (явно следующих из условия задачи), не является основанием для снижения баллов.

На основе накопленного опыта можно сформулировать несколько принципов работы эксперта.

1. Эксперт *не оценивает оформление задания* – расположение текста и выкладок, наличие или отсутствие тех или иных элементов записи и т.п. Эксперт оценивает только математическую грамотность и полноту данного решения.

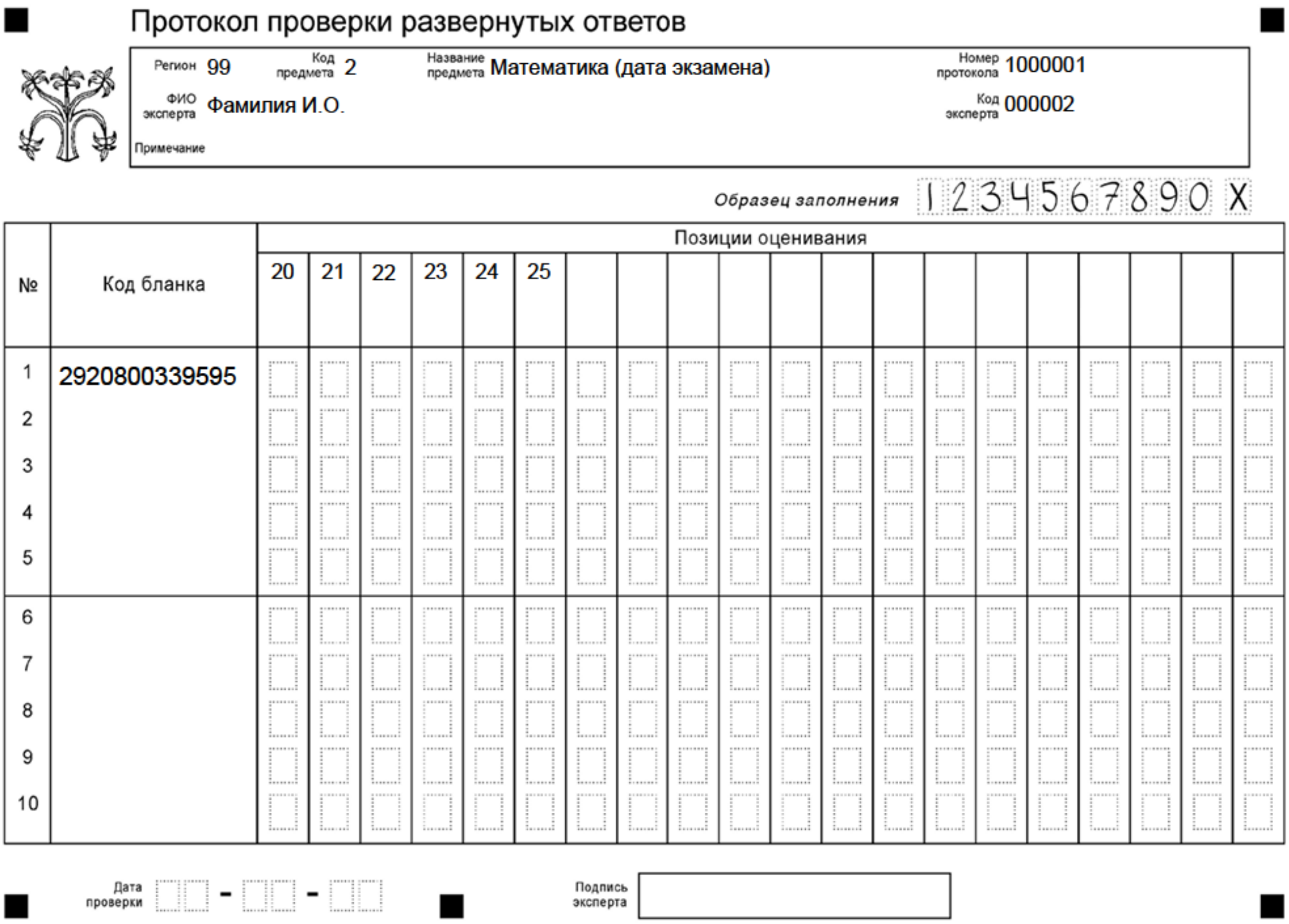
2. Следует различать функции ГИА и текущего контроля. Разумеется, грамотный учитель практикует рациональные подходы к решению, оптимальные способы его записи, требует от своих учеников дополнительных обоснований и проверок, которые уменьшают вероятность допустить ошибку. Но при итоговом контроле, если участник экзамена не допустил ошибок и изложил корректное решение, пусть и отличающееся от того, которое приводилось на уроке или в учебнике, то это решение должно быть оценено полным числом баллов. Таким образом, при проверке эксперт *не должен опираясь на свой методический опыт, требовать наличия конкретных, привычных ему, подходов к оформлению решения,* поскольку это приводит к субъективному расширению критериев оценивания.

3. Следует оценивать *грамотность и истинность утверждений и формулировок, данных в решении*, а не их соответствие формулировкам того или иного учебника.

4. Ключевая задача ОГЭ по математике – дать возможность участнику экзамена продемонстрировать уровень освоения требований ФГОС. Избыточные требования при проверке приводят к получению нулевых баллов, как и участниками экзамена, вообще не приступившими к выполнению задания, так и участниками, которые математически верно его выполнили, но изложили в форме, отличной от ожидаемой конкретным экспертом. Это приводит к демотивации как школьников, так и учителей, к снижению количества участников экзамена, приступивших к выполнению заданий второй части экзамена и количества школьников, выбирающих профильный уровень изучения математики.

Результаты проверки фиксируются в протоколе проверки развернутых ответов[1].

[1] Организационно-технологическая схема, используемая при проведении ОГЭ в субъектах Российской Федерации, может предполагать заполнение протокола проверки развернутых ответов в печатной или в электронной форме.



Протокол проверки развернутых ответов

Регион 99 Код предмета 2 Название предмета Математика (дата экзамена) Номер протокола 1000001

ФИО эксперта Фамилия И.О. Код эксперта 000002

Примечание

Образец заполнения 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 X

№	Код бланка	Позиции оценивания																			
		20	21	22	23	24	25														
1	2920800339595																				
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					

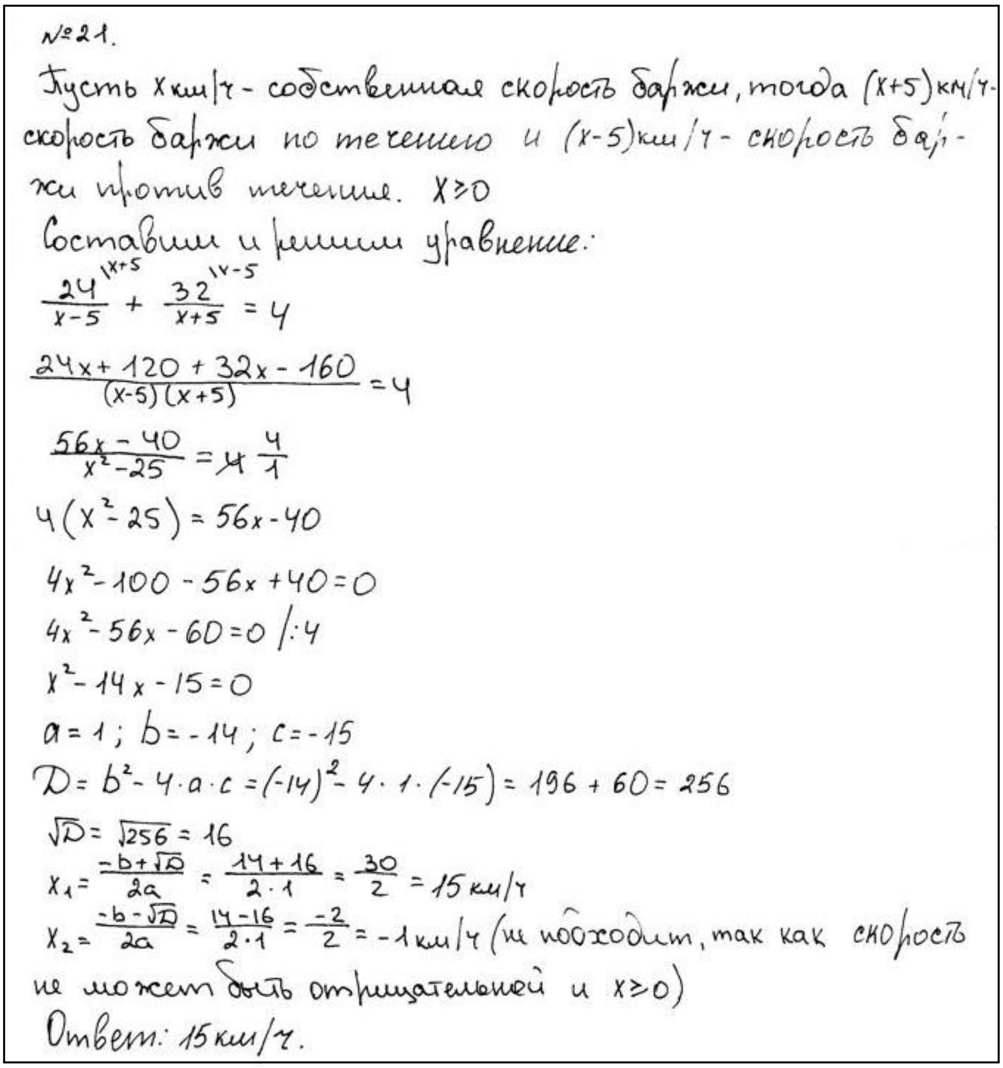
Дата проверки __ - __ - __ Подпись эксперта

Рис. 1. Вариант бланка протокола проверки развернутых ответов.

Примеры решений, оцененных отдельными экспертами не в соответствии с критериями

Пример 1. Баржа прошла против течения реки 24 км и, повернув обратно, прошла ещё 32 км, затратив на весь путь 4 часа. Найдите собственную скорость баржи, если скорость течения реки равна 5 км/ч.

Решение показано на рис. 2.



№21.

Пусть x км/ч - собственная скорость баржи, тогда (x+5) км/ч - скорость баржи по течению и (x-5) км/ч - скорость баржи против течение. $x \geq 0$

Составим и решим уравнение:

$$\frac{24^{\backslash x+5}}{x-5} + \frac{32^{\backslash x-5}}{x+5} = 4$$

$$\frac{24x + 120 + 32x - 160}{(x-5)(x+5)} = 4$$

$$\frac{56x - 40}{x^2 - 25} = \frac{4}{1}$$

$$4(x^2 - 25) = 56x - 40$$

$$4x^2 - 100 - 56x + 40 = 0$$

$$4x^2 - 56x - 60 = 0 \;|:4$$

$$x^2 - 14x - 15 = 0$$

$$a = 1;\ b = -14;\ c = -15$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-14)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15) = 196 + 60 = 256$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{256} = 16$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 + 16}{2 \cdot 1} = \frac{30}{2} = 15 \text{ км/ч}$$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{14 - 16}{2 \cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1$ км/ч (не подходит, так как скорость не может быть отрицательной и $x \geq 0$)

Ответ: 15 км/ч.

Рис. 2.

Решение полное и верное. Критерии диктуют оценку 2 балла. Однако отдельные эксперты поставили 0 баллов. Во время апелляции эксперт мотивировал это тем, что в решении не описаны «самые «крупные» члены уравнения». Тем самым, необоснованно расширены критерии оценивания; эксперт, вероятно, опирался на собственный методический опыт, к тому же использовал туманный термин «крупные члены уравнения».

Также ряд экспертов указывают, что отсутствуют ограничения на знаменатель дроби. Но и это не является основанием считать, что задача решена некорректно: явно указано, что множители, из которых состоит произведение в знаменателе, – это скорости, и что скорость баржи не может быть равна скорости течения реки. При этом ненужная запись $x \geq 0$ не делает решение неверным. В данном случае переход от дробно-рационального уравнения к квадратному корректный, с учетом естественных ограничений условия задачи.

Пример 2. Автомобиль двигался с постоянной скоростью из пункта А в пункт Б, расстояние между которыми 720 км. Другой автомобиль двигался с постоянной скоростью, которая была на 30 км/ч больше, чем скорость первого автомобиля, и приехал в Б на 4 часа раньше первого автомобиля. Найдите скорость второго автомобиля.

21.

$x>0$*	S(км)	V(км/ч)	t(ч)
I	720	$x+30$	$\frac{720}{x+30}$
II	720	x	$\frac{720}{x}$ — на 4 ч б.

Пусть x (км/ч) - скорость II автомобиля, тогда $x+30$ (км/ч) - скорость I автомобиля. Составим и решим уравнение.

$$\frac{720}{x}-\frac{720}{x+30}=4 \quad |:4$$

$$\frac{180}{x}-\frac{180}{x+30}=1 \quad |\cdot x(x+30)$$

$$180(x+30)-180x=1\cdot x(x+30)$$

См. доп. бланк № 2.

$$\cancel{180x}+180\cdot 30-\cancel{180x}=x^2+30x$$

$a=1$, $b=30$, $c=5400$

$$x^2+30x-5400=0$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=30^2-4\cdot 1\cdot(-5400)=900+21600=22500=150^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x=\frac{-30+150}{2\cdot 1}=\frac{120}{2}=60 \qquad x=\frac{-30-150}{2\cdot 1}=\frac{-180}{2}=-90 \text{ - не удовл.*}$$

$x=60$ (км/ч) - скорость II автомобиля.

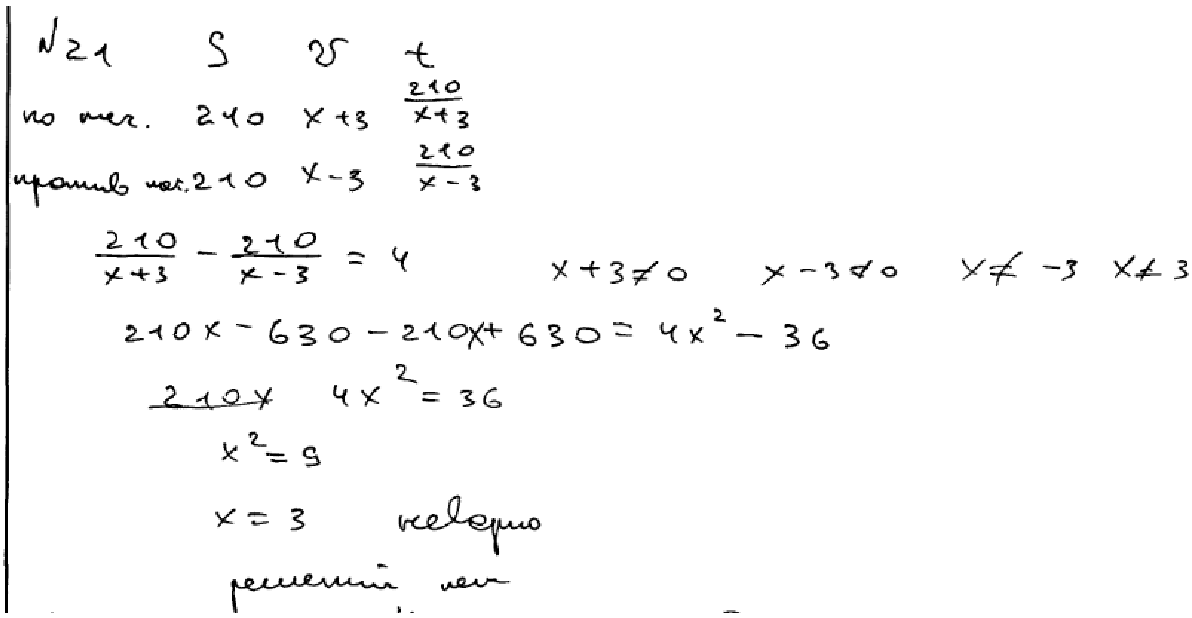
$60+30=90$ (км/ч) - скорость I автомобиля.

Ответ: 90 км/ч.

Рис. 3.

Решение, приведенное на рис. 3, понятное, верное и завершенное. Решая квадратное уравнение, участник экзамена на полях допускает описку $c = 5400$. Однако в следующей строке используется число –5400. Выставлен 1 балл. Возможная мотивация (помимо отсутствия знака «минус»), вероятно, связана с тем, что отсутствует указание на условие $x(x+30) \neq 0$, что в данном случае следует из естественных ограничений условия задачи. Оценка, в соответствии с критериями, 2 балла.

Пример 3. Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.



№21 S v t

по теч. 210 $x+3$ $\frac{210}{x+3}$

против теч. 210 $x-3$ $\frac{210}{x-3}$

$\frac{210}{x+3} - \frac{210}{x-3} = 4$ $x+3\neq 0$ $x-3\neq 0$ $x\neq -3$ $x\neq 3$

$210x - 630 - 210x + 630 = 4x^2 - 36$

$210x$ $4x^2 = 36$

$x^2 = 9$

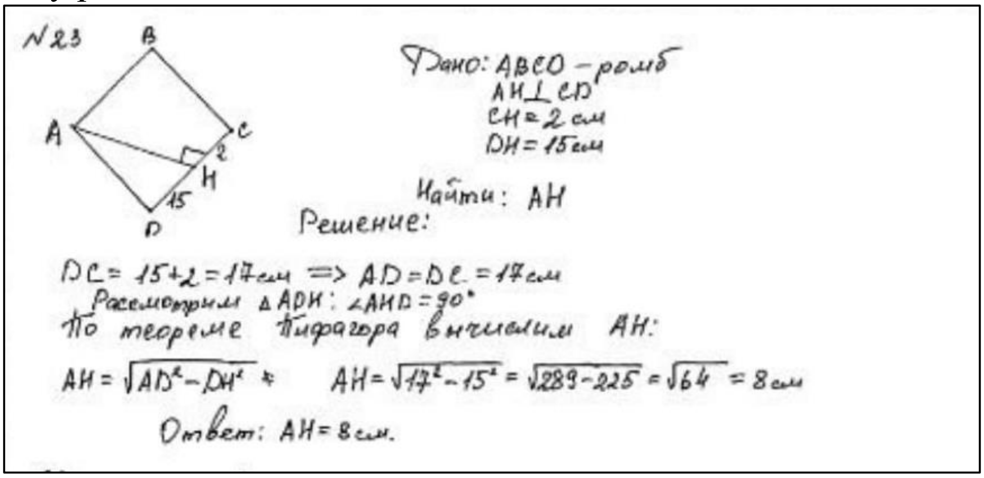
$x = 3$ неверно

решений нет

Рис. 4.

В решении, приведённом на рисунке 4, неверно составлена математическая модель к задаче. Эксперт оценил решение 1 баллом, однако, критерии диктуют оценку 0 баллов.

Пример 4. Высота *AH* ромба *ABCD* делит сторону *CD* на отрезки *DH* = 15 и *CH* = 2. Найдите высоту ромба.



№23

Дано: ABCD – ромб
$AH \perp CD$
$CH = 2$ см
$DH = 15$ см

Найти: AH

Решение:

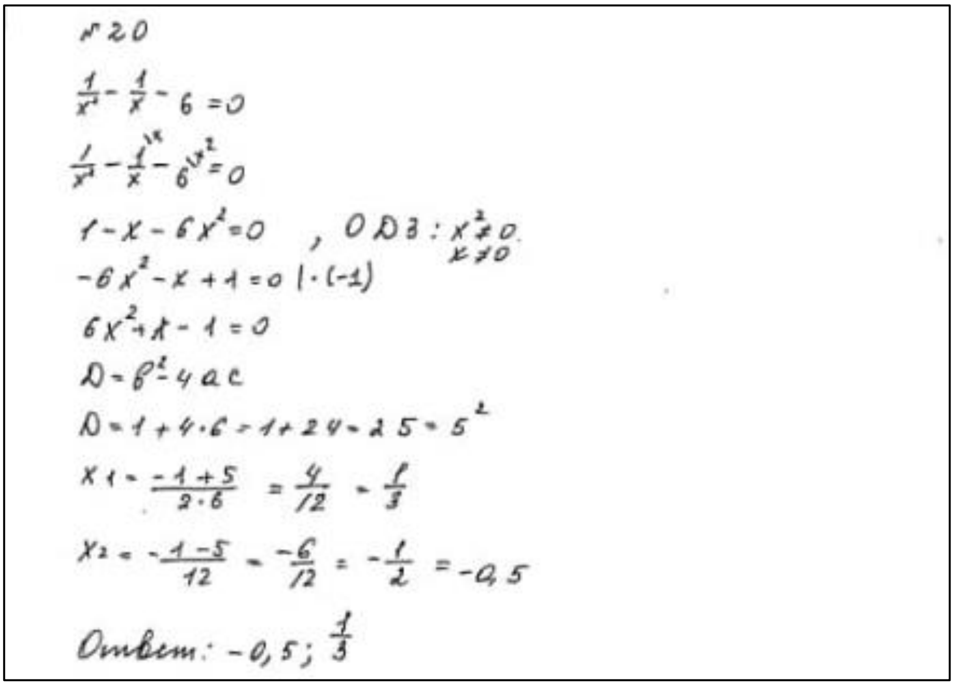
$DC = 15+2 = 17$ см $\Rightarrow AD = DC = 17$ см
Рассмотрим $\triangle ADH$: $\angle AHD = 90°$
По теореме Пифагора вычислим AH:
$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$ * $AH = \sqrt{17^2 - 15^2} = \sqrt{289-225} = \sqrt{64} = 8$ см

Ответ: AH = 8 см.

Рис. 5.

Решение показано на рис. 5. Эксперт поставил 0 баллов. Возможно, потому, что длины сторон указаны в сантиметрах, хотя в условии их нет. Другая версия: использована не теорема Пифагора в формулировке учебника, а эквивалентное ей утверждение. Также, отдельные эксперты снижают оценку за явно неудачный чертеж. Напомним, что в экзаменационной работе чертеж является лишь иллюстрацией к решению геометрической задачи, качество его построения не оценивается. Критерии в таком случае требуют оценку 2 балла.

Пример 5. Решите уравнение $\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$.



№20

$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - 6 = 0$

$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}^{\backslash x} - 6^{\backslash x^2} = 0$

$1 - x - 6x^2 = 0$, ОДЗ: $x^2 \neq 0$, $x \neq 0$

$-6x^2 - x + 1 = 0 \mid \cdot(-1)$

$6x^2 + x - 1 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 1 + 4\cdot 6 = 1 + 24 = 25 = 5^2$

$x_1 = \frac{-1+5}{2\cdot 6} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$x_2 = \frac{-1-5}{12} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$

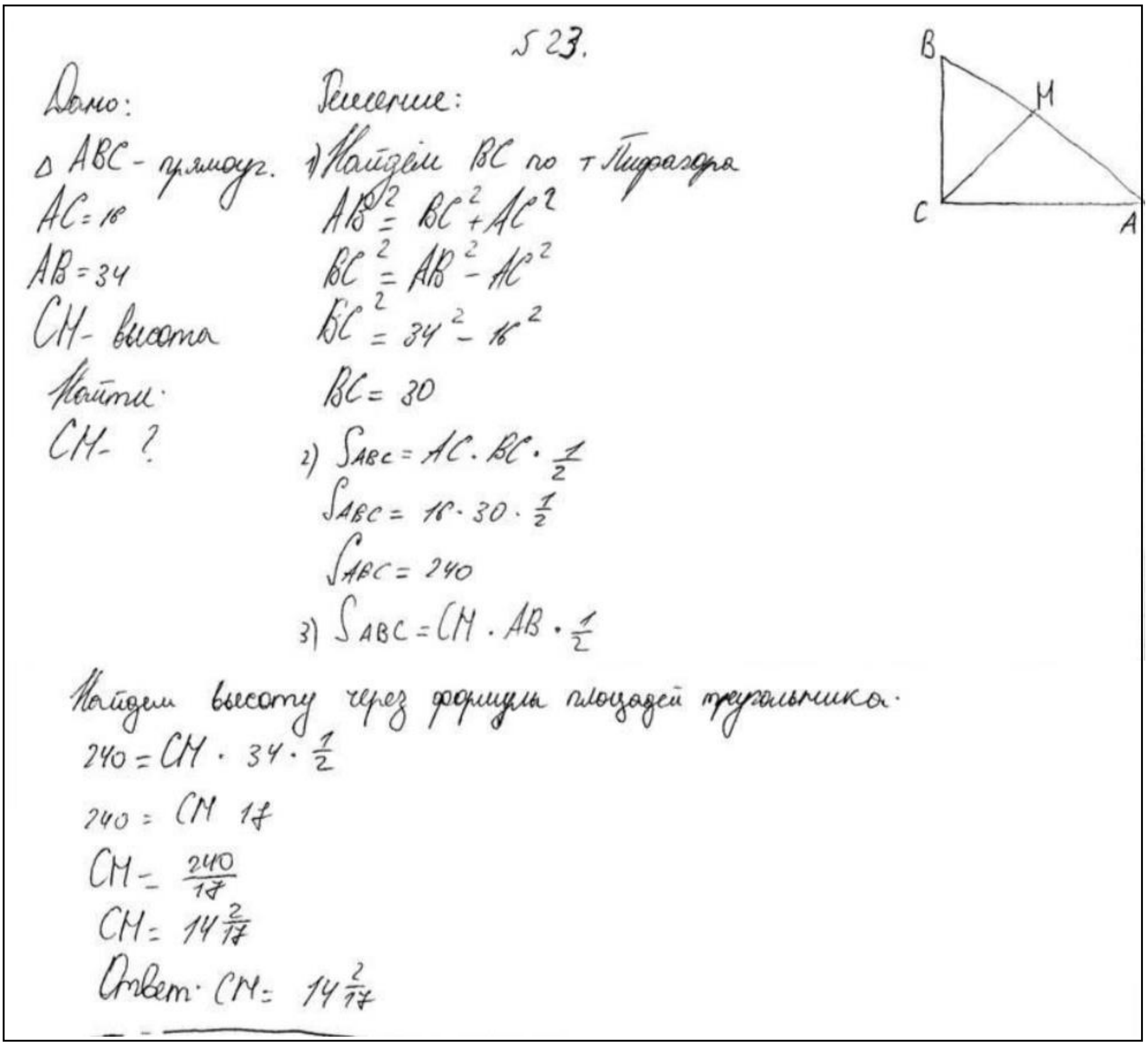
Ответ: $-0{,}5$; $\frac{1}{3}$

Рис. 6.

Эксперты поставили 1 балл за решение, показанное на рис. 6. Критерии обязывают выставить 2 балла, поскольку в решении нет ни ошибки, ни неточностей.

Пример 5. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 16, а гипотенуза равна 34. Найдите высоту этого треугольника, проведенную к гипотенузе.

Решение дано на рис. 7. Двумя экспертами были выставлены оценки 1 и 0 баллов. Возможно из-за отсутствия указания, что гипотенузой является сторона *AB*, хотя это прямо следует из описания условия в рубрике «Дано», или из-за прямого перехода от квадрата длины ВС к самой длине. Критерии оценивания однозначно предписывают поставить 2 балла.


№ 23.

Дано:
$\triangle ABC$ - прямоуг.
$AC = 16$
$AB = 34$
CH - высота
Найти:
CH - ?

Решение:
1) Найдем BC по т Пифагора
$AB^2 = BC^2 + AC^2$
$BC^2 = AB^2 - AC^2$
$BC^2 = 34^2 - 16^2$
$BC = 30$
2) $S_{ABC} = AC \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$
$S_{ABC} = 16 \cdot 30 \cdot \frac{1}{2}$
$S_{ABC} = 240$
3) $S_{ABC} = CH \cdot AB \cdot \frac{1}{2}$

Найдем высоту через формулы площадей треугольника.
$240 = CH \cdot 34 \cdot \frac{1}{2}$
$240 = CH \; 17$
$CH = \frac{240}{17}$
$CH = 14\frac{2}{17}$
Ответ: $CH = 14\frac{2}{17}$

Рис. 7.

Пример 6. Решите неравенство $(x-2)^2<\sqrt{3}(x-2)$.

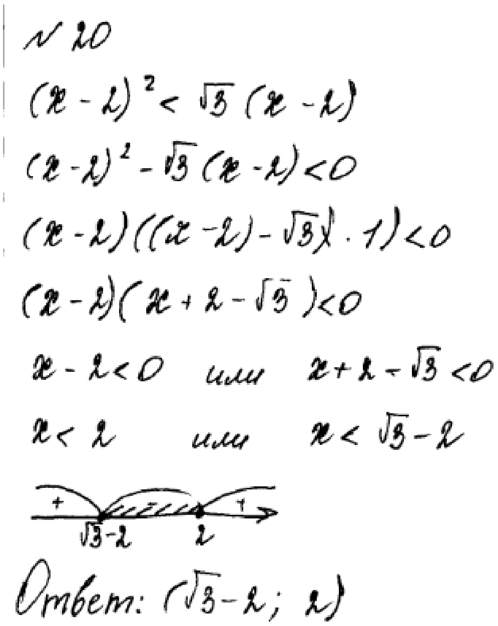


Рис. 8.

Эксперты поставили 1 балл за решение (рис. 8). Критерии обязывают выставить 0 баллов, поскольку решение квадратного неравенства ошибочное.

Пример 7. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH=9$, $AC=36$.

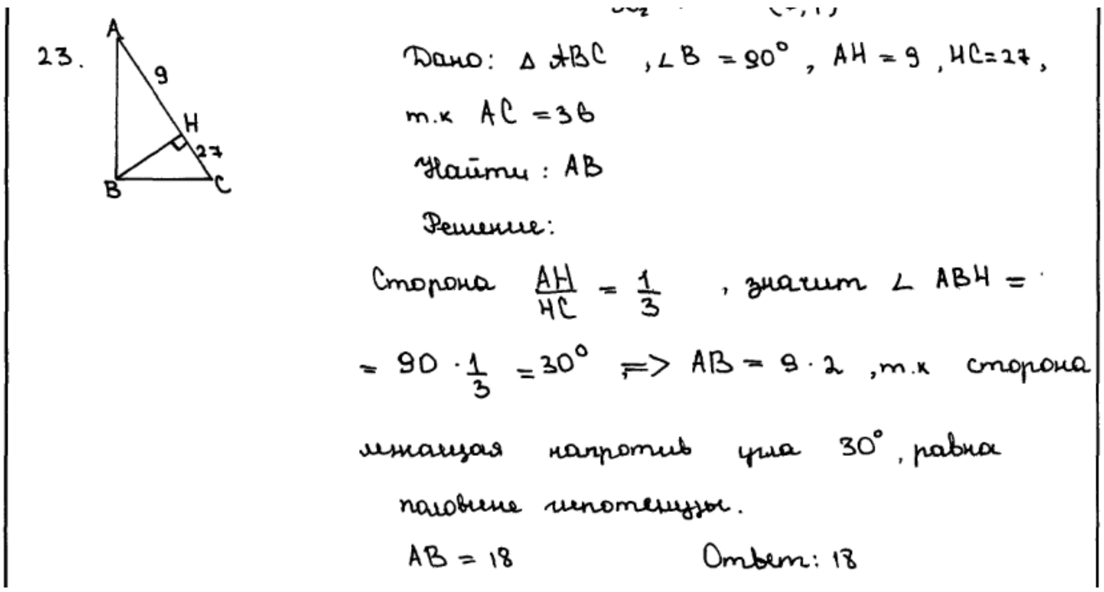


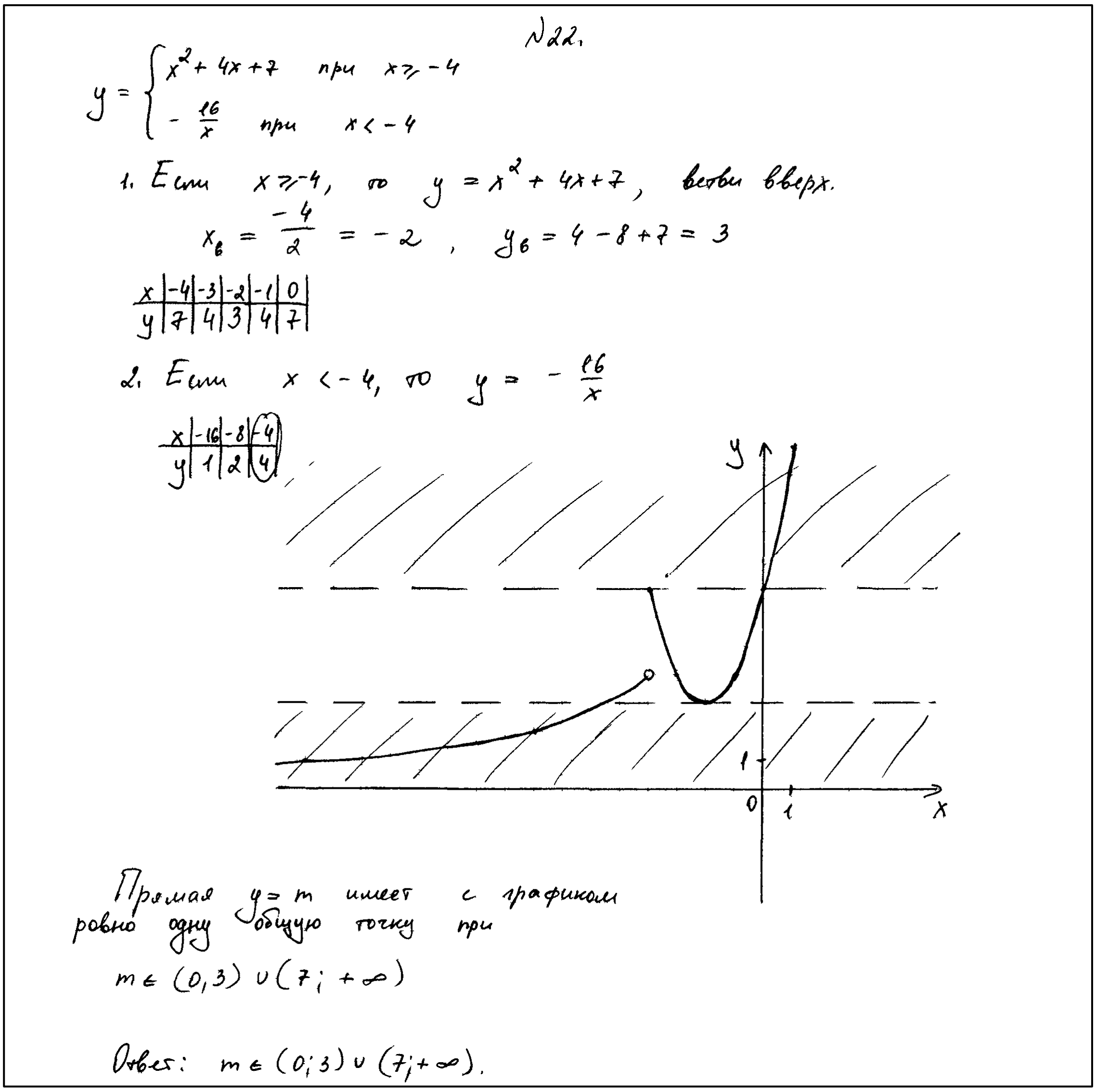
Рис. 9.

Эксперты поставили 2 балла за решение, показанное на рис. 9. Критерии обязывают выставить 0 баллов, поскольку решение содержит ошибки в нахождении отношения отрезков AH к HC и в нахождении градусной меры угла ABH. Верный ответ в данном случае не играет роли.

Пример 8. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 7, & \text{при } x \ge -4, \\ -\dfrac{16}{x}, & \text{при } x < -4. \end{cases}$$

При каких значениях m прямая $y = m$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции?



№22.

$$y = \begin{cases} x^2 + 4x + 7 & \text{при } x \geq -4 \\ -\frac{16}{x} & \text{при } x < -4 \end{cases}$$

1. Если $x \geq -4$, то $y = x^2 + 4x + 7$, ветви вверх.

$x_в = \frac{-4}{2} = -2$, $y_в = 4 - 8 + 7 = 3$

x	-4	-3	-2	-1	0
y	7	4	3	4	7

2. Если $x < -4$, то $y = -\frac{16}{x}$

x	-16	-8	-4
y	1	2	4

Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при

$m \in (0,3) \cup (7; +\infty)$

Ответ: $m \in (0;3) \cup (7;+\infty)$.

Рис. 10.

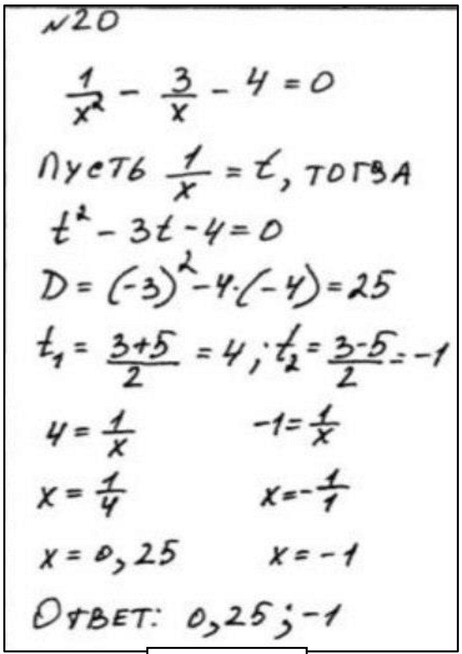
Оценка экспертов – 0 баллов (рис. 10). Участник подал апелляцию, однако она не была удовлетворена с формулировкой «*не указано название графика парабола/гипербола*». Налицо субъективное расширение критериев. Указание на вид графика элементарной функции не требуется в условии задачи. Оно, разумеется, может быть использовано при построении, например, «графиком является такая-то парабола (или ее часть)», без таблицы значений. Но, в данном случае, явное название желательно, но не обязательно.

В решении нет ошибок, обе части графика построены верно, продемонстрировано понимание алгоритмов построения гиперболы и параболы, показаны области, где расположены все нужные прямые вида $y = m$, границы промежутков, в которых находятся нужные значения параметра, считываются однозначно из таблиц. Критерии диктуют оценку 2 балла.

Пример 9. Решите уравнение

$$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0.$$

Представленное решение (рис. 11) получило оценку 0. Была подана апелляция. Апелляционная комиссия согласилась с оценкой 0 в связи с тем, что *региональной предметной комиссией было принято дополнительно соглашение*: при решении уравнения $\frac{1}{x} = a$ должен быть использован алгоритм решения дробно-рациональных уравнения с обязательным указанием на условие $x \neq 0$. Неясно, почему комиссия не считает возможным пользоваться тем, что x и a взаимно обратны или хотя бы свойством пропорций. Приведенное решение математически корректное и полное. Оценка 2 балла.


№20

$\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4 = 0$

Пусть $\frac{1}{x} = t$, тогда

$t^2 - 3t - 4 = 0$

$D = (-3)^2 - 4\cdot(-4) = 25$

$t_1 = \frac{3+5}{2} = 4$; $t_2 = \frac{3-5}{2} = -1$

$4 = \frac{1}{x}$ $\quad -1 = \frac{1}{x}$

$x = \frac{1}{4}$ $\quad x = -\frac{1}{1}$

$x = 0{,}25$ $\quad x = -1$

Ответ: 0,25; −1

Рис. 11.

К сожалению, участившиеся случаи необоснованного снижения баллов за формально верные и корректные решения не только отталкивает школьников от математики, но и провоцирует в учительской среде подмену изучения математики натаскиванием на шаблоны решений и способы их оформления. Как следует из приведенных примеров, необоснованные требования подобного рода, которые, зачастую, невозможно предсказать, дезориентируют учащихся и учителей, смещая фокус внимания с важных математических рассуждений на придирки к оформлению верных решений.

Главной задачей эксперта должно быть отличить математически верное решение от неверного и оценить представленное решение в соответствии с критериями оценивания.

Недопустимо как занижение оценки по формальным признакам, так и завышение в том случае, когда решение содержит математические ошибки.

Часть 2. Примеры оценивания решений заданий 20 – 25 с краткими комментариями

Задание 20

Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Решение. Пусть $t=\frac{1}{x-1}$. Уравнение принимает вид

$$t^2+3t-10=0,$$

Откуда $t_1=-5$ и $t_2=2$.

Из уравнения $\frac{1}{x-1}=-5$ получаем: $x-1=-\frac{1}{5}$, откуда $x=\frac{4}{5}$.

Из уравнения $\frac{1}{x-1}=2$ получаем: $x-1=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{3}{2}$.

Ответ: 0,8; 1,5.

Комментарий. Другой способ состоит в приведении уравнения к системе

$$\begin{cases} x^2-2{,}3x+1{,}2=0, \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Критерии оценивания выполнения задания 20

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущены вычислительные ошибки, с их учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 20

Пример 1. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

20. $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{(x-1)}-10=0$

1) Пусть $(x-1)=t$, тогда:

$\frac{1}{t^2}+\frac{3}{t}^{|t}-10^{|t^2}=0$

$\frac{1+3t-10t^2}{t^2}=0$ $\quad t^2\neq 0$

$\Rightarrow -10t^2+3t+1=0 \;|\cdot(-1)$

$10t^2+3t-1=0$

$D=9+\overset{40}{4\cdot 1\cdot 10}=49$

$\sqrt{D}=7$

$t_1=\frac{3+7}{20}=0{,}5$

$t_2=\frac{3-7}{20}=\frac{-1}{5}=-0{,}2$

2) $(x-1)=t$, следовательно:

- $x-1=0{,}5$
  $x=1{,}5$
- $x-1=-0{,}2$
  $x=1-0{,}2=0{,}8$

Ответ: $-0{,}2$ и $0{,}8$.

Комментарий. Все этапы решения присутствуют, корни найдены верно. Вынесенные в ответ значения содержат описку (вынесено в ответ одно из значений *t*), которая не должна повлиять на оценку.

Оценка 2 балла.

Пример 2. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.

$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3^{\ (x-1}}{x-1}-10^{\ ((x-1)(x-1)}=0$; $\frac{1}{(x-1)(x-1)}+\frac{3(x-1)}{(x-1)(x-1)}-\frac{10(x-1)(x-1)}{(x-1)(x-1)}=0$;

$1+3(x-1)-10(x-1)(x-1)=0$, если $x\neq 1$

$1+3x-3-10(x-1)^2=0$;

$-2+3x-10x^2+20x-10=0$;

$-10x^2+23x-12=0 \ |\cdot(-1)$;

$10x^2-23x+12=0$;

$D=b^2-4ac$; $D=529-4\cdot 10\cdot 12=529-480=49$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{23+49}{2\cdot 10}=\frac{72}{20}=3{,}6$; $x_2=\frac{23-49}{20}=-\frac{26}{20}=-1\frac{6^{(5}}{20}=-1{,}3$

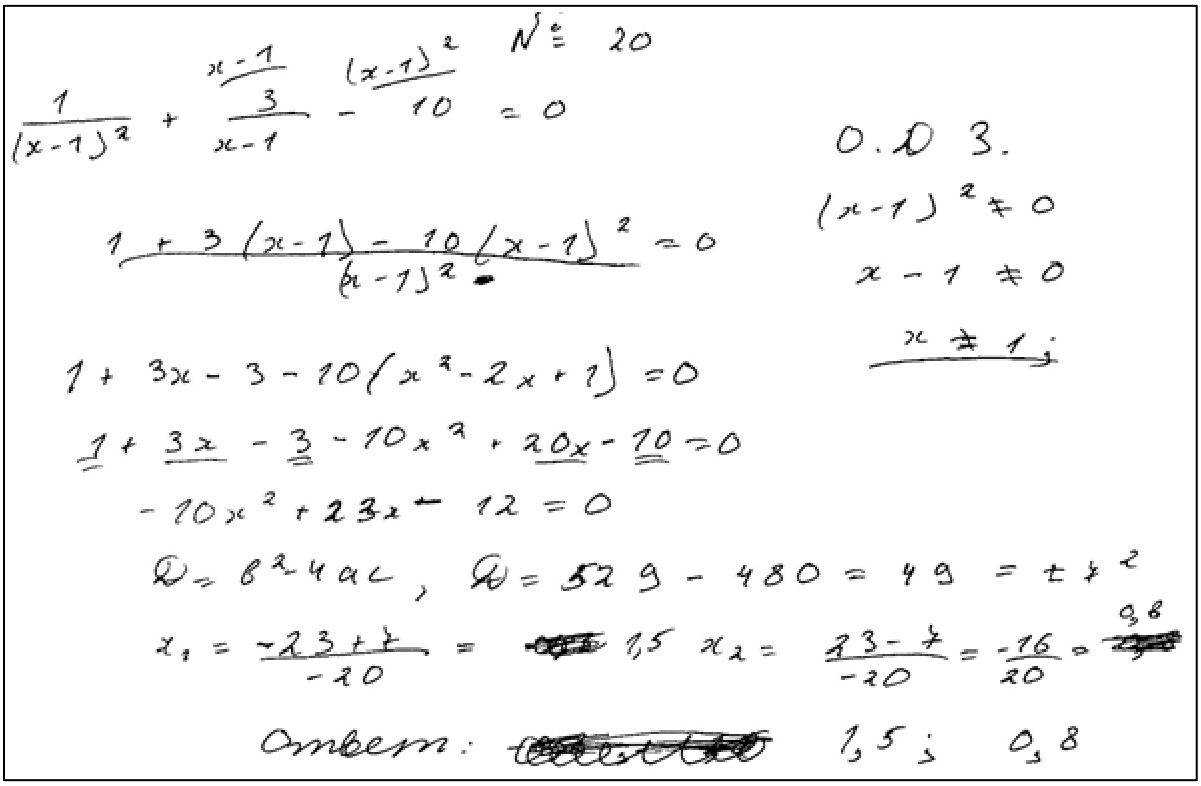
Ответ: $-1{,}3$; $3{,}6$

Комментарий. В формуле корней квадратного уравнения допущена ошибка: не извлечен корень из дискриминанта. Учитывая, что имеется запись $\sqrt{D}$, допущенную ошибку можно приравнять к вычислительной.

Оценка 1 балл

Пример 3. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$.


№ 20

$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$

О.Д.З.
$(x-1)^2\neq 0$
$x-1\neq 0$
$x\neq 1$;

$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0$

$1+3x-3-10(x^2-2x+1)=0$

$1+3x-3-10x^2+20x-10=0$

$-10x^2+23x-12=0$

$D=b^2-4ac$, $D=529-480=49=\pm 7^2$

$x_1=\frac{-23+7}{-20}=1{,}5$ $x_2=\frac{23-7}{-20}=\frac{-16}{20}=0{,}8$

Ответ: $1{,}5$; $0{,}8$

***Комментарий*.** Имеются ошибки в вычислении корней квадратного уравнения и ошибка в знаке при делении чисел с разными знаками.

Оценка 0 баллов.

Задание 21

Два велосипедиста одновременно отправляются в 112-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 9 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Решение. Пусть скорость второго велосипедиста равна x км/ч. Тогда $x+9$ км/ч — скорость первого. Первый велосипедист проехал 112 км за $\frac{112}{x+9}$ часов, а второй — за $\frac{112}{x}$ часов. По условию время, затраченное первым велосипедистом на весь путь, на 4 часа меньше времени второго. Составим уравнение

$$\frac{112}{x}-\frac{112}{x+9}=4.$$

Это уравнение приводится к квадратному $x^2+9x-252=0$, корнями которого являются числа 12 и –21. Отрицательный корень посторонний.

Ответ: 12 км/ч.

Критерии оценивания выполнения задания 21

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 21

Пример 1. Два велосипедиста одновременно отправляются в 112-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 9 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 12 км/ч.

	S	t	V
1 вел.	112	$\frac{112}{x}$	x
2 вел.	112	$\frac{112}{x-9}$	$x-9$

$\frac{112}{x-9}=\frac{112}{x}+4$ (т.к. первый вел. прибыл на 4ч раньше)

$\frac{112}{x-9}=\frac{112}{x}+4 \mid \cdot x$

$\frac{112x}{x-9}=112+4x$

$\frac{112x}{x-9}=112+4x \mid \cdot(x-9)$

$112x=112x-1008+4x^2-36x$

$112x-1008+4x^2-36x-112x=0$

$4x^2-36x-1008=0$

$D=1296-4\cdot4\cdot(1008)=17424$

$x_1=\frac{36+\sqrt{17424}}{8}=21$

$x_2=\frac{36-\sqrt{17424}}{8}=-12$

$x=21$ (скорость первого вел.)

$x-9=21-9=12$ (скорость второго вел.)

Ответ: 12 км/ч

Комментарий. Задача решена верно.

Оценка 2 балла.

Пример 2. Два велосипедиста одновременно отправляются в 224-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 14 км/ч

Пусть скорость первого велосипедиста равна x км/ч. Тогда скорость второго велосипедиста равна $(x-2)$ км/ч. Тогда время, за которое прибудет до финиша первый велосипедист, равно $\left(\frac{224}{x}\right)$ ч. Тогда второй велосипедист прибудет до финиша за $\left(\frac{224}{(x-2)}\right)$ ч. По условию задачи известно, что первый велосипедист прибывает к финишу на 2 часа раньше. Составим и решим уравнение:

$$\frac{224}{\cancel{x-2}} - \frac{224}{x} = 2$$

$$\frac{x\cancel{(x-2)}\,224}{\cancel{x-2}} - \frac{x(x-2)\cdot 224}{x} = 2x(x-2)$$

$$224x - 224(x-2) = 2x(x-2$$

$$\cancel{224x} - \cancel{224x} + 448 = 2x^2 - 4x$$

$$-2x^2 + 4x + 448 \quad /:(-2)$$

$$x^2 - 2x - 224 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-224) = 4 + 896 = 900$$

$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{900}}{2\cdot 1} = \frac{2+30}{2} = 16$$

$$x_2 = -\frac{(-2)-\sqrt{900}}{2\cdot 1} = \frac{2-30}{2} = -\frac{28}{2} = -14$$

Условию задачи удовлетворяет x_1.
Ответ: 16 км/ч.

Комментарий. Задача решена верно. Однако на последнем этапе имеется ошибка: скорость второго велосипедиста не вычислена, и в ответе дана скорость первого велосипедиста вместо скорости второго.

Оценка 1 балл.

Пример 3. Два велосипедиста одновременно отправляются в 112-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 9 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 12 км/ч

	S (км)	t (ч)	V (км/ч)
1 в.	112	x	$\frac{112}{x}$
2 в.	112	x - 9	$\frac{112}{x-9}$

Пусть x ч - время (t) первого велосипедиста, тогда x - 9 ч - время (t) второго велосипедиста. Расстояние (S) - 112 км; Тогда чтобы найти скорость (V) первого нужно: (S:t) : $\frac{112}{x}$ км/ч; скорость (V) второго: (S:t); $\frac{112}{x-9}$ км/ч. А первый вел. едет на 4 км/ч больше, чем второй. Можно составить уравнение:

$$\frac{112}{x-9} - \frac{112}{x} = 4; \quad \frac{112}{x-9}^{\backslash x} - \frac{112}{x}^{\backslash x-9} - \frac{4}{1}^{\backslash x^2-9x} = 0;$$

$$\frac{112x - 112x + 1008 - 4x^2 + 36x}{x(x-9)} = 0; \quad \frac{1008 - 4x^2 + 36x}{x(x-9)} = 0;$$

$$\begin{cases} 1008 - 4x^2 + 36x = 0, \\ x(x-9) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1008 - 4x^2 + 36x = 0, \\ x \neq 0; \ x \neq 9; \end{cases}$$

$$1008 - 4x^2 + 36x = 4x^2 - 36x - 1008 = x^2 - 9x - 252 = 0;$$

$$4x^2 - 36x - 1008 = 0 \ |:4; \quad x^2 - 9x - 252 = 0$$

$$x^2 - 9x - 252 = 0; \quad D = b^2 - 4ac;$$

$$D = 81 + 252 \cdot 4 = 81 + 1008 = 1089;$$

$$x_1 = \frac{9+33}{2} = \frac{42}{2} = 21; \quad x_2 = \frac{9-33}{2} = -\frac{24}{2} = -12;$$

По условию задачи подходит 21 км/ч, т.к. V - скорость не может быть отрицательной.

Ответ: 21 км/ч - скорость второго.

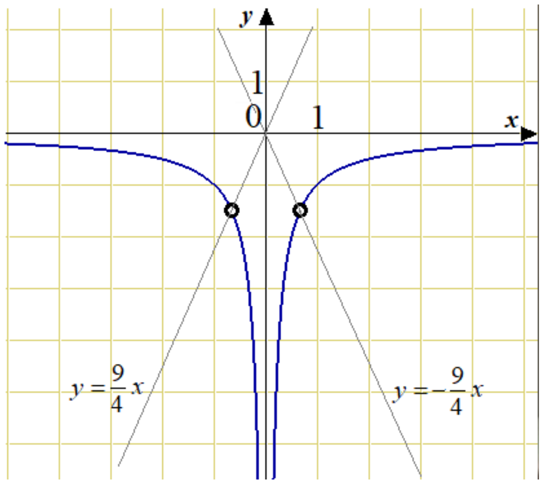
Комментарий. В описании переменных многочисленные логические ошибки, в результате уравнение составлено неверно.

Оценка 0 баллов.

Задание 22

Постройте график функции $y=\dfrac{1{,}5|x|-1}{|x|-1{,}5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Решение. Функция не определена при $x=0,\ x=\pm\dfrac{2}{3}$.



При $x>0$ и $x\neq\dfrac{2}{3}$ получаем $y=\dfrac{1{,}5x-1}{x-1{,}5x^2}=-\dfrac{1}{x}$.

При $x<0$ и $x\neq-\dfrac{2}{3}$ получаем $y=\dfrac{-1{,}5x-1}{-x-1{,}5x^2}=\dfrac{1}{x}$.

График функции состоит из частей двух гипербол, из которых выколоты точки

$$\left(-\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right) \text{ и } \left(\frac{2}{3};-\frac{3}{2}\right).$$

Прямая $y=kx$ не пересекает график, если она горизонтальна или если она проходит через одну из выколотых точек, то есть если $k=\pm\dfrac{9}{4}$.

Ответ: $0, -\dfrac{9}{4}, \dfrac{9}{4}$.

Критерии оценивания выполнения задания 22

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 22

Пример 1. Постройте график функции $y=\dfrac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

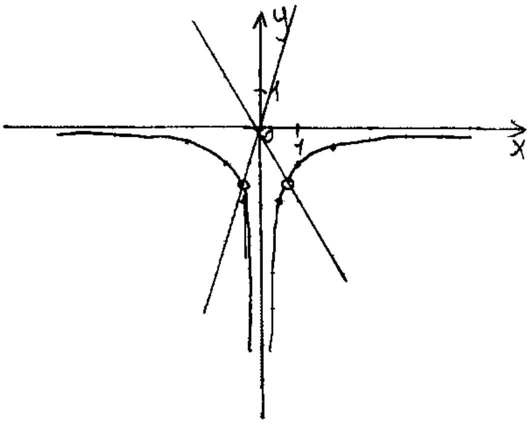
№22) $y=\dfrac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$

1) если $x \geq 0$, то

$y=\dfrac{1,5x-1}{1-1,5x^2}=\dfrac{1,5x-1}{-x(1,5x-1)}=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}$, где $x\neq\dfrac{2}{3}$ и $y\neq-\dfrac{3}{2}$

2) если $x<0$, то

$y=\dfrac{-1,5x-1}{-x-1,5x^2}=\dfrac{-1,5x-1}{x(-1,5x-1)}=\dfrac{1}{x}$, где $x\neq-\dfrac{2}{3}$ и $y\neq-\dfrac{3}{2}$



$y=kx$ не будет иметь общих точек с графиком если $y=0$ ~~(т.е. $k=0$)~~ то есть $k=0$ или если он будет проходить через выколотые точки $\left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}\right)$ и $\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{3}{2}\right)$.

$-\dfrac{3}{2}=k\cdot\dfrac{2}{3}$	$-\dfrac{3}{2}=-\dfrac{2}{3}k$
$k=-\dfrac{9}{4}$	$k=\dfrac{9}{4}$
$k=-2,25$	$k=2,25$

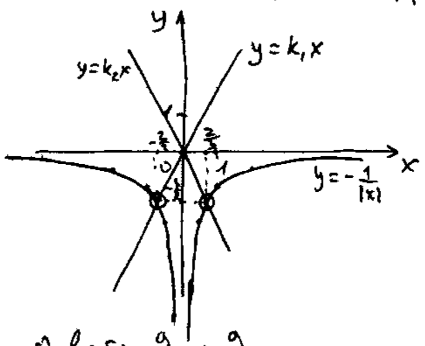
Ответ. $k=-2,25; 0; 2,25$.

Комментарий. Решение полное и верное.

Оценка 2 балла.

Пример 2. Постройте график функции $y=\dfrac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

$$y=\frac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}=\frac{1,5|x|-1}{|x|(1-1,5|x|)}=-\frac{1}{|x|}\quad,\ x\neq\pm\frac{1}{1,5}\neq\pm\frac{2}{3}$$



$y=k_1x:$

$-\frac{3}{2}=k_1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)$

$k_1=\frac{3\cdot 3}{2\cdot 2}=\frac{9}{4}$

$y=k_2x:$

$-\frac{3}{2}=k_2\cdot\frac{2}{3}$

$k_2=\frac{-3\cdot 3}{2\cdot 2}=-\frac{9}{4}$

Ответ: $-\frac{9}{4}$; $\frac{9}{4}$

Комментарий. График построен верно, верно найдены два из трех значений *k*.

Оценка 1 балл.

Пример 3. Постройте график функции $y=\frac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

22. $y = \frac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$ при $x \neq 0$

$x \geqslant 0$ и $x \neq 0$

$y=\frac{1,5x-1}{x-1,5x^2}$

$y=\frac{-1(\cancel{-1,5x+1})}{x(\cancel{-1,5x+1})}$

$y=-\frac{1}{x}$

$x<0$

$y=\frac{-1,5x-1}{-x-1,5x^2}$

$y=\frac{-1(\cancel{1,5x+1})}{-x(\cancel{1,5x+1})}$

$y=\frac{1}{x}$

1) Построю график функции $y=-\frac{1}{x}$ при $x \geqslant 0$. и $x \neq 0$

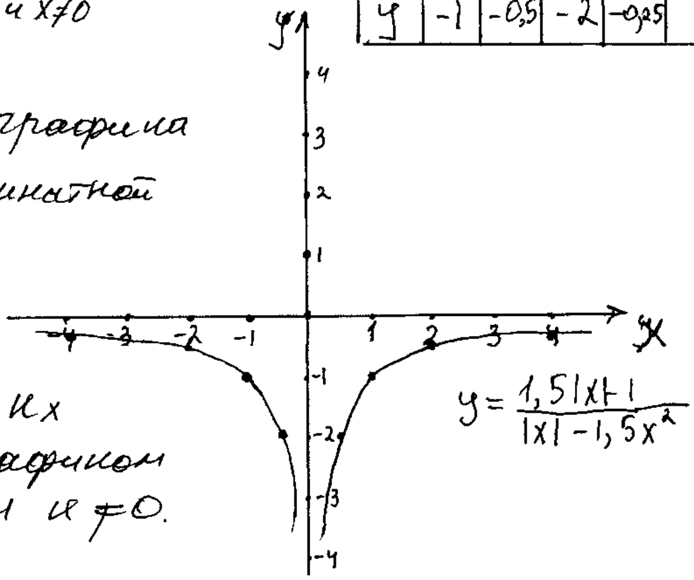
$y=-\frac{1}{x}$, гипербола.

x	∅	1	2	4	0,5
y	/	-1	-0,5	-0,25	-2

2) Построю график функции $y=\frac{1}{x}$ при $x<0$. и $x \neq 0$

x	-1	-2	-0,5	-4	
y	-1	-0,5	-2	-0,25	

Построю оба графика на одной координатной плоскости.



Прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек при $k \neq 0$.

Ответ: 0.

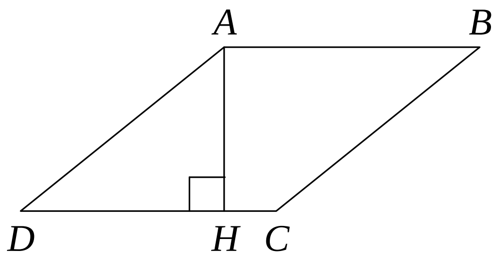
Комментарий. График построен с ошибкой: не выколоты точки, в которых функция не определена.

Оценка 0 баллов.

Задание 23

Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Решение.



$ABCD$ — ромб, поэтому $AD = DC = DH + HC = 29$. Из треугольника ADH находим:

$$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = 20.$$

Ответ: 20.

Критерии оценивания выполнения задания 23

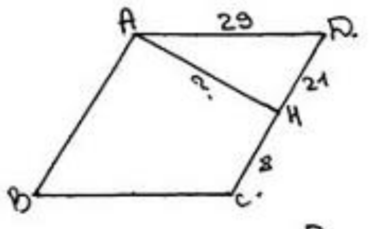
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Примеры оценивания решения задания 23

Пример 1. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

задание 23



Дано: ABCD - ромб

AH - высота

CH = 8

DH = 21

Найти: h_{ABCD}

Решение:

1) DC = AD = AB = BC = 29 (т.к. у ромба все стороны равны)

2) △ADH. По т. Пифагора:

$AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

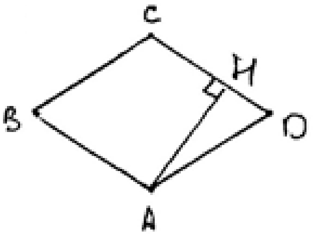
Ответ: 20 см

Комментарий. Решение полное и верное.

Оценка 2 балла.

Пример 2. Высота, опущенная из вершины ромба, делит противоположную сторону на отрезки равные 24 и 2, считая от вершины острого угла. Вычислите длину высоты ромба.

Ответ: 10.



Дано:
$ABCD$ - ромб
AH - высота
$CH = 2$
$DH = 24$
AH - ?

Решение:
1) т.к. ромб стороны равны $CD = AD = CH + DH$
$AD = 26$

2) $AH = \sqrt{AD^2 - DH^2}$ (по th Пифагора на $\triangle AHD$)
$AH = \sqrt{676 - 576} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Отв: $10\sqrt{2}$

Комментарий. Вычислительная ошибка при нахождении разности под знаком корня.

Оценка 1 балл.

Пример 3. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

23.

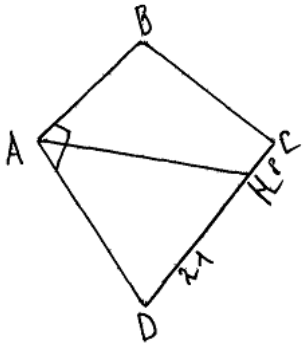
Дано:

ABCD – ромб

AH – высота

DH=21

CH=8



Найти:

AH – ?

Решение:

~~По свойству высоты, опущенной из прямого угла:~~

~~∠A – прямой ⇒ AH =~~

$AD = DH + HC = 21 + 8 = 29$ (по свойству 2-ух пропорциональных сторон).

Рассмотрим ΔADH:

~~∠Б~~ $\angle H$ – прямой $\Rightarrow \Delta ADH$ – прямоугольный

По теореме Пифагора:

$AH^2 = AD^2 - DH^2$

$AH = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

Ответ: AH=20

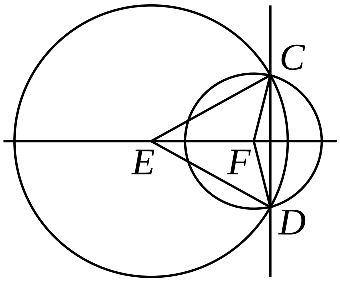
Комментарий. Ответ верный, однако, решение содержит геометрическую ошибку: сторона AD не складывается из отрезков DH и HC. Рисунок не соответствует решению.

Оценка 0 баллов.

Задание 24

Окружности с центрами в точках E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

Доказательство. Точка E равноудалена от точек C и D, поэтому эта точка лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CD. Аналогично, точка F лежит на серединном перпендикуляре к отрезку CD. Значит, прямая EF является серединным перпендикуляром к отрезку CD.



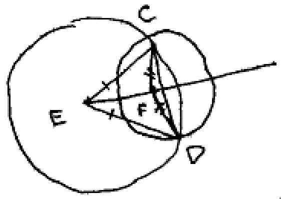
Критерии оценивания выполнения задания 24

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит несущественные недостатки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Примеры оценивания решения задания 24

Пример 1. Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, причём точки *E* и *F* лежат по одну сторону от прямой *CD*. Докажите, что прямые *CD* и *EF* перпендикулярны.

24.



Дано: CD - прямая, (·)C и (·)D - пересечение двух окружностей

Доказать: $CD \perp EF$

Доказательство.

1) EC = ED - радиусы

FC = FD - радиусы

2) (·)E и (·)F равноудалены от концов отрезка CD

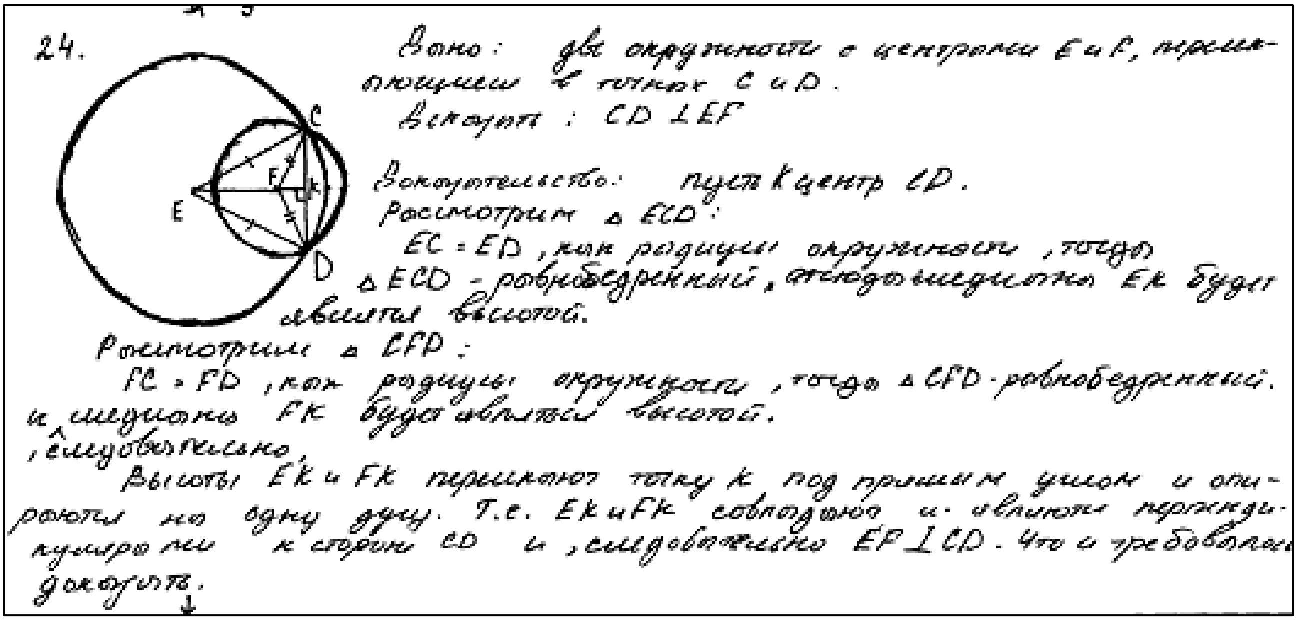
=> EF - срединный перпендикуляр => $CD \perp EF$

ч.т.д.

Комментарий. Доказательство понятное, полное и верное.

Оценка 2 балла.

Пример 2. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.



24\. Дано: две окружности с центрами E и F, пересекающиеся в точках C и D.
Доказать: $CD \perp EF$
Доказательство: пусть K центр CD.
Рассмотрим △ECD:
EC = ED, как радиусы окружности, тогда △ECD – равнобедренный, отсюда медиана EK будет являться высотой.
Рассмотрим △CFD:
FC = FD, как радиусы окружности, тогда △CFD – равнобедренный и, следовательно, медиана FK будет являться высотой.
Высоты EK и FK пересекают точку K под прямым углом и опираются на одну дугу. Т.е. EK и FK совпадают и являются перпендикулярами к стороне CD и, следовательно $EF \perp CD$. Что и требовалось доказать.

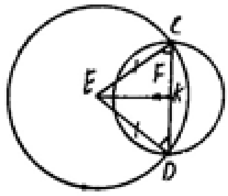
Комментарий. В последнем абзаце содержатся лишенные смысла утверждения «высоты пересекают точку под прямым углом», «высоты опираются на одну дугу». Имеется в виду, что оба отрезка EF и FK перпендикулярны CD, и это доказано выше. Поскольку рассуждение, в целом, понятное и верное, эти недостатки можно отнести к несущественным неточностям.

Оценка 1 балл.

Пример 3. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, причём точки E и F лежат по одну сторону от прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

Дано:
окр (E); окр (F)
окр $(E) \cap$ окр $(F) = C$ и D

Док-ть: $CD \perp EF$



~~Решение~~ Доказательство

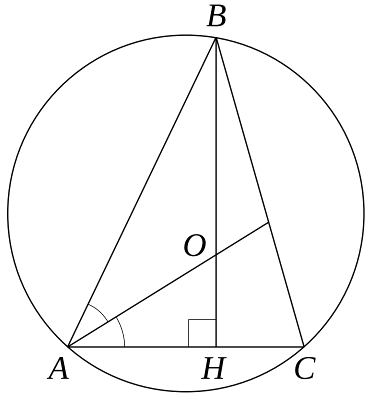
Проведём EC и ED — радиусы, тогда $EC = ED$.
$\triangle ECD$ - равнобедренный, т.к $EC = ED$ (как радиусы) $\Rightarrow \angle EDC = \angle ECD$, $CK = KD \Rightarrow \triangle EKC = \triangle EKD$ (по 2 сторонам и углу между ними).
Тогда $\angle CEK = \angle DEK \Rightarrow EK$ - биссектриса $\angle CED$. В равнобедренном треугольнике биссектриса, выпущенная из вершины, является медианой и высотой $\Rightarrow EF \perp CD$ ч.т.д.

Комментарий. Не доказано, что $CK = KD$, не доказано, что точка F лежит на высоте EK. Без этого рассуждение не является достаточным.

Оценка 0 баллов.

Задание 25

В треугольнике ABC биссектриса угла A, делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $25:24$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC=14$.



Решение. Пусть биссектриса, проведенная из угла A, пересекает высоту BH в точке O (см. рис.). Пользуясь свойством биссектрисы, из треугольника ABH находим:

$$\frac{BA}{AH}=\frac{BO}{OH}=\frac{25}{24}.$$

Следовательно,

$$\cos A=\frac{AH}{AB}=\frac{24}{25}.$$

Тогда

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{24}{25}\right)^2}=\frac{7}{25}.$$

По теореме синусов из треугольника ABC находим:

$$\frac{BC}{2\sin A}=\frac{14\cdot 25}{2\cdot 7}=25.$$

Ответ: 25.

Критерии оценивания выполнения задания 25

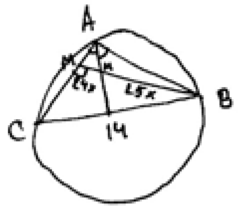
Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Примеры оценивания решения задания 25

Пример 1. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $25:24$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 14$.

Ответ: 25.

Дано:
AH – биссектриса
$\frac{HM}{BH} = \frac{24}{25}$
$BC = 14$
Найти:
R



Решение:
AH – биссектриса (по условию)
$\Downarrow$
$\frac{AM}{AB} = \frac{MH}{BH} = \frac{24}{25}$

Пусть $AM = 24y$, тогда
$AB = 25y$
$\Downarrow$
$MB = 7y$ (по теореме Пифагора)
$\Downarrow$
$\Leftarrow \sin\angle A = \frac{7}{25}$

$2R = \frac{CB}{\sin\angle A} = \frac{14}{\frac{7}{25}} = 50$
$\Downarrow$
$R = 25$

Ответ: 25.

Комментарий. Решение полное и верное.

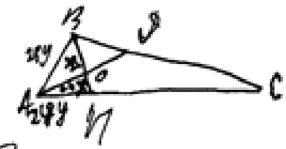
Оценка 2 балла.

Пример 2. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $25:24$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 14$.

Ответ: 25.

Дано:
$\triangle ABC$
BH – высота
AO – биссектриса
$BC = 14$
$BO : OH = 25x : 24x$

R – ?



Решение:

1) $\frac{AB}{AH} = \frac{BO}{OH} = \frac{24(y)}{25(y)}$ – свойство биссектрисы в $\triangle ABH$

2) $\triangle ABH$ – прямоугольный =>
$25y^2 = AB^2 = AH^2 + BH^2$ (Пифагор) =>
$25y^2 = 24y^2 + (49x)^2 \Rightarrow y^2 = (49x)^2 \Rightarrow y^2 = 49x^2$
$\Rightarrow y = 7x$

3) $\sin\angle BAH$ в $\triangle BAH = \frac{BH}{AB} = \frac{49x}{25y} = \frac{\cancel{49x}\,7}{\cancel{7x}\cdot 25} = \frac{7}{25}$

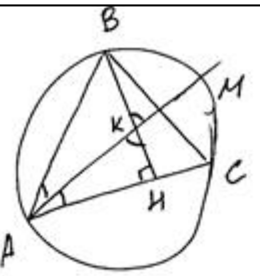
4) $2R = \frac{BC}{\sin A}$ (следствие из теоремы синусов) =>
$2R = \frac{14}{\frac{7}{25}} \Rightarrow 2R = 50 \Rightarrow R = 100$ Ответ: $R = 100$

Комментарий. Ход решения понятен, все шаги присутствуют, но допущена математическая ошибка: при возведении в квадрат выражений $25y$ и $24y$ коэффициенты остались без изменения.

Оценка 0 баллов.

Пример 3. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $25:24$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 14$.

Ответ: 25.



Решение

1) ∠BKM опирается на ту же дугу что и ∠BAM, значит

∠BKM = ∠BAM

2) ∠BKM = ∠AKH, как вертикальные углы

∠BKM = ∠BAM = ∠MAC

Дано

△ABC

AM – биссектриса

BH - высота

BK : KH = 25 : 24

BC = 14

R - ?

3) Рассмотрим △AKH:

∠AHB = 90° - прямой, т.к. BH - высота к AC.

∠KAH = ∠AKH (по ②.), то

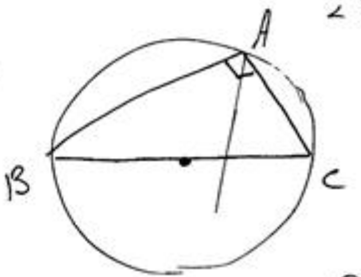
∠KAC = 45°

4) ∠BAC = ∠BAM + ∠MAC

∠MAC = 45° = ∠BAM, то

∠BAC = 45° + 45° = 90°

5)



∠BAC = 90°, то

BC = d = 2R = 14

R = 7

Ответ: 7

Комментарий. Свойство вписанных углов применяется к углу BKM, который не является вписанным. Это геометрическая ошибка.

Оценка 0 баллов.

ЧАСТЬ 3 Материалы для практических занятий

Оцените решения, данные в упражнениях. Комментарии и ответы в конце части.

Задание 20

Упражнение 20.1. Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

Ответ: $\left(2; 2+\sqrt{3}\right)$.

№20

$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$

$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$

$(x-2)((x-2) - \sqrt{3}) < 0$

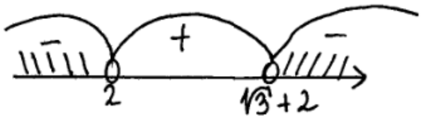
Метод интервалов:

Нули функции: $(x-2)((x-2) - \sqrt{3}) = 0$

$(x-2)(x-2-\sqrt{3}) = 0$

$x-2=0$ или $x-2-\sqrt{3}=0$

$x=2$ $\qquad$ $x=\sqrt{3}+2$



Ответ: $x \in (-\infty; 2) \cup (\sqrt{3}+2; +\infty)$

Упражнение 20.2. Решите уравнение $x^4 = (x-2)^2$.

Ответ: $-2, 1$.

20. $x^{\cancel{4}\,2} = (x-2)^{\cancel{4}}$

$x^2 - x + 2$ или $x^2 + x - 2$

$D = 1 - 4 \cdot 2 = -7$ нет корней $D = \cancel{x}\, b^2 - 4ac$

$x^2 + x - 2 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot -2 = 9$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$x_1 = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x_2 = \frac{-1-3}{2} = -\frac{4}{2} = -2$

Ответ: -2 ; 1

Упражнение 20.3. Решите уравнение $(x-2)\cdot(x^2+6x+9) = 6(x+3)$.

Ответ: $-4, -3, 3$.

№20 $(x-2)(x^2+6x+9) = 6(x+3)$

$(x-2)(x+3)^2 - 6(x+3) = 0$

$(x+3)((x-2)(x+3)-6) = 0$

$x = -3$ и $x^2 + 3x - 2x - 6 - 6 = 0$

$x^2 + x - 12 = 0$

$a = 1$ | $D = 1 + 48 = 49$

$b = 1$ | $D > 0$, 2 корня

$c = -12$ | $x_1 = \frac{-1-7}{2} = \frac{-8}{2} = -4$

$x_2 = \frac{-1+7}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Ответ: -4 ; 3

Упражнение 20.4. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$.

Ответ: $-4, -1, 1$.

1-2 0

$x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

$x^2 (x+4) - 1 \cdot (x+4)$

$(x+4)(x^2-1) - 5$

$x^2 - 4 = 0$

$x_1 = -1$

$x^2 - 1 = 0$

$x_2^2 = 1$

$x_2 = 1$

$x_2 = -1$

~~$x_3 = -1$~~

Ответ: $-4; 1; -1$

Упражнение 20.5. Решите уравнение $x^2-3x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+40$.

Ответ: -5.

20.

$x^2-3x+\sqrt{6-x}=\sqrt{6-x}+40$

$x^2-3x+\cancel{\sqrt{6-x}}-\cancel{\sqrt{6-x}}-40=0$

$x^2-3x-40=0$

$D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-40)=9+160=169$

$D>0\Rightarrow 2k$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3)+\sqrt{169}}{2\cdot 1}=\frac{3+13}{2}=\frac{16}{2}=8$

$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-3)-\sqrt{169}}{2\cdot 1}=\frac{3-13}{2}=\frac{-10}{2}=-5.$

Ответ: $-5;\ 8.$

Упражнение 20.6. Решите уравнение $(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

№ 20

$(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$

$(x-2)(x^2+2x+1)-4(x+1)=0$

$\cancel{x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2-4x-4=0}$

$\cancel{x^3-7x-6=0}$

$\cancel{x^3-7x=6}$

$\cancel{x(x^2-7)=6}$

$\cancel{x=6}$ ~~или~~ $\cancel{x^2-7=6}$

$\cancel{x^2=13}$ $\cancel{x=\sqrt{13}}$ ~~Ответ:~~ $\cancel{\sqrt{13};\ 6}$

$(x-2)(x+1)^2-4(x+1)=0$

$(x+1)((x-2)(x+1)-4)=0$

$x+1=0$ или $(x-2)(x+1)-4=0$

$x=-1$ $\quad$ $x^2-x-6=0$

$D=1-4(-6)=\sqrt{25}=5$

$x_1=\frac{1-5}{2}=2$

$x_2=\frac{1+5}{2}=3$

Ответ: $-1; 2; 3$

Упражнение 20.7. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $0{,}8,\ 1{,}5$.

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$$

$$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{1+3x-3-10x^2+20x-10}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{-10x^2+23x-12}{(x-1)^2}=0 \qquad D=23\cdot 23-4\cdot 10\cdot 12=529-480=49$$

$$x_{1,2}=\frac{-23\pm 7}{-20} \qquad \text{Ответ: } x_1=\frac{2}{3} \quad x_2=\frac{4}{5}$$

Упражнение 20.8. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0{,}2,\ \ 0{,}5$.

$$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0 \ \Big|\cdot x^2\ ;\ x\neq 0$$

$$1+3x-10x^2=0\ \big|\cdot(-1)$$

$$10x^2-3x-1=0$$

$$D=b^2-4ac$$

$$D=(-3)^2-4\cdot 10\cdot(-1)=49\ ;\ \sqrt{D}=\pm 7$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\ ;\ x=\frac{3\pm 7}{2\cdot 10}$$

$$x_1=\frac{3+7}{20}$$

$$x_1=0{,}5$$

$$x_2=\frac{3-7}{20}$$

$$x_2=-0{,}2$$

Ответ: $x_1=0{,}5$; $x_2=-0{,}2$

Упражнение 20.9. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0,2,\ 0,5$.

$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$

$\frac{1}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{10x^2}{x^2}=0$ $\qquad x\neq 0$

$1+3x-10x^2=0$

$-10x^2+3x+1=0$

$D=9-4\cdot 1\cdot(-10)=9+40=49$

$\sqrt{D}=\pm 7$

$x_1=\frac{-3-7}{-20}=\frac{-10}{-20}=2$

$x_2=\frac{-3+7}{-20}=\frac{4}{-20}=-0,2$

Ответ: $x_1=2,\ x_2=-0,2$

Упражнение 20.10. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0,2,\ 0,5$.

$$\overset{1/}{\frac{1}{x^2}} + \overset{x/}{\frac{3}{x}} - \overset{x^2/}{10} = 0 \qquad \text{ОДЗ: } x \neq 0$$

$$1 + 3x - 10x^2 = 0.$$

$$-10x^2 + 3x + 1 = 0 \qquad :(-1).$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4\cdot(-1)\cdot 10 = 49.$$

$$x_1 = \frac{3+7}{20} = 0,5.$$

$$x_2 = \frac{3-7}{20} = -0,8.$$

Ответ: 0,5; -0,8.

Упражнение 20.11. Решите уравнение $(x-2)\left(x^2+2x+1\right)=4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

$(x-2)(x^2+2x+1) = 4(x+1)$

$(x^2+2x+1) = (x+1)^2$

$(x-2)(x+1)^2 - 4(x+1) = 0$

$(x-2)(x+1)(x+1) - 4(x+1) = 0$

$(x+1)((x-2)(x+1)-4) = 0$

$x+1=0$

$x=-1$

$(x-2)(x+1)-4=0$

$x^2-2x+x-2=0$

$x^2-3x-2=0$

$x^2-3x-2=0$

$a=1$ $b=-3$ $c=-2$

$D=b^2-4ac$

$D=3^2-4\cdot 1\cdot(-2)=9+8=-1$

$D<0$ корней нет

Ответ: -1

Упражнение 20.12. Решите уравнение $(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

$(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$

$(x-2)(x+1)^2=4(x+1)$

$(x-2)(x+1)(x+1)-4(x+1)=0$

$(x+1)^2((x+1)(x-2)-4)=0$

$(x+1)^2(x^2-2x+x-2-4)=0$

$(x+1)^2(x^2-x-6)=0$

$x^2+1=0 \qquad x^2-x-6=0$

$x^2=1 \qquad D=b^2-4ac$

$x^2=-1 \qquad D=1+24$

$D=25$

$x_1=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$

$x_2=\frac{1+5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

Ответ: 1; −1; 3; −2

Упражнение 20.13. Решите уравнение $(x-2)\left(x^2+2x+1\right)=4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

$$(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$$

$$(x-2)(x+1)^2-4(x+1)=0$$

$$(x-1)\big((x-2)(x+1)-4\big)=0$$

$x-1=0$ или $(x-2)(x+1)-4=0$

$x=\cancel{1}\ 1$ $\qquad x^2+x-2x-2-4=0$

$$x^2-x-6=0$$

$$D=1-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25=5^2$$

$$x_1=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$x_2=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Ответ: $-2; 1; 3$

Задание 21

Упражнение 21.1. Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

21)

	S	v	t
пр-а	210	$x-3$	$\frac{210}{x-3}$
обрат	210	$x+3$	$\frac{210}{x+3}$

$$\frac{210^{\,x+3}}{x-3} - 4^{\,3x^2-9x} = \frac{210^{\,x-3}}{x+3}$$

$$210x+630-12x^2+32x=210x-630$$

$$-12x^2+32x+1260=0 \langle -3x^2+8x+315=0 \rangle$$

$$D=64-4\cdot(-3)\cdot 315$$

$$D=\cancel{64}\ \sqrt{3844}=62$$

$$x_1=\frac{-8+62}{-6}=\frac{54}{-6}=-9 \quad \times$$

$$x_2=\frac{-8-62}{-6}=\frac{-70}{-6}=11\frac{4}{6}$$

Ответ: $11\frac{4}{6}$ км/ч

Упражнение 21.2. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

1) Пусть работа, которую нужно сделать во всех случаях равна 1.

2) Пусть производительность труда Игоря – x, Паши – y, а Володи – z

3) Тогда: производительность труда Игоря и Паши $= x+y=\frac{1}{20}$ (ч)

Паши и Володи – $y+z=\frac{1}{21}$ (часа)

Володи и Игоря – $z+x=\frac{1}{28}$ (часа)

4) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{20} \\ y+z=\frac{1}{21} \\ z+x=\frac{1}{28} \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{20}-y$$

$$z=\frac{1}{21}-y$$

$$\frac{1}{20}-y+\frac{1}{21}-y=\frac{1}{28}$$

$$-2y=\frac{1}{28}-\frac{1}{20}-\frac{1}{21}$$

$$-2y=\frac{15-20-21}{420}$$

$$-2y=\frac{-26}{420}$$

$$y=\frac{13}{420}$$

$$x=\frac{1}{20}-\frac{13}{420}$$

$$x=\frac{21}{420}-\frac{13}{420}$$

$$x=\frac{8}{420}$$

$$z=\frac{1}{21}-\frac{13}{420}$$

$$z=\frac{20}{420}-\frac{13}{420}$$

$$z=\frac{7}{420}$$

5) Таким образом производительность всех мальчиков: $\frac{8}{420}+\frac{7}{420}+\frac{13}{420}=\frac{28}{420}$ – в час, а в минуту: $\frac{28}{420\cdot 60}$

6) Время за которое они выполнят работу:

$$1 : \frac{28}{420\cdot 60}=\frac{420\cdot 60}{28}=\frac{60\cdot 60}{4}=900 \text{ минут}$$

Ответ: за 900 минут мальчики прокрасят забор, работая втроём.

Упражнение 21.3. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

И+П = 14

П+В = 15

В+И = 30

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y+z=\frac{1}{15} \\ z+x=\frac{1}{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=\frac{1}{14} \\ y=\frac{1}{15}-z \\ x=\frac{1}{30}-z \end{cases}$$

$$\frac{1}{15}-z+\frac{1}{30}-z=\frac{1}{14}$$

$$-2z+\frac{3}{30}=\frac{1}{14}$$

$$-2z=\frac{1}{14}-\frac{3}{30}$$

$$-2z=\frac{30-42}{420}$$

$$2z=\frac{12}{420}$$

$$z=\frac{12}{420}:2=\frac{12}{420}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{70}$$

$$y=\frac{1}{15}-\frac{1}{70}=\frac{70-15}{1050}=\frac{55}{1050}$$

$$x=\frac{1}{30}-\frac{1}{70}=\frac{70-30}{2100}=\frac{40}{2100}=\frac{4}{210}$$

$$\frac{1}{70}+\frac{55}{1050}+\frac{4}{210}=\frac{7}{210}+\frac{55}{1050}=\frac{1}{30}+\frac{55}{1050}=\frac{1050+1650}{31500}=$$

$$=\frac{2700}{31500}=\frac{27}{315}\text{ (ч)}$$

$$\frac{27}{315}\cdot\frac{60}{1}=\frac{1620}{315}=5\frac{45}{315}=5\frac{1}{7}\text{ (минут)}$$

Ответ: $5\frac{1}{7}$ (минут)

Упражнение 21.4. Два велосипедиста одновременно отправляются в 209-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 8 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 8 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 11 км/ч.

21. Пусть x км/ч – скорость 2 велосипедиста, тогда (x+8) км/ч – скорость 1 велосипедиста, общее расстояние 209 км.

$\frac{209}{x}$ ч – время 2 велосипедиста

$\frac{209}{x+8}$ ч – время 1 велосипедиста.

$\frac{209}{x}^{\backslash x+8} - \frac{209}{x+8}^{\backslash x} = 8^{\backslash x(x+8)}$

$209x + 1672 - 209x = 8x^2 + 64x$

$-8x^2 - 64x + 1672 = 0 \quad | {-8}$

$x^2 + 8x - 209 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-209) = 64 + 836 = 900 \ (D > 0)$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

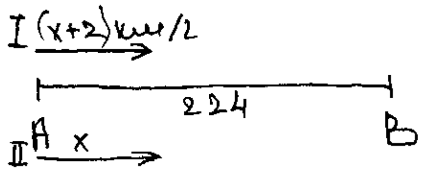
$x_1 = \frac{-8-\sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-8-30}{2} = -16$ – не подходит по условию задачи.

$x_2 = \frac{-8+\sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-8+30}{2} = 11.$

Ответ: 11 км/ч.

Упражнение 21.5. Два велосипедиста одновременно отправляются в 224-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 14 км/ч.



	V	t	S
I	(x+2) км/ч	$\frac{240}{x+2}$ ч	240 км
II	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км

По условию задачи известно, что первый велосипедист прибыл к финишу раньше на 2 часа второго, отсюда уравнение.

$$\frac{240}{x}-\frac{240}{x+2}=2$$

$$\frac{240}{x}^{\backslash x+2}-\frac{240}{x+2}^{\backslash x}-2^{\backslash x^2+2x}$$

$$\frac{240(x+2)-240x-2(x^2+2x)}{x(x+2)}=0$$

$$\cancel{240x}+480-\cancel{240x}-2x^2-4x=0$$

$$-2x^2-4x+480=0 \quad /:-2$$

$$x^2+2x-240=0$$

$D=b^2-4ac$

$D=4-4\cdot1\cdot(-240)=4+960=964$

$x_1=\frac{-2-\sqrt{964}}{2}$ — не подходит по усл. задачи т.к. <0

$x_2=\frac{-2+\sqrt{964}}{2}$ — скорость второго велосипедиста

Ответ: $\frac{-2+\sqrt{964}}{2}$ скорость второго велосипедиста.

ОДЗ

$x(x+2)\neq0$

$x\neq0 \quad x+2\neq0$

$x\neq-2$

Упражнение 21.6. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

21.

	v части забора/ч	t ч	A части забора
И+П	$\frac{1}{14}$	14	1
П+В	$\frac{1}{15}$	15	1
В+И	$\frac{1}{30}$	30	1

$$v(\text{И}+\text{П}+\text{П}+\text{В}+\text{В}+\text{И}) = \frac{1}{14} + \frac{1}{15}^{\backslash 2} + \frac{1}{30} = \frac{1}{14}^{\backslash 5} + \frac{1}{10}^{\backslash 7} = \frac{5+7}{70} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35}\ (\text{ч.з./ч})$$

$$t = \frac{A}{v} = \frac{1}{\frac{6}{35}} = \frac{35}{6}\text{ч} = \frac{35 \cdot \cancel{60}^{10}}{\cancel{6}}\text{мин} = 350\text{ мин}$$

Ответ: 350

Упражнение 21.7. Два автомобиля одновременно отправляются в 720-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 30 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 90 км/ч.

	V, км/ч	t, ч		S, км
I авт	$x+30$	$\frac{720}{x+30}$	чем на 4ч раньше	720
II авт	x	$\frac{720}{x}$		720

Пусть x – собств. скорость II автомобиля

$$\frac{720}{x} - \frac{720}{x+30} = 4 \quad \Big| \cdot x(x+30) \qquad x \neq 0, \; x \neq -30$$

$$720x + 2160 - 720x = 4x^2 + 120x$$

$$2160 - 4x^2 - 120x = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$4x^2 + 120x - 2160 = 0 \quad \Big| : 4$$

$$x^2 + 30x - 540 = 0$$

$$D = 900 + 4 \cdot 540 = 3060$$

$$x_1 = \frac{-30 + 6\sqrt{85}}{2} = -15 + 3\sqrt{85}$$

$$x_2 = \frac{-30 - 6\sqrt{85}}{2} = -15 - 3\sqrt{85} < 0$$

$$V_{\text{I автомобиля}} \to -15 + 3\sqrt{85} + 30 = 3\sqrt{85} + 15$$

Ответ: $3\sqrt{85} + 15$

Упражнение 21.8. Два автомобиля одновременно отправляются в 720-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 30 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 90 км/ч.

Обозначим v 1 автомобиля за x.

	v км/ч.	t ч.	S км.
1 авто	x	$\frac{x}{720}$	720
2 авто	$x-30$	$\frac{x-30}{720}$	720

Известно, что 1 авто. приехал на 4 ч. раньше 2 авто.

Запишем уравнение:

$$\frac{720}{x-30}^{\backslash x} - \frac{720}{x}^{\backslash x-30} = 4, \ \backslash x(x-30)$$

ОДЗ: $x(x-30) \neq 0$

$x \neq 0$ и $x \neq 30$.

$$\frac{720x - 720(x-30) - 4x(x-30)}{x(x-30)} = 0$$

$$\frac{\cancel{720x} - \cancel{720x} + 21600 - 4x^2 + 120x}{x(x-30)} = 0$$

$$-4x^2 + 120x + 21600 = 0 \ \Big| :(-4),$$

$$x^2 - 30x - 5400 = 0,$$

$$D = 900 + 21600 = 22500 = 150^2.$$

$$x_1 = \frac{30-150}{2} = -60$$ – не удовлетворяет условиям задачи.

$$x_2 = \frac{30+150}{2} = 80$$

v 1 авто $= x$, значит v 1 авто $= 80$ км/ч.

Ответ: 80 км/ч.

Упражнение 21.9. Два автомобиля одновременно отправляются в 720-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 30 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 90 км/ч.

Пусть x км/ч – скорость I автомобиля,
тогда $(x-30)$ км/ч – скорость II автомобиля

	V (км/ч)	t (ч)	S (км)
I	x	$\frac{720}{x}$	720
II	$x-30$	$\frac{720}{x-30}$	720

По условию:
$t_{II} > t_I$ на 4 ч $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~Составим уравнение~~:
$t_{II} - t_I = 4$
Составим уравнение:

$$\frac{720}{x-30} - \frac{720}{x} = 4$$

ОДЗ:
$x \neq 30 \quad x > 0$

$$\frac{720x - 720(x-30)}{x(x-30)} = 4$$

$$720x - 720x + 720 \cdot 30 = 4x(x-30)$$

$$4x^2 - 120x - 720 \cdot 30 = 0$$

$$x^2 - 30x - 5400 = 0$$

$D = 900 + 21600 = 22500$

$x_1 = \frac{30 + \sqrt{22500}}{2} = 90$ (км/ч) – скорость I автомобиля

$x_2 = \frac{30 - \sqrt{22500}}{2} = -60$ (км/ч) – не удовлетворяет ОДЗ

~~Ответ: 90 км/ч~~

Ответ: 60 км/ч

Задание 22

Упражнение 22.1. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2,\ m>6$.

№22. $y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при } x \geq -2 \\ -\frac{6}{x} & \text{при } x<-2 \end{cases}$

1) $y=x^2+2$ при $x \geq -2$

$y=x^2+2$ – парабола вида $y=x^2$

$x_0=-\frac{b}{2a}=0$

$y_0=0+2=2$

Вершина $(0;2)$

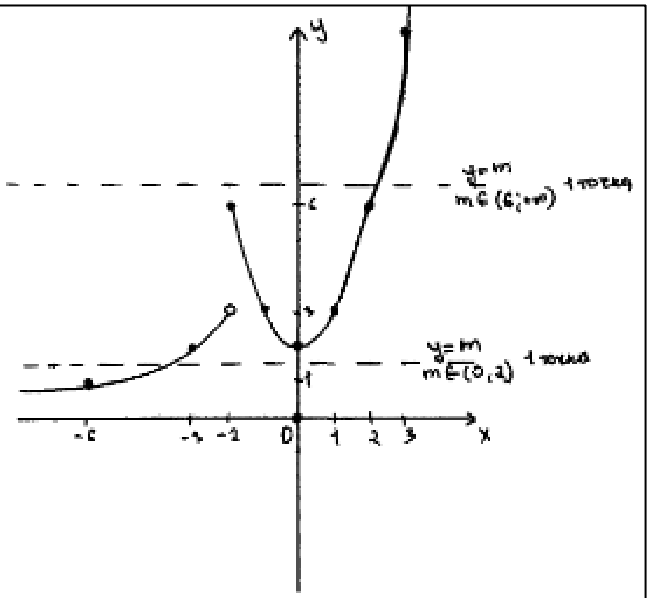
x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6	11

2) $y=-\frac{6}{x}$ при $x<-2$

$y=-\frac{6}{x}$ – график – гипербола

x	-6	-3	-2
y	1	2	3

← выколотая точка



$y=m$ – прямая параллельная Ox, имеет 1 общую точку с построенным графиком при $m\in(0;2)\cup(6;+\infty)$

Ответ: $(0;2)\cup(6;+\infty)$

Упражнение 22.2. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x\geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x<-2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2$, $m>6$.

22.

$y=\begin{cases} x^2+2, & x\geq -2 \\ -\frac{6}{x}, & x<-2 \end{cases}$ — кусочно заданная функция с $D(y)=\mathbb{R}$

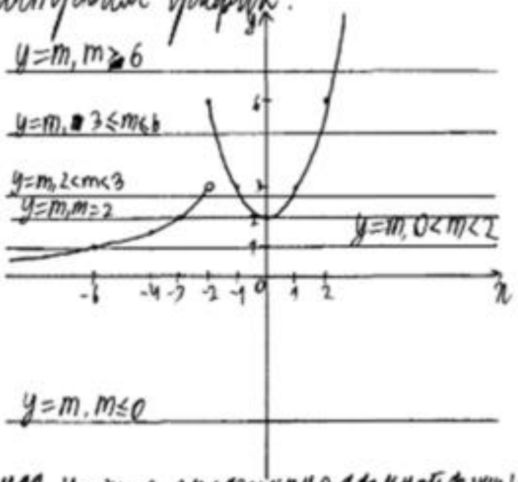
$y=x^2+2$ — квадратичная ф-ция, график — парабола с ветвями, направленными вверх и вершиной $(0;2)$

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6

$y=-\frac{6}{x}$ — ф-ция обратной пропорциональности, график — гипербола, расположенная в II и IV четвертях

x	-2	-3	-4	-6
y	3	2	$1\frac{1}{2}$	1

Построим график:



Прямая $y=m$ с графиком заданной ф-ции имеет: • 0 общих точек при $m\in(-\infty;0]$

• 1 общую точку при $m\in(0;2)\cup(6;+\infty)$

• 2 общие точки при $m\in\{2\}\cup[3;6]$

• 3 общие точки при $m\in(2;3)$

Ответ: $(0,2)\cup(6;+\infty)$

Упражнение 22.3. Постройте график функции $y=\dfrac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Ответ: $0, -2,25,\ 2,25$.

$$y=\frac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$$

(1) при $x\geq 0$

$$y=\frac{1,5\cdot x-1}{x-1,5\cdot x^2}=\frac{1,5x-1}{-(1,5x^2-x)}=-\frac{(1,5x-1)}{x(1,5x-1)}=-\frac{1}{x}.$$

x	1	~~5~~	4	5
y	−1	~~−0,2~~	−0,25	−0,2

$y(1)=-\frac{1}{1}=-1$

~~$y(5)=-\frac{1}{5}=-0,2$~~

$y(4)=-\frac{1}{4}=-0,25$

$y(5)=-\frac{1}{5}=-0,2$

(2) при $x<0$

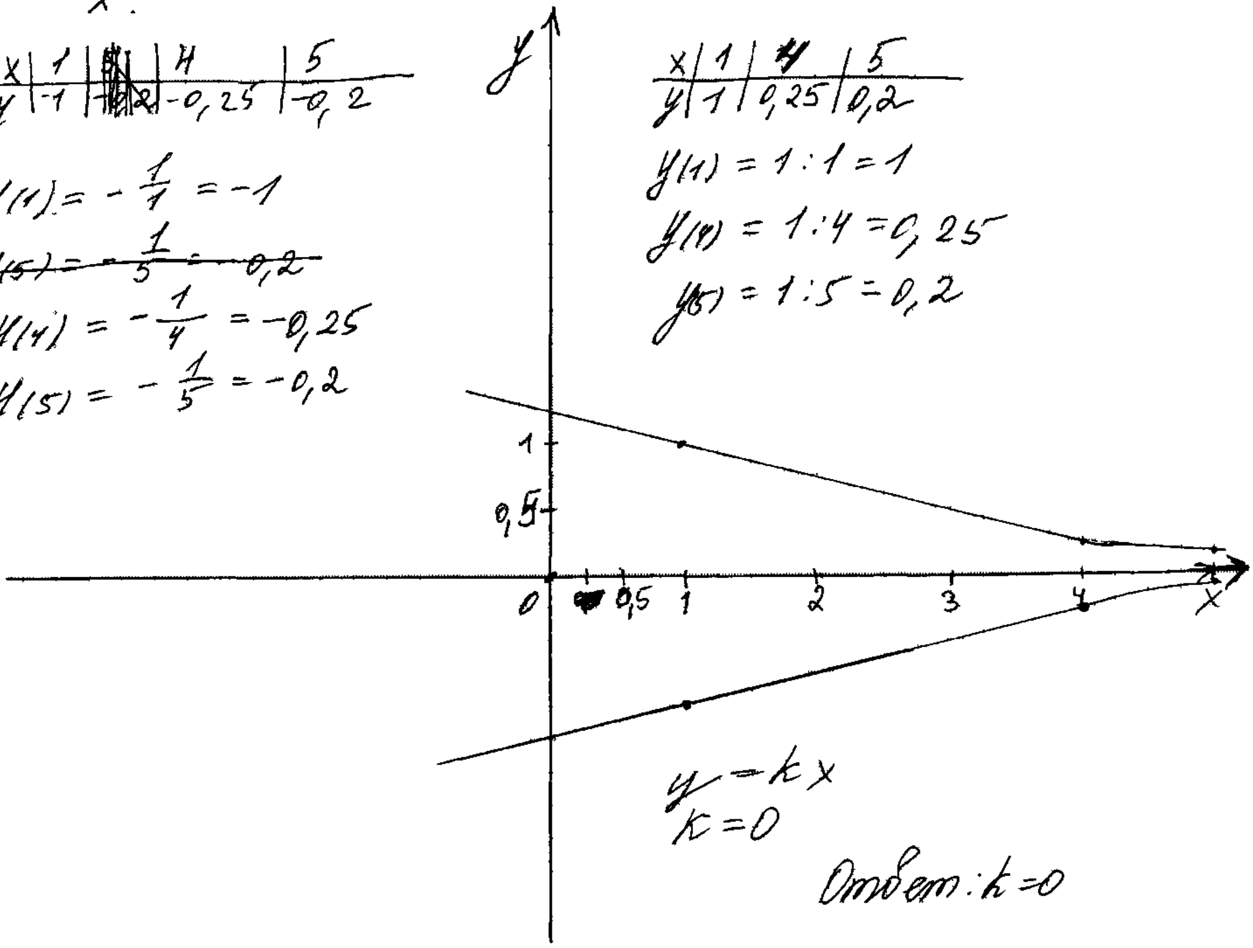
$$y=\frac{1,5\cdot(-x)-1}{-x-1,5\cdot(-x)^2}=\frac{-1,5x-1}{-x-1,5x^2}=\frac{(-1,5x-1)}{x(-1-1,5x)}=\frac{1}{x}$$

x	1	4	5
y	1	0,25	0,2

$y(1)=1:1=1$

$y(4)=1:4=0,25$

$y(5)=1:5=0,2$



$y=kx$

$k=0$

Ответ: $k=0$

Упражнение 22.4. Постройте график функции $y=\dfrac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

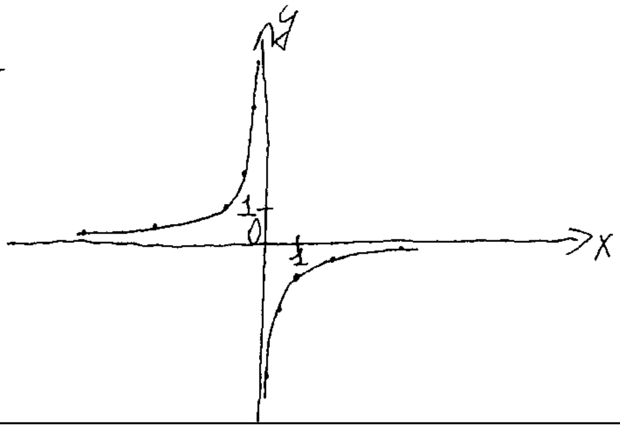
Ответ: $0,\ -2,25,\ \ 2,25$.

№22

$$y=\frac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}=\frac{\cancel{1,5|x|-1}}{-x\cancel{(1,5|x|-1)}}=-\frac{1}{x}$$

$y=-\dfrac{1}{x}$ - гипербола

x	1	2	4
y	-1	-0,5	-0,25



Упражнение 22.5. Постройте график функции $y = \dfrac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Ответ: $0, -6,25, 6,25$.

$y = \dfrac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$

при $x \geq 0$

$x - 2,5x^2 \neq 0$

$x(1 - 2,5x) \neq 0$

$x \neq 0$ или $1 - 2,5x \neq 0$

$2,5x \neq 1$

$x \neq \dfrac{1}{2,5}$

$x \neq 0,4$

при $x < 0$

$-x - 2,5x^2 \neq 0$

$-x(\cancel{1}\ 1 + 2,5x) \neq 0$

$x \neq 0$ или $\cancel{x}$ $2,5x \neq -1$

$x \neq -0,4$

(1сл $|x| \geq 0$)

1сл $x \geq 0$

$|x| = x$

$y = \dfrac{2,5x-1}{x-2,5x^2}$

$y = -\dfrac{1-2,5x}{x(1-2,5x)}$

$y = -\dfrac{1}{x}$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	2	$0,4$
y	-2	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$2,5$

2сл $x < 0$

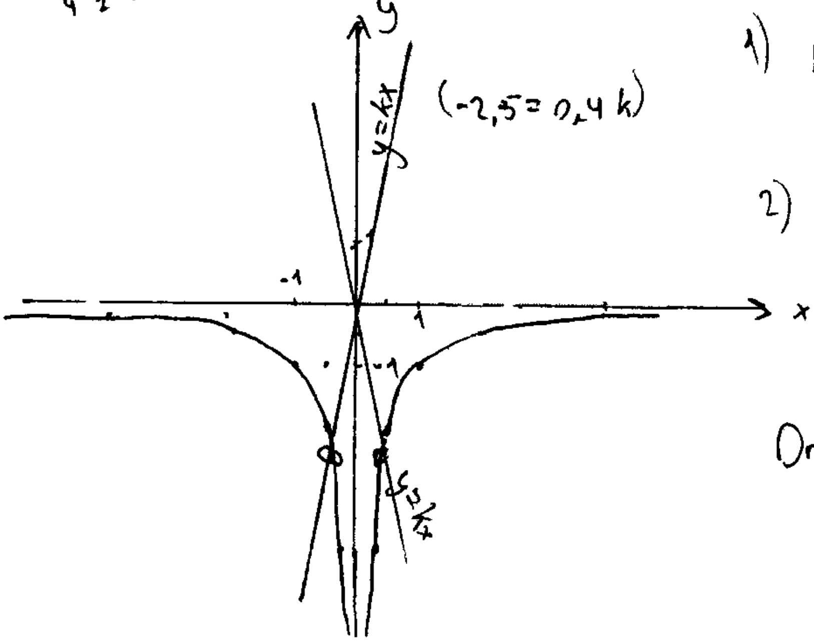
$|x| = -x$

$y = \dfrac{-2,5x-1}{-x-2,5x^2}$

$y = \dfrac{-(2,5x+1)}{-x(1+2,5x)}$

$y = \dfrac{1}{x}$

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-1	-2	-4	$-0,4$
y	-2	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	$-2,5$



$-2,5 = 0,4k$

1) $k = \dfrac{-2,5}{0,4}$ $|\cdot 10$

$k = -6,25$

2) $-2,5 = -0,4k$

$k = \dfrac{-2,5}{-0,4}$

$k = 6,25$

Ответ: $6,25; -6,25$

Упражнение 22.6. Постройте график функции $y = \dfrac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Ответ: $0, -2,25, \ 2,25$.

№22

$y = \dfrac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$

① $y = \dfrac{1,5x-1}{x-1,5x^2}$, при $x \geq 0$

② $y = \dfrac{-1,5x-1}{-x-1,5x^2}$, при $x < 0$

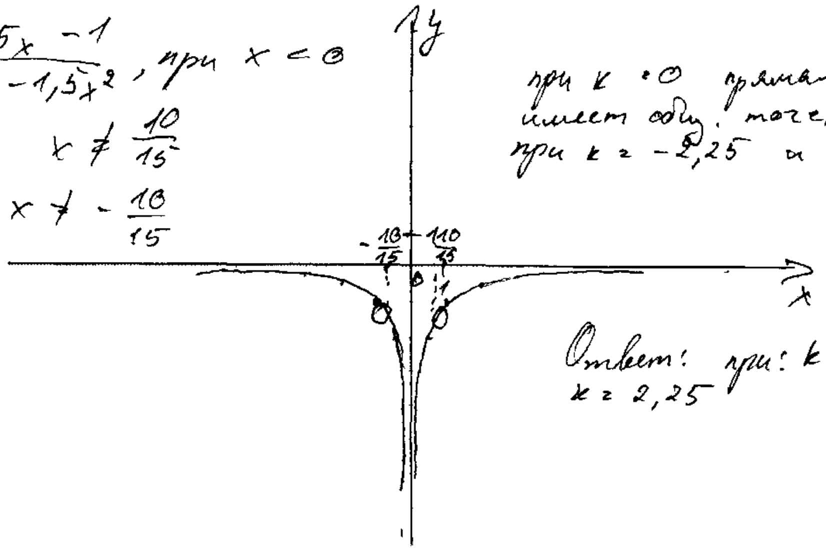
① $x \neq 0$ и $x \neq \dfrac{10}{15}$

② $x \neq 0$ и $x \neq -\dfrac{10}{15}$

① $y = \dfrac{\cancel{1,5x-1}}{-x(\cancel{1,5x-1})} = -\dfrac{1}{x}$

② $y = \dfrac{\cancel{-1,5x-1}}{x(\cancel{-1,5x-1})} = \dfrac{1}{x}$

при $k = 0$ прямая $y = kx$ не имеет общ. точек, а также при $k = -2,25$ и при $k = 2,25$



Ответ: при: $k = 0$; $k = -2,25$; $k = 2,25$

Упражнение 22.7. Постройте график функции $y=\dfrac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$ и определите, при каких значениях *k* прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Ответ: $0, -6,25,\ 6,25$.

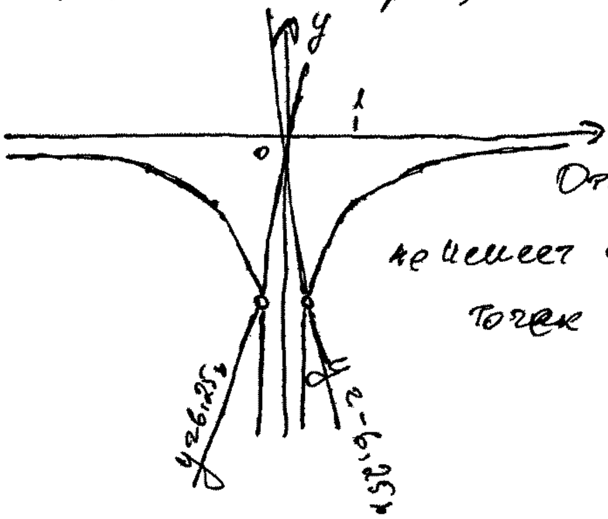
$$y=\frac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$$

Раскрывая модуль данной функции, получим:

$$y=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, \text{ при } x>0,\ x\neq 0 \text{ и } x\neq 0,4\\ \dfrac{1}{x}, \text{ при } x<0,\ x\neq 0 \text{ и } x\neq -0,4\end{cases}$$

$y=-\dfrac{1}{x}$ – обратная пропорциональность, графиком является гипербола во 2 и 4 четверти, выколотая точка: $(0,4; -2,5)$

$y=\dfrac{1}{x}$ – обратная пропорциональность, графиком является гипербола в 1 и 3 четверти, выколотая точка: $(-0,4; -2,5)$



Ответ: прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек при $k=-6,25$; $6,25$

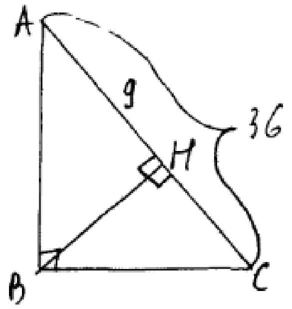
Задание 23

Упражнение 23.1.

Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 9$, $AC = 36$.

Ответ: 18.

23.)



Дано:
$\triangle ABC$
$\angle B = 90^\circ$
$BH \perp AC$
$AH = 9$
$AC = 36$

Найти: AB

Решение:

Расм $\triangle BAH$ и $\triangle BAC$

$\angle A$ - общий
$\angle CBA = \angle AHB = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle BAH \sim \triangle BAC$ (по 1 признаку).

$\cos \angle BAH = \frac{AH}{AB}$ $\cos \angle BAC = \frac{AB}{AC}$

$\frac{AH}{AB} = \frac{AB}{AC}$

$\frac{9}{AB} = \frac{AB}{36}$

$2AB = 324$

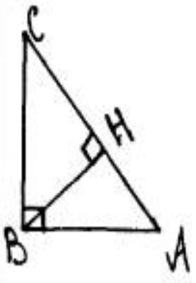
$AB = 162$

Упражнение 23.2.

Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 9$, $AC = 36$.

Ответ: 18.

23.



Дано:

$\angle B = \angle CHB = \angle AHB = 90^\circ$;

$AH = 9$; $AC = 36$.

Найти: AB.

Решение:

$AB^2 = AC \cdot AH = 36 \cdot 9 = 324$

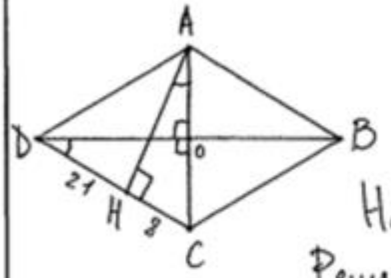
$AB = \sqrt{324} = 18$

Ответ: 18.

Упражнение 23.3. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

№ 23.



Дано: $ABCD$ - ромб; AH - высота ($\angle H = 90^\circ$); ($AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$; $AB = DC = AD = BC$); $DH = 21$; $HC = 8$, AC, DB - диагонали.

Найти: AH - ?

Решение: Рассмотрим $\triangle DOC$ и $\triangle AHC$.

см. лист. 4

$\angle ODC = \angle HAC$ (как $\angle$ с взаимоперпендик. сторонами);

$\triangle DOC$ и $\triangle AHC$ - прямоугол. ($\angle O = \angle H = 90^\circ$) $\Rightarrow$

$\triangle DOC \sim \triangle AHC$ (по 2-м углам).

$$\frac{BO}{AH} = \left(\frac{OC}{HC} = \frac{DC}{AC}\right)$$

Диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам. $\Rightarrow$

$$OC = \frac{1}{2}AC$$

$$\frac{\frac{1}{2}AC}{HC} = \frac{DC}{AC}; \quad AC = \sqrt{2CH \cdot CD} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 29} = \sqrt{16 \cdot 29} = 4\sqrt{29}$$

по теореме Пифагора:

$$AH^2 = AC^2 + CH^2$$

$$AH^2 = (4\sqrt{29})^2 + 8^2$$

$$AH^2 = 16 \cdot 29 + 64$$

$$AH^2 = 464 + 64$$

$$AH^2 = 528$$

$$AH = \sqrt{528} = \sqrt{64 \cdot 16 \cdot 29} = 8 \cdot 4 \cdot \sqrt{29} = 32\sqrt{29}$$

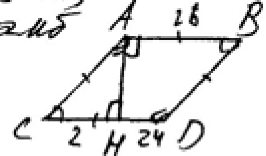
Ответ: $32\sqrt{29}$

Упражнение 23.4. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 24$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 10.

Дано:
$ABCD$ - ромб
AH - высота
$DH = 24$
$CH = 2$
Найти: $AH = ?$

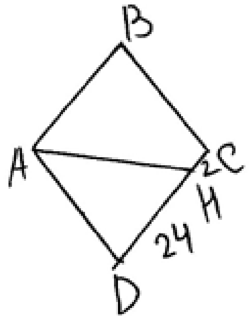
Решение:
$CD = CA = BD = AB$, т.к. $ABCD$ - ромб
$\Downarrow$
$CH + HD = 26$



$CD = AB = AC = BD = 26$, ~~т.к.~~
~~CH~~ по теор. Пифагора
$AH^2 = 26^2 - 2^2 = 676 - 4 =$
$= 672$
$AH = \sqrt{672} = 4\sqrt{42}$
Ответ. $4\sqrt{42}$.

Упражнение 23.5. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 24$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 10.



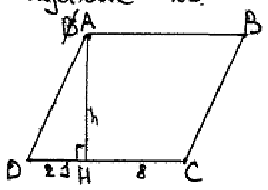
Т.к. у ромба все стороны равны, то $AB = BC = CD = DA = 26$. Тогда $AH^2 = AD^2 - DH^2 =$
$= 676 - 576 = 100 = 10^2$.

Ответ: $AH = 10$.

Упражнение 23.6. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

Задание 23.



Дано:

ABCD - ромб   DH = 21   CH = 8

AH - высота делит CD

Найти.

AH-?

Решение

AB = BC = CD = AD   AD = DH + CH = 21 + 8 = 29 (по свойству ромба)

рассмотрим ΔADH, он прямоугольный т.к. AH - высота.

Воспользуемся теоремой пифагора

$AD^2 = DH^2 + AH^2$ $AH^2 = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{841 - 441} = \sqrt{400} = 20$

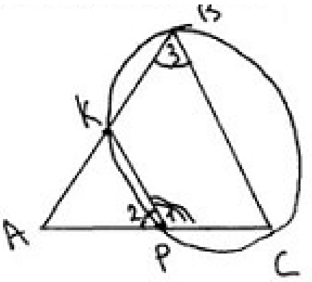
$AH^2 = AD^2 - DH^2$

Ответ. AH = 20

Упражнение 23.7. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AP = 21$, а сторона BC в 3 раза меньше стороны AB.

Ответ: 3.

№23 Дано:
$\triangle ABC$
окружность
окр-ть пересекает AB в (·) K
окр-ть пересекает AC в (·) P
ок-рь проходит через (·) B и (·) C
AP = 9
BC в 3 раза < AB
Найти:
KP - ?



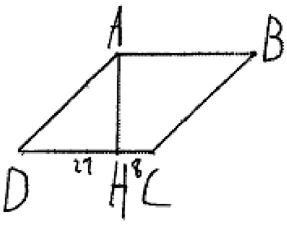
↓ смотреть лист 3

1) Рассмотрим четырехугольник KBCP, он вписанный => сумма противоположных углов = 180° $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ $\angle 3 = 180° - \angle 1$. 2) Рассмотрим $\angle 1$ и $\angle 2$ - смежные => сумма углов = 180° $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ $\angle 2 = 180 - \angle 1$

тоже равен
$\angle 3 = 180° - \angle 1$ => $\angle 3 = \angle 2$ 3) Рассмотрим $\triangle APK$ и $\triangle ABC$
1) $\angle A$ - общий 2) $\angle 3 = \angle 2$ => $\triangle APK \sim \triangle ABC$ по двум равным углам. 4) Из подобия следует отношение сходственных сторон $\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{AB}$ т.к BC в 3 раза меньше AB возьмем BC = 3 AB = 1 $\frac{x}{3} = \frac{9}{1}$ $x = \frac{9 \cdot 3}{1} = 27$
Ответ: KP = 27

Упражнение 23.8. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.



№ 23

Дано $DH = 21$, $CH = 8$

Найти AH

$DC = 21 + 8 = 29$

$DC = CB = BA = AD = 29$

$29^2 = 21^2 + x^2$

$841 = 441 + x^2$

$x^2 = 841 - 441$

$x^2 = 400$

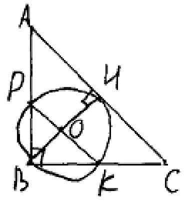
$x = 20$

Ответ: $AH = 20$

Упражнение 23.9. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 13$.

Ответ: 13.

~23



Дано: ABC-прямоугольный Δ; BH-высота; PK=13

AB∩P; CB∩K

Найти: BH

Решение:

точка O∩BH и PK

BH является диаметром окружности ⇒ PK диаметр

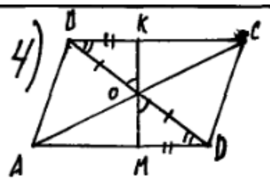
Значит PK=BH=13

Ответ: 13

Задание 24

Упражнение 24.1. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

24)



Дано: $ABCD$ - параллелограмм

Док-ть: $BK = MD$

Док-во:

$\angle BOK = \angle MOD$ (по свойству вертик. углов)

$BO = OD$ (по свойству диагоналей параллелограмма)

$\triangle AOD = \triangle BOC$ - по I признаку равенства треуг. ($\angle AOD = \angle BOC$, ~~(вертик. уг)~~ $AO = OC$, $BO = OD$) $\Rightarrow$

$\angle ADO = \angle CBO$

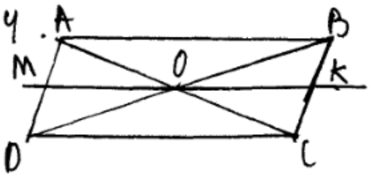
$\triangle BOK = \triangle DOM$ - по II признаку равенства треуг. ($\angle BOK = \angle MOD$, $\angle ADO = \angle CBO$, $BO = O\cancel{P}D$) $\Rightarrow$

$BK = DM$

Ответ: Что и требовалось доказать.

Упражнение 24.2. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

24.



точка пересечения диагоналей O делит их пополам $\Rightarrow BO=OD$

точка O делит MK ~~пополам~~ пополам $\Rightarrow MO=OK$

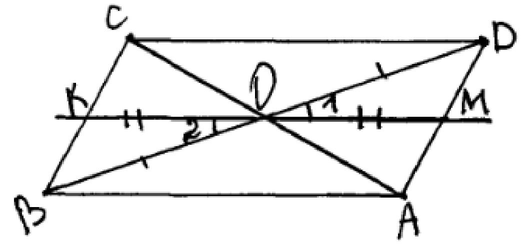
~~$KB^2=BO^2-OK^2$~~ т.к. $BO=OD$, $MD=OK$ то $\angle BOK=\angle DOM$

по т о равенстве треугольников. если 2 стороны и угол между ними соответственно равен 2 сторонам и углу между ними другово треугольника то такие треугольники подобны $\Rightarrow BK=MD$

Доказанно

Упражнение 24.3. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

24.



Рассмотрим $\triangle KBO$ и $\triangle ODM$.

В них: 1. $\angle 1 = \angle 2$, т.к. вертикальные.

2. $BO = OD$, т.к. O – середина диагонали BD.

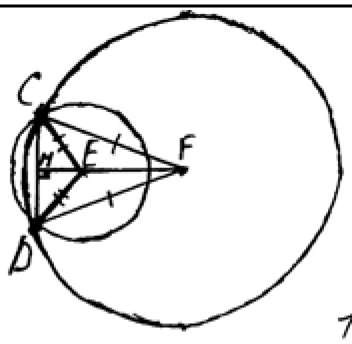
3. $KO = OM$, т.к. O – середина KM – средней линии.

Тогда $\triangle KBO \sim \triangle OBM$ по 2-ум сторонам и углу между ними.

Следовательно если $BO = OD$, $KO = OM$, то и $KB = DM$.

Что и требовалось доказать.

Упражнение 24.4. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, приём точки E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.



Дано: C и D - точки пересечения окружностей;
E и F по одну сторону от CD.
Док-ть: CD ⊥ EF

Док-во:

1) Проведём радиусы CE; ED; CF и FD.
2) Рассмотрим тр-к CDE. Радиусы равны =>
=> тр-к равнобедренный.
3) Проведём медиану EM. В равнобедренном
тр-нике медиана, проведённая к основанию
явл. высотой => EM - высота.
4) Рассмотрим тр-к CFD. Радиусы равны =>
=> тр-к равнобедренный => медиана,
проведённая к основанию явл. высотой. =>
=> FM - медиана и высота.
5) Высоты EM и FM лежат на одной прямой
с отрезком FE; Основание CD лежит на прямой CD.
6) Так как высоты тр-ков ⊥ к основанию CD и лежат
на одной прямой с EF, то EF ⊥ CD.
ч.т.д.

Упражнение 24.5. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, приём точки E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

Дано: окружность с центрами в точке E, окружность с центром в точке F, точки C, D – точки пересечения окружностей

Доказать: $EF \perp CD$

~~1) рассмотрим треугольник CFD.~~

2) Пусть пересечение EF и CD – K, а пересечение с окружностью

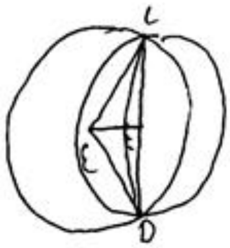
3) Так как центры окружностей находятся на одной прямой, CD их общая хорда, а ~~EF~~ FL – радиус одной из окружностей, то FK делит CD пополам.

4) Рассмотрим треугольник CFD, FK – медиана CD,

5) FD = FC, т.к. они являются радиусами окружности

6) следовательно △ CFD – равнобедренный, следовательно FK также является высотой, следовательно $EF \perp CD$

Упражнение 24.6. Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, приём точки *E* и *F* лежат по одну сторону относительно прямой *CD*. Докажите, что прямые *CD* и *EF* перпендикулярны.



Дано: окр. ц. E, окр. ц. F

окр. пересекаются в C и D;

Док-ть: $CD \perp EF$

Док-во.

1). Проведем радиусы EC, ED, FC, FD

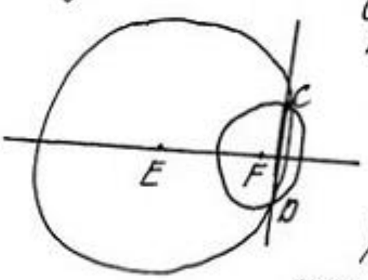
EC = ED (радиусы) => E равноудалено от C и D

FC = FD (радиусы) => F равноудалена от C и D

=> EF – сер. перпендикуляр к CD => $EF \perp CD$?

Упражнение 24.7. Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, приём точки *E* и *F* лежат по одну сторону относительно прямой *CD*. Докажите, что прямые *CD* и *EF* перпендикулярны.

Задание №24



C и D - точки пересечения окружностей

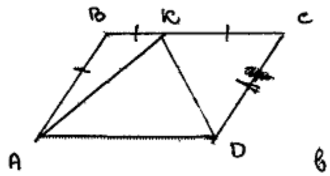
Доказать: $EF \perp CD$

Доказательство:

Т.к. E и F - центры окружностей, то EF является осью симметрии для обеих окружностей. Предположим, что EF не перпендикулярна CD, тогда для точек C и D должны быть симметричные, но это противоречит условию задачи, т.к. C и D - точки пересечения двух окружностей

Упражнение 24.8. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на стороне BC. Докажите, что K — середина BC.

N 24



Доказательство:
AB = CD (тк ABCD - ромб).
Рассмотрим ΔABK
он равнобедренный (тк биссекриса в паралл. отсекает р б. треугольник) => => AB = BK.
Рассмотрим ΔKCD: он равнобедренный (тк биссектриса в параллелограмм отсекае рб треугольник.) => KC = CD.
Тк AB = CD, AB = BK, CD = KC => BK = KC => K - середина BC.
см. лист 2.

Дано:
ABCD - параллелограмм.
K - точка пересечения биссектрис.

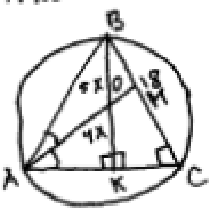
Доказать:
K - середина BC
Вывод: ЧТД.

Задание 25

25.1. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 18$.

Ответ: 15.

№25



Дано: $BC = 18$

$BO : OK = 5 : 4$

$\angle BAM = \angle MAC$ (AM - биссектриса)

$BK \perp AC$ (BK - высота)

Найти: R

Решение:

Обозначим KC за y

По теореме Пифагора

$81x^2 + y^2 = 324$

$y^2 = 324 - 81x^2$

$y = \sqrt{324 - 81x^2}$

$y = 18 - 9x$

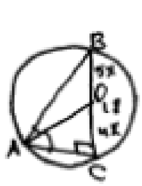
$81x^2 + (18 - 9x)^2 = 324$

$81x^2 + 324 - 324x + 81x^2 = 324$

$162x^2 - 324x = 0$

$162x(x - 2) = 0$

$x = 2$ $\Rightarrow$ $BK = 18$ и $KC = 0$ $\Rightarrow$ ΔABC - прямоуг.



по теореме о биссектрисе треугольника

$\frac{OB}{BA} = \frac{OC}{CA}$

$\frac{2 \cdot 5}{BA} = \frac{2 \cdot 4}{CA}$

$\frac{10}{BA} = \frac{8}{CA} \Rightarrow 8BA = 10CA$

$4BA = 5CA$

$BA : CA = 5 : 4$

$\frac{CA}{BA} = \frac{8}{10}$

Оборотная сторона бланка НЕ ЗАПОЛНЯЕТСЯ. Попросите дополнительный бланк ответов № 2.

$\Rightarrow \frac{CA}{BA} = \frac{4}{5}$

возьмем одну часть за y, тогда

$AC = 4y$, а $AB = 5y$

По теореме Пифагора

$16y^2 + 324 = 25y^2$

$324 = 9y^2$

$y^2 = \frac{324}{9}$

$y^2 = 36 \Rightarrow$

$y = 6 \Rightarrow$

$AC = 24 \quad AB = 30$

по теореме Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p = \frac{24+30+18}{2} = \frac{54+18}{2} = \frac{72}{2} = 36 \Rightarrow$

$S = \sqrt{36 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 18} = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6} =$

$= 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 3 = 36 \cdot 6 = 216$

так же $S = AB \cdot BC \cdot \sin\angle A \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$216 = 30 \cdot 18 \cdot \sin\angle A \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow$

$216 = 30 \cdot 9 \cdot \sin\angle A$

$216 = 270 \cdot \sin\angle A$

$\sin\angle A = \frac{216}{270} \Big|{:9} = \frac{24}{30} \Big|{:2} = \frac{12}{15} \Big|{:3} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

По теореме синусов

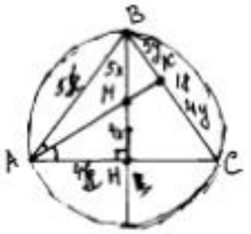
$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R \qquad \frac{18}{0{,}6} = 2R \qquad 2R = 30$

$R = 15$

Ответ: 15 см

25.2. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 18$.

Ответ: 15.



№ 25

Дано: ABC – треугольник, вписанный в окружность.

AK – биссектриса $\angle A$

$\frac{BM}{MH} = \frac{5}{4}$ BH – высота

$BC = 18$

Найти: R

Решение:

1. $2R = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow R = \frac{BC}{2\sin A}$ (по теореме синусов)

2. Биссектриса AK делит BH и BC на пропорциональные отрезки

$\frac{BM}{BH} = \frac{5x}{4x}$, а $\frac{BK}{KC} = \frac{5y}{4y} \Rightarrow BK + KC = BC = 18$

$5y + 4y = 18 \Rightarrow y = 2$

3. $R = \frac{BC}{2 \cdot \sqrt{1 - \cos^2 A}}$

$\cos A = \frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2 \cdot AB \cdot AM}$ – по теореме косинусов

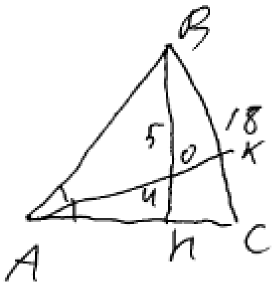
$\Downarrow$

$$R = \frac{BC}{2 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{AB^2 + AM^2 - BM^2}{2 \cdot AB \cdot AM}\right)^2}}.$$

25.3. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 18$.

Ответ: 15.

№25



Дано:
$BO : OH = 5 : 4$; $BC = 18$; BH - высота; AK - биссектриса

Найти:
R - ?

Решение:

Биссектриса прямоугольного треугольника делит стороны соответственно с высотой =)

$\Rightarrow AB : AH = 5 : 4$

$AH = 4x$

$BH = \sqrt{25x^2 - 16x^2} = 3x$

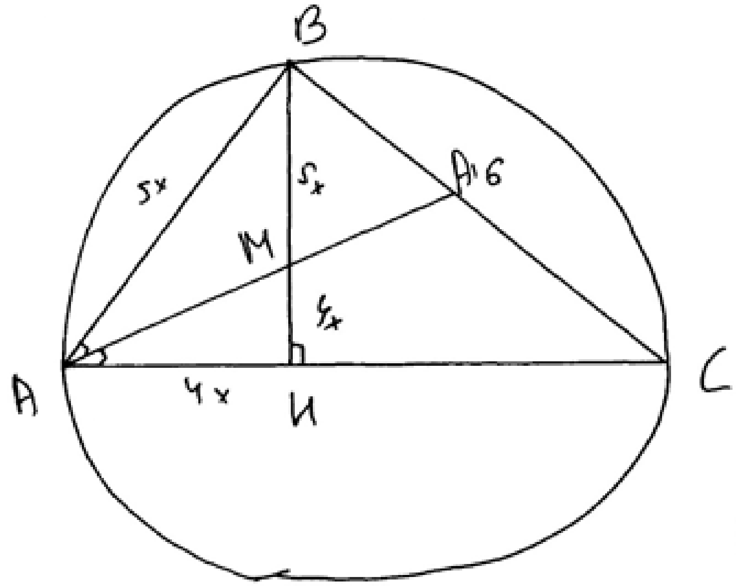
$\sin BAC = \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5}$

$2R = \frac{BC}{\sin BAC}$ $\qquad$ $R = \frac{\cancel{18}^{3} \cdot 5}{\cancel{2 \cdot 3}} = 15$

Ответ: $R = 15$

Упражнение 25.4. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 6$.

Ответ: 5.



Дано:
Окр$(O;R)$
$\triangle ABC$
$BC = 6$
AA_1 – биссектриса
BH – высота.
$BM:MH = 5:4$.
Найти:
R

Решение:

$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\sin A} = \frac{3}{\sin A}$.

1. Рассмотрим $\triangle ABH$:

$\sin A = \frac{BH}{AB} = \frac{9x}{AB} = \frac{9\cancel{x}}{5\cancel{x}} = 1{,}8$ (т.к. AM делит основание, в том же отношении, что и боковые стороны) $\Rightarrow$

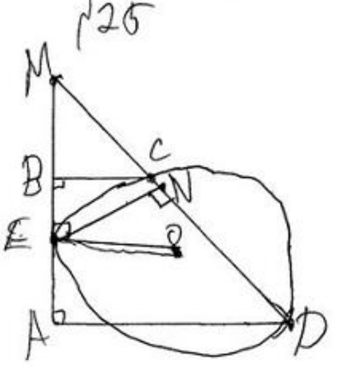
$\Rightarrow R = \frac{3}{\sin A} = \frac{3}{1{,}8} = 1\frac{2}{3}$

Ответ: $R = 1\frac{2}{3}$.

Упражнение 25.5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

№25



Дано:

$BC=5$

$AD=6$

$BC \parallel AD$

$ABCD$ - трапеция

$BA \perp BC$

EN - ?

пункт 1)

продлим стороны AB и CD до пересечения в точке M.
т.к. нужно найти расстояние от E до прямой CD $\Rightarrow$ $\angle END = 90^\circ$

пункт 2)

т.к. ME - касательная, MD - секущая, то по теореме о касательной и секущей $\Rightarrow ME^2 = MC \cdot MD$

пункт 3) $\triangle MBC$ и $\triangle EMN$ и $\triangle AMD$ - прямоугольные (знак $\triangle$)

$\triangle MBC \sim \triangle EMN$ по углу ($\angle BMC = \angle EMN$)

$\triangle EMN \sim \triangle MAD$ по углу $\angle EMN = \angle AMD$

~~пункт~~

СМ лист 6

пункт 4)

Из подобия $\triangle MBC$ и $\triangle EMN \Rightarrow \dfrac{EN}{BC} = \dfrac{EM}{MC}$

Из подобия $\triangle EMN$ и $\triangle MAD \Rightarrow \dfrac{EN}{AD} = \dfrac{EM}{MD}$ $\Bigg\} \Rightarrow$

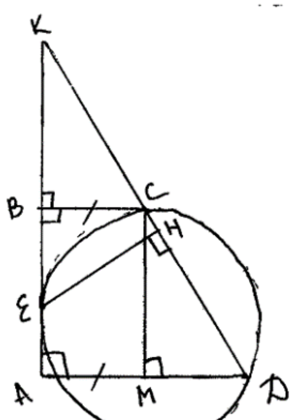
$EN^2 = BC \cdot AD \cdot \dfrac{EM^2}{MC \cdot MD}$ из п. 2 $\Rightarrow \dfrac{EM^2}{MC \cdot MD} = 1 \Rightarrow$

$EN^2 = BC \cdot AD$ $EN^2 = 5 \cdot 6$ $EN > 0 \Rightarrow EN = \sqrt{30}$

Ответ: $EN = \sqrt{30}$

Упражнение 25.6. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.



№ 25.

Дано: $ABCD$ – трап.
$AB \perp BC$
т. C, D, E – на окр., т. $E \in AB$
$AD = 6$
$BC = 5$

Найти: EH – ?

см. лист 4

1. продлим DC и AB, т. пересеч. продолж. сторон обозначим т. K
2. из т. C проведём высоту к стороне AD, обозначим её CM.
3. т.к. $ABCD$ – трап. $\Rightarrow BC \parallel AM$, по усл. $AB \perp BC$, выс. $CM \perp BC$, $CM \perp AD$

$\Rightarrow CM \parallel AB$, $\angle ABC = 90°$, $\angle BAM = 90°$ (по св-ву трап.), $\angle CMA = 90°$, $\angle BCM = 90°$ (CM – выс., $CM \perp BC$, $CM \perp AD$)

4. $CM \parallel AB$ (п.3)
$BC \parallel AM$ (п.3)
все $\angle$ в четыр. $ABCM = 90°$ (п.3) $\Rightarrow$ $ABCM$ – прямоуг. $\Downarrow$ $BC = AM = 5$

5. $AD = AM + MD \Rightarrow MD = AD - AM = AD - BC = 6 - 5 = 1$

6. рассмотрим $\triangle KBC$ и $\triangle CMD$:
• $\angle KBC = \angle CMD = 90°$
• при $BC \parallel AD$ ($ABCD$ – трап.) KD – секущ., н/ накрест-лежащие $\angle$ = $\Rightarrow \angle KCB = \angle CDM$
$\Rightarrow \triangle KBC \sim \triangle CMD$ (по 2м $\angle$) $\Downarrow$ $\frac{BC}{MD} = \frac{KC}{CD}$ $\Rightarrow \frac{5}{1} = \frac{KC}{CD} \Rightarrow KC = 5CD$

7. по т. о квадрате касательной:

$EK^2 = KD \cdot KC$, $KD = KC + CD \Rightarrow$
$EK^2 = \cancel{KD}\ (KC + CD) \cdot KC$

т.к. $KC = 5CD \Rightarrow EK^2 = 6CD \cdot CD \Rightarrow EK = \sqrt{6CD^2} = CD \cdot \sqrt{6}$

8. в четыр. $AEHD$ $\angle EAD = \angle EHD = 90^\circ$, по т. о сумме $\angle$ в четыр.:

$$\underbrace{\angle EAD + \angle EHD}_{180^\circ} + \angle HDA + \angle AEH = 360^\circ \Rightarrow \angle HDA + \angle AEH = 180^\circ$$

9. $\angle KEH$ и $\angle AEH$ – смежные $\Rightarrow$ по св-ву $\angle KEH + \angle AEH = 180^\circ$

10. $\left.\begin{array}{l}\angle KEH + AEH = 180^\circ \text{ (п. 9)} \\ \angle HDA + \angle AEH = 180^\circ \text{ (п. 8)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle KEH = \angle HDA$

11. рассм. $\triangle KHE$ и $\triangle CMD$:

$\left.\begin{array}{l}\cdot\ \angle KHE = \angle CMD = 90^\circ \\ \cdot\ \angle KEH = \angle HDA \text{ (п. 10)}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle KHE \sim \triangle CMD$ (по 2м $\angle$) $\Downarrow$ $\frac{EH}{MD} = \frac{EK}{CD}$ $EH = \frac{MD \cdot EK}{CD}$

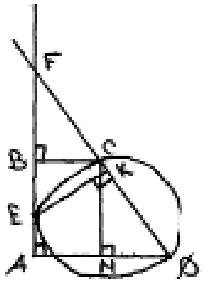
$EH = \frac{1 \cdot EK}{CD} = \frac{\cancel{CD} \cdot \sqrt{6}}{\cancel{CD}}$ (п 7) $= \sqrt{6}$

Ответ: $\sqrt{6}$

Упражнение 25.7. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

N 25



Дано: $ABCD$-трапеция
$AB \perp BC$
$AD = 6$
$BC = 5$
Окружность
Найти: EK

Решение:

1) Достроим прямые AB и CD так, чтобы они пересек. в т. F
Рас-тим $\triangle BFC$ и $\triangle AFD$:
$\left.\begin{array}{l}\angle F\text{-общ.} \\ \angle A = \angle FBC\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BFC \sim \triangle AFD$ по 2м углам
$\Downarrow$ $\frac{BC}{AD} = \frac{FC}{FD} = \frac{FB}{FA} = \frac{5}{6}$

2) Проведем высоту CM
$AD = AM + MD$
$BC = AM$ т.к $\angle A = \angle ABC = \angle BCM = \angle CMA = 90^\circ \Rightarrow ABCD$ - прямоугольник)
$AM = 5$
$MD = AD - AM$
$MD = 6 - 5 = 1$
Рас-тим $\triangle AFD$ и $\triangle MCD$:
$\left.\begin{array}{l}\angle D\text{-общ.} \\ \angle CMD = \angle A\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle MCD$ по 2м углам

см. лист 5

3) ТК $\triangle BFC \sim \triangle AFD$ и $\triangle MCD \sim \triangle AFD \Rightarrow \triangle MCD \sim \triangle BFC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{MD}{BC} = \frac{CD}{FC} = \frac{CM}{FB} = \frac{1}{5}$

$\frac{CD}{FC} = \frac{1}{5} \Rightarrow FC = 5CD$

Пусть $\overset{FC}{\cancel{CD}} = x \Rightarrow CD = 5x$

4) $FE^2 = FC \cdot CD$ (по теор. о кас. и секущ.)

$FE^2 = \cancel{Ef}\ FC \cdot (FC + CD)$

$FE^2 = x(x + 5x)$

$FE^2 = 6x^2$

$FE = \sqrt{6} \cdot x$

5) Рас-ним $\triangle EFK$ и $\triangle AFD$:

$\angle F$ - общ.
$\angle FKE = \angle A$ $\} \Rightarrow \triangle EFK \sim \triangle AFD$ по 2м углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FEK = \angle FDA$

6) Рас-ним $\triangle MCD$:

$\cos \angle D = \frac{MD}{CD}$

$\cos \angle D = \frac{1}{5x}$

7) ТК $\angle D = \angle E \Rightarrow \cos \angle D = \cos \angle E$

8) Рас-ним $\triangle EFK$

$\cos \angle E = \frac{EK}{EF}$

$\cos \angle E = \cos \angle D \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos \angle D = \frac{EK}{EF}$

$\frac{1}{5x} = \frac{EK}{\sqrt{6} \cdot x}$

$EK \cdot 5x = \sqrt{6} \cdot x$

$EK = \frac{\sqrt{6} \cancel{x}}{5\cancel{x}}$

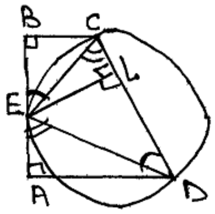
$EK = \frac{\sqrt{6}}{5}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{5}$

Упражнение 25.8. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

25



Дано:

ABCD-трап.; AB ⊥ BC; ω-окружность; [ω (O; R)]; C ∈ ω; D ∈ ω;

E ∈ ω; E ∈ AB;

EL ⊥ CD; AD = 6; BC = 5

Найти: EL

Решение:

1) Проведём хорды EC и ED

2) Т.к. AB ⊥ BC => ∠ABC = 90°;

3) Т.к. ABCD-трап. (по усл.) => BC ∥ AD (по ~~св-ву~~ определению т.к. BC и AD-основан.) =>

=> ∠BAD = ∠CBA = 90° (как односторонние при BC ∥ AD и сек. AB)

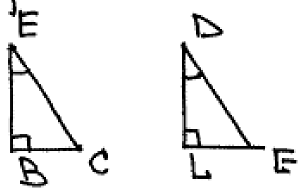
4) Рас-м △EBC и △ELD

∠ELD = ∠EBC = 90°

∠BEC = ∠ECD (по теореме об угле между касательной и хордой) } =>

см. лист 5

$\Rightarrow \triangle EBC \sim \triangle ELD$ (по 2 углам)



5) $\triangle EBC \sim \triangle ELD$ (см. п.4) $\Rightarrow$

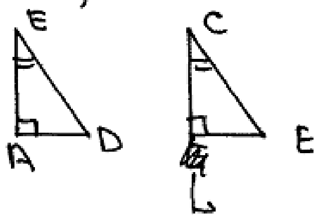
$$\frac{EB}{DL} = \frac{EC}{DE} = \frac{BC}{LE}$$

6) Рас-м $\triangle AED$ и $\triangle CEL$

$\cancel{\angle CEL}$ $\angle CLE = \angle EAD = 90^\circ$

$\angle ECL = \angle AED$ (по теореме об угле между касательной и хордой) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ECL$ (по 2 углам)



7) $\triangle AED \sim \triangle ECL$ (см. п.6) $\Rightarrow$

$$\frac{CL}{AE} = \frac{LE}{AD} = \frac{EC}{ED}$$

8) $\frac{EC}{ED} = \frac{LE}{AD}$ (см. п.7); $\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{LE}$ (см. п.5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\frac{BC}{LE} = \frac{LE}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = LE^2$

$LE^2 = 5 \cdot 6 = 30 \Rightarrow LE = \sqrt{30}$

Ответ: $\sqrt{30}$

Комментарии и оценивание

20.1. Допущена ошибка при определении знаков на интервалах. Оценка 0 баллов.
20.2. Несмотря на недостатки записи, ход решения верный и понятный, ответ верный. Оценка 2 балла.
20.3. Все этапы решения присутствуют. Три корня найдены верно. Отсутствие третьего корня в ответе следует считать оплошностью, не влияющей на правильность решения. Оценка 2 балла.
20.4. Во второй и третьей строках записи лишены смысла и не связаны друг с другом и с условием. Оценка 0 баллов.
20.5. Не учтено ограничение $6-x\geq 0$. Оценка 0 баллов.
20.6. Некорректная запись при нахождении дискриминанта. Этот недостаток не связан с математической ошибкой. При нахождении корня имеется ошибка, которую можно счесть арифметической – потерян знак. Оценка 1 балл.
20.7. Нет ни проверки, ни ограничения на знаменатель. Вычислительная ошибка на последнем шаге. Оценка 0 баллов.
20.8. Правильно выполнены преобразования, получен верный ответ. Имеется не использующаяся в современных учебниках запись $\sqrt{D}=\pm 7$, однако она не влияет на верность и последовательность рассуждений. Оценка 2 балла.
20.9. Преобразования выполнены верно. Арифметическая ошибка при нахождении корня. Не использующаяся в современных учебниках запись $\sqrt{D}=\pm 7$ не влияет на оценку. Оценка 1 балл.
20.10. Имеются признаки, характерные для несамостоятельного выполнения: строки решения, начиная с четвертой, не связаны между собой. Несколько раз «потеряны» знаки, несоответствия в записях и вычислительная ошибка в конце. Оценка 0 баллов.
20.11. Решение несколько запутанное, но, в целом, верное. Имеется арифметическая ошибка: вместо свободного члена -6, получился свободный член -2. В результате не найдены два корня из трех. Оценка 1 балл.
20.12. При вынесении за скобки в 4-й строке имеется алгебраическая ошибка, которая не нарушает логики решения. Впоследствии имеется алгебраическая ошибка в решении уравнения $(x+1)^2=0$. Оценка 0 баллов.
20.13. При вынесении общего множителя допущена ошибка или описка в знаке. В результате решена другая задача. Оценка 0 баллов.
21.1. Математическая модель в виде уравнения составлена верно. При решении допущены алгебраические ошибки. Оценка 1 балл.
21.2. Ход решения понятный, ответ верный. Оценка 2 балла.
21.3. Логическая ошибка — участник экзамена перепутал производительность труда и время. Оценка 0 баллов.
21.4. Ход решения понятный, ответ верный. Однако допущена арифметическая ошибка при вычислении побочного корня. Оценка 1 балл.
21.5. Вместо «224 км» написал «240 км». Относительно значения «240 км» задача решена верно. Но решена другая задача. Оценка 0 баллов.
21.6. Ход решения понятен, но на последнем этапе допущена логическая ошибка. Оценка 0 баллов.

21.7. Уравнение составлено верно. Имеется арифметическая ошибка. Оценка 1 балл.
21.8. Уравнение составлено и приведено к квадратному верно. Арифметическая ошибка в вычислении корня. Оценка 1 балл.
21.9. Верно составлена математическая модель. Уравнение решено без ошибок. Найдена и описана искомая величина, но в ответ выписано другое число. Оценка 2 балла.
22.1. График построен верно, верно найдены значения m. Оценка 2 балла.
22.2. График построен верно, верно найдены значение m. Оценка 2 балла.
22.3. График построен неверно, коэффициенты не найдены. Оценка 0 баллов.
22.4. График неверный. Выколотые точки не найдены и не обозначены, коэффициенты не найдены. Оценка 0 баллов.
22.5. График построен верно, верно найдены 2 из 3 значений *k*. Оценка 1 балл.
22.6. Решение понятное. Участник не пишет, что построенные кривые являются фрагментами гипербол, но это и не требуется. Значения параметра найдены верно, но способ их нахождения неясен. Оценка 1 балл.
22.7. График построен верно, верно найдены 2 из 3 значений *k*. Оценка 1 балл.
23.1. Геометрическая часть решения понятна, но решение содержит существенную ошибку, которую нельзя отнести к вычислительным. Оценка 0 баллов.
23.2. Решение лаконичное, но полное и верное. Оценка 2 балла.
23.3. Доказано подобие треугольников *DOC* и *AHC*, верно составлена пропорция, из неё верно найдена диагональ *AC*. Но в записи теоремы Пифагора для треугольника *AHC* допущена геометрическая ошибка. Оценка 0 баллов.
23.4. Экзаменуемый решает другую задачу: изменен порядок расположения отрезков. Оценка 0 баллов.
23.5. Задача решена верно, несмотря на неудачное изображение перпендикуляра *AH*. Оценка 2 балла.
23.6. Ход решения понятен, все шаги выполнены правильно. Наличие квадрата в записи $AH^2=\sqrt{29^2-21^2}$ следует считать оплошностью, не влияющей на правильность решения и оценку. Оценка 2 балла.
23.7. Ход решения верный, все шаги выполнены правильно, но в конце допущена существенная ошибка: предположение $BC=3,\ AB=1$. Оценка 0 баллов.
23.8. Ход решения верный, все шаги выполнены правильно. Оценка 2 балла.
23.9. Не доказано, что отрезок *PK* является диаметром окружности. Оценка 0 баллов.
24.1. Доказательство верное, хотя и не очень рациональное. Все шаги обоснованы. Оценка 2 балла.
24.2. В доказательстве пропущен существенный элемент – не обосновано, почему равны отрезки *MO* и *OK*. Помимо этого имеется логическая ошибка в обосновании равенства углов *BOK* и *DOM*. Оценка 0 баллов.
24.3. В работе вместо предложенной задачи рассматривается частный случай, когда точки K и M являются серединами сторон параллелограмма. Отметка 0 баллов.
24.4. Ход рассуждений понятен. В целом, доказательство верное. Оценка 2 балла.
24.5. Рассуждения непонятны. Утверждения необоснованные. Рисунок не соответствует записям. Оценка 0 баллов.

24.6. Доказательство верное, все шаги обоснованы. Оценка 2 балла.
24.7. Доказательство верное и полное. Оценка 2 балла.
24.8. Доказательство в целом верное, но содержит неточность: нет пояснения факта, почему биссектриса в параллелограмме отсекает равнобедренный треугольник. Оценка 1 балл.
25.1. Решение содержит многочисленные и разнообразные ошибки. Оценка 0 баллов.
25.2. В п. 2 решения содержится существенная геометрическая ошибка. Решение не закончено. Оценка 0 баллов.
25.3. В начале решения корявая попытка сформулировать свойство биссектрисы треугольника. Тем не менее, решение верное, полное и понятное. Отметка 2 балла.
25.4. Логическая ошибка, неверно применено свойство биссектрисы. Оценка 0 баллов.
25.5. Решение верное. Оценка 2 балла.
25.6. Ход решения верный, все шаги присутствуют, допущена ошибка: при применении свойства касательной вместо $5CD$ подставлено CD. Отсюда неверный ответ. Оценка 1 балл.
25.7. Ход решения верный, все шаги присутствуют, но допущена одна ошибка (см. п. 3). Оценка 1 балл.
25.8. Ход решения верный, все шаги присутствуют, имеющееся неверное обозначение угла в п. 4 следует считать несущественной оплошностью. Оценка 2 балла.

ЧАСТЬ 4 Материалы по оценке решений заданий с развернутым ответом для зачета или квалификационной работы

Опираясь на приведенные критерии оценивания, оцените решения заданий 20 – 25 в предложенных вариантах.

Критерии оценивания выполнения задания 20

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение доведено до конца, но допущены вычислительные ошибки, с их учётом дальнейшие шаги выполнены верно	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Критерии оценивания выполнения задания 21

Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Критерии оценивания выполнения задания 22

Содержание критерия	**Баллы**
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

Критерии оценивания выполнения задания 23

Содержание критерия	Баллы
Ход решения верный, все его шаги выполнены правильно, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

Максимальный балл	2

Критерии оценивания выполнения задания 24

Содержание критерия	Баллы
Доказательство верное, все шаги обоснованы	2
Доказательство в целом верное, но содержит несущественные недостатки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Критерии оценивания выполнения задания 25

Содержание критерия	**Баллы**
Ход решения верный, получен верный ответ	2
Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Вариант 1

Таблица оценивания

Задание	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
Оценка						

20. Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

Ответ: $\left(2; 2+\sqrt{3}\right)$.

№20

$(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$

$(x-2)^2 \geq 0$ $\quad$ $x \neq 2$ так как $(x-2)=(2-2)=0 \Rightarrow$

$x-2 \geq 0$ $\quad$ $\Rightarrow x > 2$

$x \geq 2$

$(x-2)^{\cancel{2}} < \sqrt{3}\,\cancel{(x-2)}$

$x-2 < \sqrt{3}$

$x < \sqrt{3}+2$

Ответ: $x \ni (2; \sqrt{3}+2)$

21. Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№21 x км/ч – собственная скорость лодки

	S км	v км/ч	t ч
против течения реки	210	$x+3$	$\frac{210}{x+3}$
по течению реки	210	$x-3$	$\frac{210}{x-3}$

так как на обратный путь лодка затратила на 4 часа меньше, чем на путь против течения, составим уравнение и решим его.

$$\frac{210}{x-3} - \frac{210}{x+3} = 4$$

Общий знаменатель ; $(x-3)(x+3)$

ОДЗ: $(x-3)(x+3) \neq 0$

$x \neq \pm 3$ $x > 0$ так как скорость не может быть отрицательной и, в данной ситуации, равной нулю.

$$\frac{210}{x-3}^{\backslash x+3} - \frac{210}{x+3}^{\backslash x-3} = 4^{\backslash (x-3)(x+3)}$$

$210x + 630 - 210x + 630 = 4x^2 + 12x - 12x - 36$

$4x^2 = 1260 - 36$

$4x^2 = 1224$

$x^2 = 306$

$x = \pm\sqrt{306}$

$x = -\sqrt{306}$ посторонний корень

$x = \sqrt{306} = \sqrt{9 \cdot 34} = 3\sqrt{34}$

Ответ: $3\sqrt{34}$ км/ч

22. Постройте график функции $y=|x|(x+1)-3x$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно 2 общие точки.

Ответ: $-1,\ 4$.

№22 $y = |x| \cdot (x+1) - 3x$

$$y = \begin{cases} x \cdot (x+1) - 3x \\ -x \cdot (x+1) - 3x \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 + x - 3x \\ -x^2 - x - 3x \end{cases}$$

$$y = \begin{cases} x^2 - 2x \\ -x^2 - 4x \end{cases}$$

1) $y = x^2 - 2x$ — квадратичная функция, график порабола, ветви вверх, вершина (в;n)

$в = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$

$n = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1$

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

$y(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 = 0$

$y(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$

2) $y = -x^2 - 4x$ — квадратичная функция, график порабола, ветви вниз, вершина (в;n);

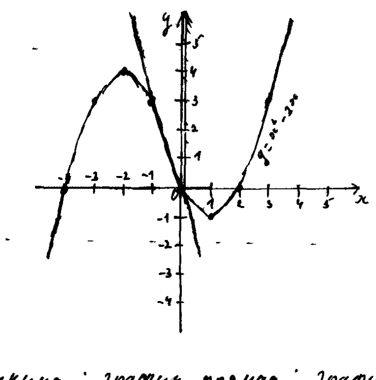
$в = \frac{-(-4)}{2 \cdot (-1)} = \frac{4}{-2} = -2$

$n = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) = -4 + 8 = 4$

x	-4	-3	-2	-1	0
y	0	3	4	3	0

$y(-1) = -(-1)^2 - 4 \cdot (-1) = -1 + 4 = 3$

$y(0) = -0^2 - 4 \cdot 0 = 0$



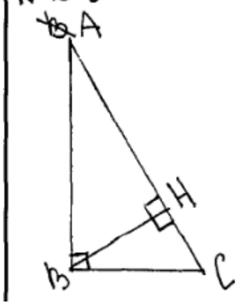
$y = m$ – линейная функция; график прямая; график проходит $\parallel Ox$

Ответ: $x \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$

23. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 9$, $AC = 36$.

Ответ: 18.

N 23



Дано: ΔABC – прямоуг. Δ; $\angle B = 90^\circ$, BH – высота, $AH = 9$, $AC = 36$

Найти: AB – ?

~~По теореме Пифагора:~~
$\cancel{BH = \sqrt{AH}}$

1. $HC = AC - AH = 36 - 9 = 27$.

$\cancel{2.\ BH = \sqrt{AH + HC} = \sqrt{9 \cdot 27} = 9\sqrt{3}}$

2'. $BH = \sqrt{AH + HC} = \sqrt{9 \cdot 27} = 9\sqrt{3}$

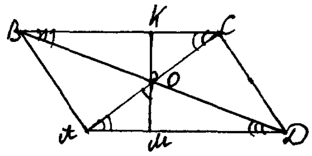
3. По т. Пифагора:

$AB = \sqrt{81 + 81 \cdot 3} = 2 \cdot 9 = 18$. (из ΔAHB)

Ответ: 18.

24. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.

√24



Дано: $ABCD$ - параллелограмм; $BD \cap CA = O$;
$KM \cap BC = K$; $KM \cap AD = M$;
Доказать: $BK = DM$

Доказательство:

$\triangle BCO = \triangle AOD$

т.к. $BO = OD$ (~~стороны~~ диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам)

$\angle BOC = \angle AOD$ (вертикальные)

$CO = AO$ (диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам)

→ $KO = OM$ (высоты равных треугольников)

$KO = OM$ (точкой пересечения диагоналей прямая KM делится пополам)

$BC \parallel AD$ (стороны параллелограмма) при секущей DB → $\angle BCD = \angle BDA$ (накрестлежащие)

$\angle KOB = \angle DOM$ (вертикальные)

$DO = OB$ (диагональ точкой пересечения делится пополам) → $\triangle AOM = \triangle KOC$ →

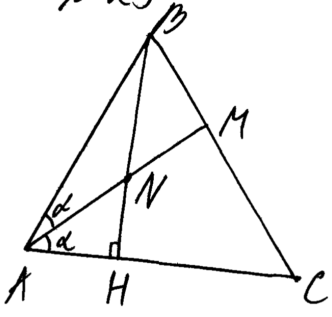
→ $KB = DM$

Ответ: $BK = DM$

25. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC=18$.

Ответ: 15.

№25



Дано: $\triangle ABC$; AM- биссектриса. BH- высота. $AM \cap BH = N$. $BN:NH = 5:4$. $BC = 18$. Найти: R. Решение:

AM- биссектриса, значит $\angle BAM = \angle CAM = \alpha$.

$\angle BAC = \angle BAM + \angle CAM = 2\alpha$. $\triangle ABH$- прямоугольный, так как $BH \perp AC$ $\angle BHA = 90^\circ$. Сумма углов в треугольнике 180°, значит $\angle BAH + \angle BHA + \angle ABH = 180^\circ$; $\angle ABH = 180 - 90 - 2\alpha = 90 - 2\alpha$.

Пусть $BN = 5x$, тогда $NH = 4x$ так как $BN : NH = 5:4$. $\triangle ANH$- прямоугольный так как $\angle BHA = 90^\circ$. $\sin(\angle MAC) = \frac{NH}{AN}$; $AN = \frac{4x}{\sin\alpha}$.

Запишем теорему синусов для $\triangle ABN$: $\frac{BN}{\sin(\angle BAN)} = \frac{AN}{\sin(\angle ABH)}$

$\frac{5x}{\sin\alpha} = \frac{\frac{4x}{\sin\alpha}}{\sin(90-2\alpha)}$. $\frac{5x}{\sin\alpha} = \frac{4x}{\sin\alpha\,\sin(90-2\alpha)}$ $\Big| : \frac{\sin\alpha}{x}$ $\quad 5 = \frac{4}{\sin(90-2\alpha)}$

$\sin(90-2\alpha) = \frac{4}{5}$. $\sin(90-2\alpha) = \cos 2\alpha = \frac{4}{5}$. $1 = \sin^2(2\alpha) + \cos^2(2\alpha)$

$\sin(2\alpha) = \sqrt{1-\cos^2(2\alpha)} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. Запишем теорему синусов для $\triangle ABC$

$\frac{BC}{\sin(\angle BAC)} = 2R$; $\frac{18}{\sin(2\alpha)} = 2R$; $\frac{18}{\frac{3}{5}} = 2R$. $R = \frac{18}{\frac{3}{5}\cdot 2} = 15$.

Ответ: $R = 15$.

Вариант 2

Таблица оценивания

Задание	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**
Оценка						

20. Решите неравенство $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$.

Ответ: $\left(2; 2+\sqrt{3}\right)$.

20. $(x-2)^2 < \sqrt{3}(x-2)$

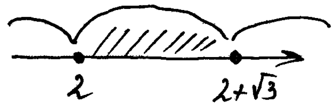
$(x-2)^2 - \sqrt{3}(x-2) < 0$

$(x-2)(x-2-\sqrt{3}) < 0$

$x-2=0$ или $x-2-\sqrt{3}=0$

$x=2$ $\quad$ $x=2+\sqrt{3}$

Ответ: $(2; 2+\sqrt{3})$



$x \in (2; 2+\sqrt{3})$

21. Моторная лодка прошла против течения реки 210 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 4 часа меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

№21

Пусть x – это собственная скорость лодки

значит $(x+3)$ – это ~~собственно~~ скорость лодки по течению,

$(x-3)$ – это скорость лодки против течения.

$$\frac{420^{\backslash x+3}}{x-3} - \frac{420^{\backslash x-3}}{x+3} = 4^{\backslash (x+3)(x-3)}$$

$$420x + 1260 - 420x + 1260 = 4x^2 - 36$$

$$-4x^2 + 36 + 25\overset{2}{4}0 = 0 \quad |:4$$

$$-x^2 + 9 + \overset{630}{\cancel{2520}} = 0$$

$$D = 81 - 4 \cdot (-1) \cdot \overset{630}{\cancel{2520}} = 81 + 2520 = 2601$$

$x_1 = \frac{-9+51}{-2} = -22$ – не подходит т.к. скорость не может быть отрицательной.

$x_2 = \frac{-9-51}{-2} = 30$ км/ч – собственная скорость лодки.

Ответ: 30 км/ч

22. Постройте график функции $y=|x|(x+1)-3x$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно 2 общие точки.

Ответ: $-1,\ 4$.

№22

$y = |x| \cdot (x+1) - 3x$

$$y = \begin{cases} x \cdot (x+1) - 3x & \text{при } x \geq 0 \\ -x \cdot (x+1) - 3 & \text{при } x < 0 \end{cases}$$

1) $y = x \cdot (x+1) - 3x$ при $x \geq 0$

$D(y) = [0; +\infty)$

$y = x^2 + x - 3x$

$y = x^2 - 2x$

График функции – парабола, ветви направлены вверх ($a = 1$)

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2} = 1$

$y_в = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$

x	0	2	3	4
y	0	0	3	8

2) $y = -x \cdot (x+1) - 3x$ при $x < 0$

$D(y) = (-\infty; 0)$

$y = -x^2 - x - 3x$

$y = -x^2 - 4x$

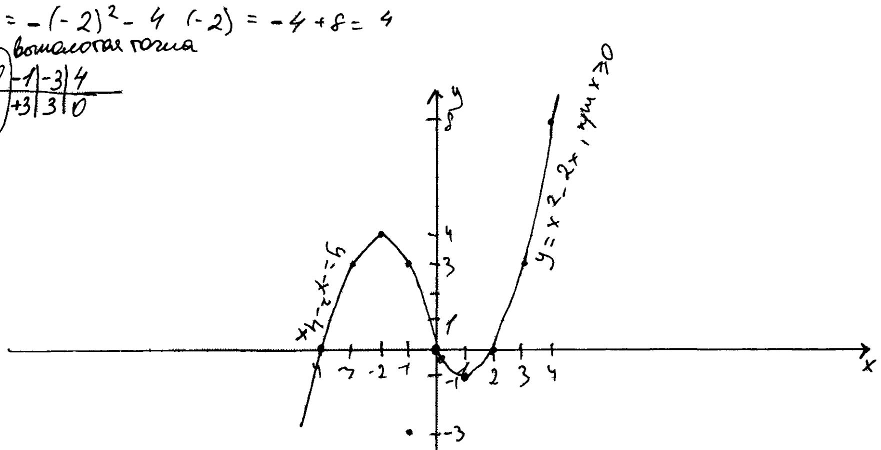
График функции – парабола, ветви вниз ($a = -1$)

$x_в = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{-2} = -2$

$y_в = -(-2)^2 - 4 \cdot (-2) = -4 + 8 = 4$

вспомогательная точка

x	0	-1	-3	4
y	0	+3	3	0



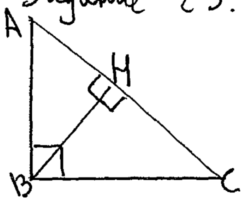
Прямая $y = m$ имеет с графиком ровно 2 общие точки при $y = -1$; $y = 4$ => $m = -1$; $m = 4$

Ответ: $-1; 4$

23. Точка H является основанием высоты, проведённой из вершины прямого угла B треугольника ABC к гипотенузе AC. Найдите AB, если $AH = 9$, $AC = 36$.

Ответ: 18.

Задание 23.



Дано:

$\triangle ABC$ $\angle B = 90^\circ$

BH - высота

$AH = 9$

$AC = 36$

Найти: AB

Решение

1. BH - высота в $\triangle ABC$, проведенная к гипотенузе

$\angle ABC = 90 \Rightarrow \angle ABH = \angle HBC = 45^\circ$

2. В $\triangle ABH$ $\angle H = 90^\circ \Rightarrow \angle BAH + \angle ABH = 90^\circ$; $\angle ABH = 45^\circ$

$\Downarrow$

$\angle BAH = 90^\circ - \angle ABH = 45^\circ$

В $\triangle BHC$ $\angle H = 90^\circ \Rightarrow \angle HBC + \angle HCB = 90^\circ$; $\angle HBC = 45^\circ$

$\Downarrow$

$\angle HCB = 90^\circ - \angle HBC = 45^\circ$

3. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle ABH$

$\angle A$ - общий

$\angle B = \angle H = 90^\circ$

$\angle HAB = \angle HCB = 45^\circ$

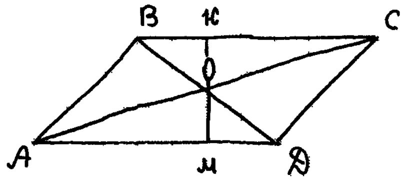
$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle AHB$ (по 3 углам)

4. $\triangle ABC \sim \triangle AHB$

$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{AB}$ $\quad \frac{x}{36} = \frac{9}{x} \Rightarrow x^2 = 36 \cdot 9 = 324$ $\quad x = 18 - AB$

Ответ: $AB = 18$

24. Через точку O пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, пересекающая стороны BC и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что отрезки BK и DM равны.



№ 24

Дано: параллелограмм
О - точка пересечения ∟ABCД
КМ - прямая
Д-ть: ВК = ДМ

Д-во:

1) сторона ВС = АД, тк противолежащие стороны у параллелограмма равны.

2) точка О на пересечении диагоналей является центром, середина диагоналей, т.е. ВО = ОД, АО = ОС.

3) КМ делит ВС на ВК и КС, и АД на АМ и МД, противолежащие из которых соответственно равны.

~~4)~~
4) диагонали ВО = ОД, значит ВК = МД.

чтд.

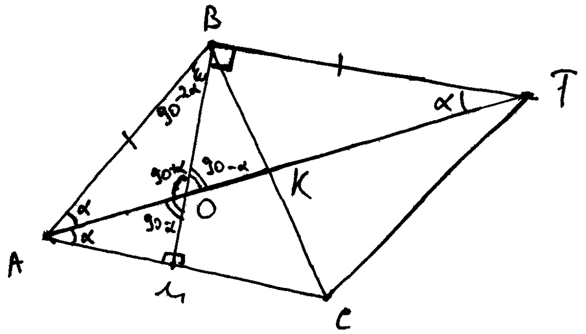
25. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 18$.

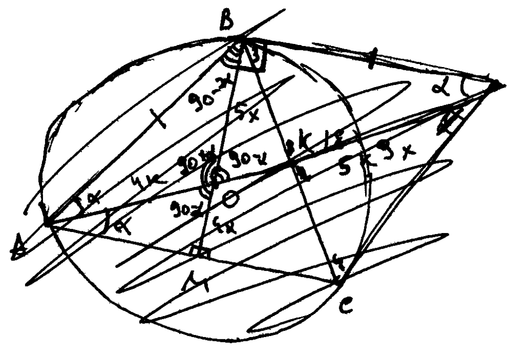
Ответ: 15.

Задание 25

Дано: $\triangle ABC$, $\frac{BO}{OM} = \frac{5}{4}$, $BC = 18$

Найти: R





Пусть $BO = 5x$, а $OM = 4x$, $\angle OAM = \alpha$

Продлим AK до пересечения с BT ($BT \perp BM$)

и получим $\triangle OBT$ подобный $\triangle OMA$, по

1) $\angle M = \angle B = 90^\circ$

2) $\angle AOM = \angle BOT$ – вертикальные,

Тогда угол $\angle BTO = \angle MAO = \alpha$

Также заметим, что $\triangle ABT$ – равнобедренный

$\angle BAT = \angle BTA = \alpha$

В $\triangle ABM$: $\sin 2\alpha = \frac{BM}{AB} = \frac{9x}{AB}$

В $\triangle TBO$: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5x}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin\alpha = \frac{5x}{AB}\cos\alpha$

По формуле: $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получим

$\frac{9x}{AB} = 2 \cdot \frac{5x}{AB} \cdot \cos^2\alpha$ откуда $\cos^2\alpha = 0.9$, откуда $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 0,1$ откуда $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \cdot \frac{6}{10}$

По формуле $\frac{a}{\sin\beta} = 2R$, откуда: $2R = \frac{18}{\sin\angle ABM} = \frac{18}{\sin 2\alpha}$

$R = \frac{9}{0.6} = 10 \cdot \frac{3}{2} = 15$ Ответ: $R = 15$

Вариант 3

Таблица оценивания

Задание	20	21	22	23	24	25
Оценка						

20. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0{,}2,\ 0{,}5$.

$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$

Пусть $\frac{1}{x}=y$, тогда получим уравнение:

$y^2+3y-10=0$

По теореме, обратной теореме Виета:

$\begin{cases} y_1+y_2=-3, \\ y_1\cdot y_2=-10; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1=-5, \\ y_2=2. \end{cases}$

Вернемся к исходной переменной:

$\frac{1}{x}=-5$ или $\frac{1}{x}=2$

$x=-\frac{1}{5}$ $\qquad$ $x=\frac{1}{2}$

$x=-0{,}2$ $\qquad$ $x=0{,}5$

Ответ: $-0{,}2$; $0{,}5$

21. Из A в B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 55 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью, большей скорости первого на 6 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста.

Ответ: 60 км/ч.

21.

	S, км	v, км/ч	t, ч
1	S	x	$\frac{S}{x}$
2.1	$\frac{S}{2}$	55	$\frac{S}{110}$
2.2	$\frac{S}{2}$	x+6	$\frac{S}{2x+110}$

1) пусть x – скорость первого.
2) путь 2 на первом и 2 участке равен.
3) пусть путь от A в B = S
4) путь первого автомоб. = S, а половина пути = $\frac{S}{2}$ (у 2 машины)

$$\frac{\cancel{S}}{x} = \frac{\cancel{S}}{110} + \frac{\cancel{S}}{2x+12}$$

ОДЗ: $x \neq 0 \quad x \neq -6$

$$\frac{1}{110}^{\backslash x\cdot(2x+12)} + \frac{1}{2x+12}^{\backslash 110x} - \frac{1}{x}^{\backslash 110(2x+12)} = 0$$

$$\frac{2x^2+12x+110x-220x-1320}{110\cdot x\cdot(2x+12)} = 0$$

$2x^2 - 98x - 1320 = 0 \Rightarrow x^2 - 49x - 660 = 0$

$D = 2401 + 5280 = 7681$

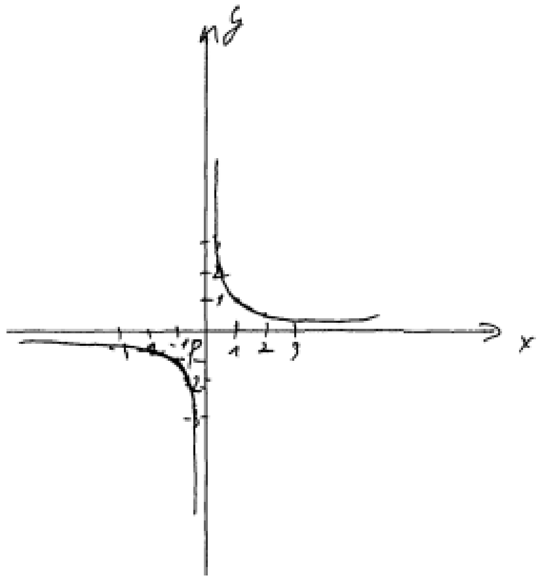
$x_1 = \frac{49+\sqrt{7651}}{2} \qquad x_2 = \frac{49-\sqrt{7651}}{2}$

т.к. v неотриц. то подх. первый корень

Ответ: $\frac{49+\sqrt{7651}}{2}$

22. Постройте график функции $y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.



$y=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

x	1	2	0,5	-2	-1	-0,5
y	1	0,5	2	-0,5	-1	-2

$y=kx$

$kx=\dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

$9x+1=9kx^3+kx^2$

$9kx^3+kx^2-9x-1=0$

$D=k^2-4\cdot 9k\cdot(-9)=k^2+324k$

$k(k+324)=0$

$k=0$ или $k=-324$

Ответ: $k=0; -324$.

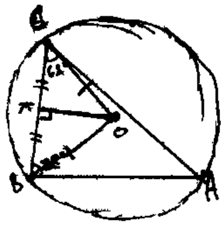
23. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно $62°$ и $88°$. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 12.

Ответ: 12.

№23
(рисунок на листе №2)

Дано:
Окружность,
ABC – треугольник
r = 12
∠B и ∠C соответственно 62° и 88°

Решение:



(1) Рассмотрим треугольник COB – равнобедренный, т.к. CO и BO – радиусы окружности.

(2) Найдём дугу, на которую опирается угол COB – BC.
BC = 360 – 88 – 88 – 62 – 62 = 60° = ∠COB – центр. угол = дуге, на которую опирается.
(градусная мера окружности = 360°).

(3) Проведём высоту OK с вершины O, треугольника COB, к стороне BC, которая будет являться и медианой и биссектрисой, ~~т.к.~~ по свойству равнобедренного треугольника. ⇒

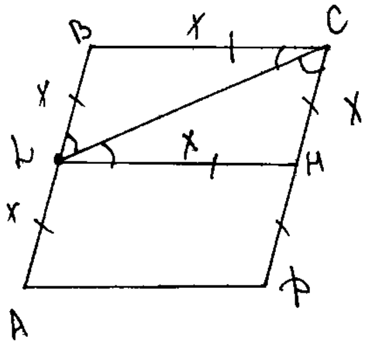
• треугольник OKB – ~~равнобедренный~~ прямоугольный.
• ∠KOB = 60 : 2 = 30° ⇒
катет лежащий напротив угла 30° равен половине гипотенузы ⇒
$KB = \frac{OB}{2} = \frac{12}{2} = 6$.

(3) KB = KC = 6 + 6 = 12 = BC

Ответ: BC = 12.

24. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC. Точка L — середина стороны AB. Докажите, что CL — биссектриса угла BCD.

N 24



Дано: $ABCD$ - парал-м

$BC = 2AB$

L = середина AB $AL = LB$

Док-ть: CL - биссектр $\angle BCD$

Док-во:

Сделали доп. построение! H - середина CD

Т.к. в парал-ме противоположные стороны равны, то в $LBCH$ $BL = CH \Rightarrow AL = LB = CH = HD = X$

Обозначим: $AB = 2X$, $BC = X$.

Т.к $LB = LA = X. \Rightarrow LB = BC = X \Rightarrow \triangle LBC$ - равнобедр. $\cancel{\angle LBC = \angle C}$ $\angle BLC = \angle BCL$

$BC = LH$ (т.к. в парал-ме противоположные стороны равны)

$\Downarrow$

$BC = LH = X$

$LB = CH = X$ $\Rightarrow LH = HC \Rightarrow \triangle LCH$ - равнобедр. $\angle CLH = \angle LCH$

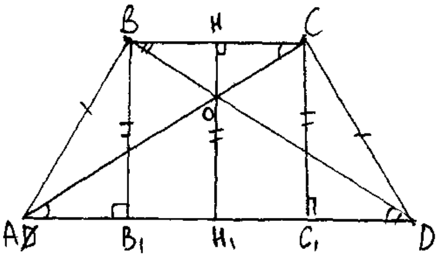
$\Downarrow$

$\angle BCL = \angle LCH$ (CL - биссектр.)

Ч.Т.Д.

25. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 160, а площадь равна 1280, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 6,4.



Дано: $ABCD$ - трапеция $AB=CD$

$P_{ABCD}=160$ $S_{ABCD}=1280$.

Можно вписать окружность.

Найти: OH

Решение:

$BC+AD=AB+CD$, т.к. по условию в трапецию можно вписать окружность.

$P=160$ - по усл. $BC+AD=AB+CD=\frac{P_{ABCD}}{2}=80$, $AB=CD=40$

$S_{ABCD}=\frac{BC+AD}{2}\cdot HH_1$ $S=1280$ - по усл $BC+AD=80$

$\Rightarrow HH_1 = 1280 \ \frac{80}{2} = 1280:40=32$

$CC_1=HH_1=32$. $CD=40$ - в $\triangle CC_1D$

По т. Пифагора $C_1D^2=CD^2-CC_1^2$

$C_1D=\sqrt{1600-1024}=\sqrt{576}=24$

$AB_1=C_1D=24$, $B_1C_1=BC$

$AD=AB_1+C_1D+B_1C_1=48+B_1C_1$ $AD+BC=80$, $B_1C_1+BC=80-48=32$

$B_1C_1=BC=16$ $AD=48+16=64$.

$\triangle BOC \sim \triangle AOD$, т.к.:

$\angle A=\angle C$ - накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей AC

$\angle B=\angle D$ - накрест лежащие при $BC \parallel AD$ и секущей BD

$\frac{AD}{BC}=\frac{64}{16}=3$, $k=3$ $\frac{OH_1}{OH}=\frac{3}{1}$

$HH_1=OH_1+OH=3+1=4$ части

$OH=\frac{HH_1}{4}=\frac{32}{4}=8$

Ответ: 8

Вариант 4

Таблица оценивания

Задание	20	21	22	23	24	25
Оценка						

20. Решите уравнение $(x-2)\cdot(x^2+8x+16)=7(x+4)$.

Ответ: $-5,\ -4,\ 3$.

20. $(x-2)(x^2+8x+16)=7(x+4)$

$(x-2)(x+4)^2=7(x+4)$

$(x-2)(x+4)^2-7(x+4)=0$

$\cancel{(x-2)-7=0}$

$\cancel{x-2-7=0}$

$(x-2)(x+4)-7=0$

$x^2+4x-2x-8-7=0$

$x^2+2x-15=0$

$a=1 \quad b=2 \quad c=-15$

$D=b^2-4ac$

$D=2^2-4\cdot1\cdot(-15)=4+60=64$ $(D>0)$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$x_1=\frac{-2-\sqrt{64}}{2\cdot1}=\frac{-2-8}{2}=\frac{-10}{2}=-5$

$x_2=\frac{-2+\sqrt{64}}{2\cdot1}=\frac{-2+8}{2}=\frac{6}{2}=3.$

Ответ: $x_1=-5,\ x_2=3.$

21. Два велосипедиста одновременно отправляются в 224-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 14 км/ч.

	v	t	S
1 вел.	$x+2$	$\frac{224}{x+2}$	224
2 вел.	x	$\frac{224}{x}+2$	224

$$\frac{224}{x+2}=\frac{224}{x}+2$$

$$\frac{224}{x+2}^{\backslash x}-\frac{224}{x}^{\backslash x+2}+2^{\backslash x^2+2x}$$

~~224x − 224x − 224 · 2~~

$$\frac{\cancel{224x}-\cancel{224x}-224\cdot 2+2x^2+4x}{x^2+2x}$$

$$\frac{+2x^2+4x-448}{x^2+2x}=0$$

дробь равняется нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не может быть равен нулю $\Rightarrow x^2+2x\neq 0$

$x\neq -2$

$2x^2+4x-448=0$

$D=4^2-4\cdot 2\cdot(-448)=$

$=16+3584=3600$

$$x_1=\frac{-4+\sqrt{3600}}{2\cdot 2}=\frac{-4+60}{4}=\frac{56}{4}=14$$

$$x_2=\frac{-4-\sqrt{3600}}{2\cdot 2}=\frac{-4-60}{4}=\frac{-64}{4}=-16$$

−16 нас не удовлетворяет, так как скорость не может быть отрицательной $x>0$

Ответ: 14 км/ч скорость второго вело~~сиnе~~сипедиста

22. Постройте график функции $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: 81.

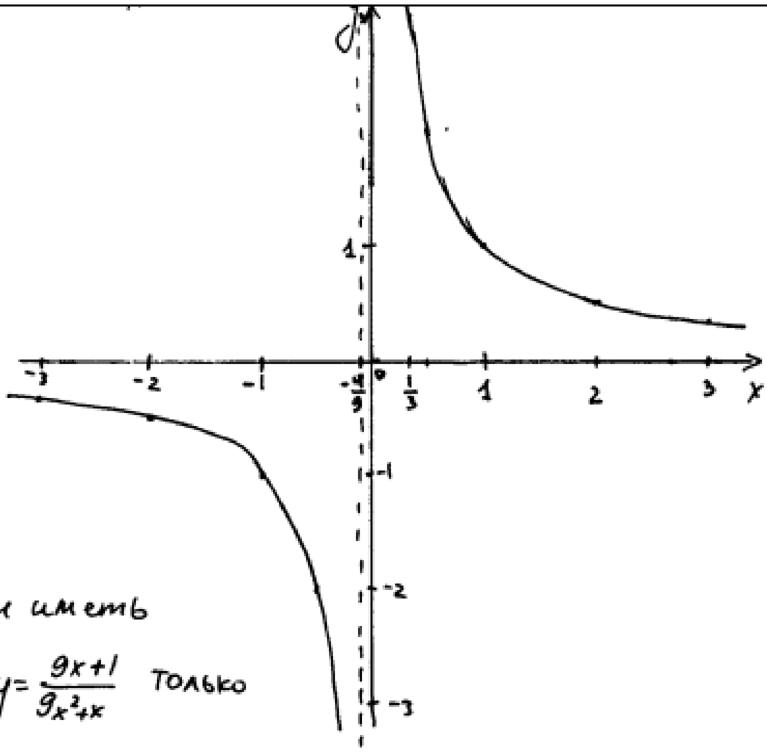
$y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$

$y = \dfrac{9x+1}{x(9x+1)}$

$D(y) \in R \setminus \{0; -\frac{1}{9}\}$

$y = \dfrac{1}{x}$

$E(y) \in R \setminus \{0; -9\}$



Для того, чтобы иметь с графиком ф-ии $y = \dfrac{9x+1}{9x^2+x}$ только 1 (•) пересечения график ф-ии $y = kx$ должен проходить через выколотую точку, имеющую координаты $(-\frac{1}{9}; -9)$. Подставим эти значения и найдем k.

$-9 = k \cdot (-\frac{1}{9}) \,|\cdot(-9)$

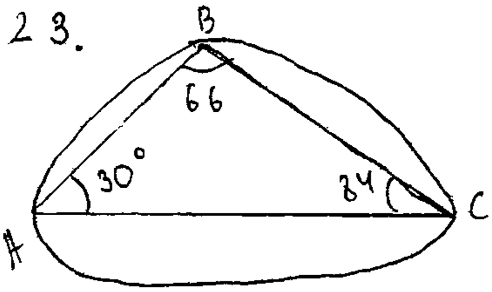
$k = 81$.

Ответ: 81

23. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно $66°$ и $84°$. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 15.

Ответ: 15.

23.



$\angle A = 180-66-84=30°$

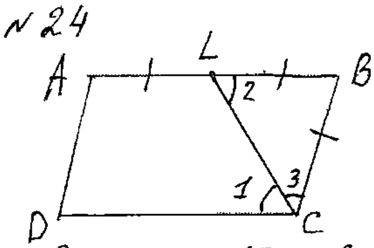
$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$

по т. синусов $\frac{BC}{\sin 30} = 30$, $\frac{BC}{\frac{1}{2}} = 30 \Rightarrow BC = 60$

Ответ: 60

24. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC. Точка L — середина стороны AB. Докажите, что CL — биссектриса угла BCD.

№ 24

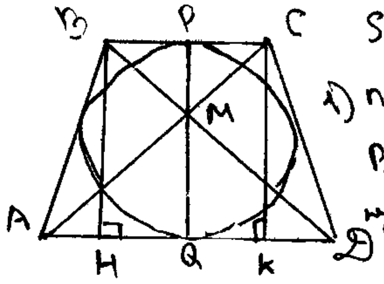


Доказательство: $\angle 1 = \angle 2$ (накрест-лежащие углы при параллельных прям.) $AL = LB = BC$, так как по условию сторона AB вдвое больше BC и L – середина стор. AB $\Rightarrow \Delta LBC$ равнобедренный $\Rightarrow \angle 2 = \angle 3$.

$\Rightarrow \angle 1 = \angle 3 \Rightarrow CL$ – биссектриса $\angle BCD$. Ч.Т.Д.

25. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 2000, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

Ответ: 8.



$S = 2000$; $P = 200$ PM - ?

1) по св-ву описан четыр. $BC + AD = AB + CD$, сл $BC + AD = 100$, по св-ву равнобед тр. $AB = CD$, сл пусть $AB - x$, тогда

$100 = 2x$

$x = 50$ $AB = CD = 50$

2) $S_{тр} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h$

проведём перпендик. BH и CK

$S_{тр} = 2000$

$\frac{100}{2} \cdot BH = 2000$

$50 \cdot BH = 2000$

$BH = 40$

3) $\triangle ABH$: $\angle AHB = 90°$

$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{2500-1600} = \sqrt{900} = 30$

4) $BH = CK$ т.к. взаим. заключ перпен. при п-х BC и AD, сл $BCKH$ прямоуг, сл $BC = HK$

$AD = AH + HK + \cancel{KD} + KD$

5) $\triangle ABH = \triangle DKC$ по гип и кат.

$\angle AHB = \angle CKD = 90°$; $CD = AB$ по усл; $BH = CK$ взаим заключ. перпен при II-х BC и AD, сл

6) $AH = KD = 30$; $AD = 2AH + \cancel{KD}_{HK} = 60 + \cancel{KD}_{HK}$

$AD + BC = 100$

$60 + BC + HK = 100$

$60 + 2HK = 100$

$HK = 20$; $AD = 100 - 20 = 80$

7) $\frac{BC}{AD} = \frac{20}{80} = \frac{1}{4}$

8) проведём PQ

$AMD \sim BMC$

$\angle BMC = \angle AMD$ т.к. вертик.

$\frac{BC}{AD}$; сл

$PQ = 40 = BH$ т.к взаим заключ перпен при п-х BC и AD

$\frac{PM}{MQ} = \frac{1}{4}$ $PM - x$ $x + 4x = 40$

$MQ = 4x$ $5x = 20$

$PQ = PM + PQ$

$x = 4$, сл $PM = 4$

Ответ: 4

Вариант 5

Таблица оценивания

Задание	20	21	22	23	24	25
Оценка						

20. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-10=0$.

Ответ: $-0{,}2,\ 0{,}5$.

$$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{10x^2}{x^2}=0$$

$$\frac{1+3x-10x^2=0}{x^2}$$

$$\begin{cases}1+3x-10x^2=0\\ x^2\neq 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=0{,}5\\ x=-0{,}25\end{array}\right.\\ x\neq 0\end{cases}$$

$-10x^2+3x+1=0$

$a=-10,\ b=3,\ c=1$

$D=9+40=49,\ D>0$

$x_1=\frac{-3-7}{-20}=\frac{-10}{-20}=0{,}5$

$x_2=\frac{-3+7}{-20}=\frac{5}{-20}=-0{,}25.$

Ответ: $-0{,}25;\ 0{,}5.$

21. Из A в B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью 55 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью, большей скорости первого на 6 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста.

Ответ: 60 км/ч.

21.

	S км	v км/ч (I-ая полов.)	v км/ч (II-ая полов	t ч.
II авт.	2	55	x+6	?
I авт.	2	v км/ч. x		?

$$\frac{1}{55}^{\backslash x(x+6)} + \frac{1}{x+6}^{\backslash 55x} = \frac{2}{x}^{\backslash 55(x+6)} \quad / \cdot 55x(x+6)$$

$$x(x+6)+55x = 2(55x+330)$$

$$x^2+6x+55x = 110x+660$$

$$x^2+6x+55x-110x-660=0$$

$$x^2-49x-660=0$$

$$D=b^2-4ac=-49^2-4\cdot 1\cdot(-660)=2401+2640=5041$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-49)+\sqrt{5041}}{2\cdot 1}=\frac{49+71}{2}=\frac{120}{2}=60$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-(-49)-\sqrt{5041}}{2\cdot 1}=\frac{49-71}{2}=\frac{-22}{2}=-11$$

x_2 – не удовлетворяет условиям задачи.

Ответ: 60 км/ч.

22. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2,\ m>6$.

№22.

$$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x \geq -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$$

I $y=x^2+2$ – квадратичная функция, график – парабола, $a>0$, ветви направлены вверх

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = 0$

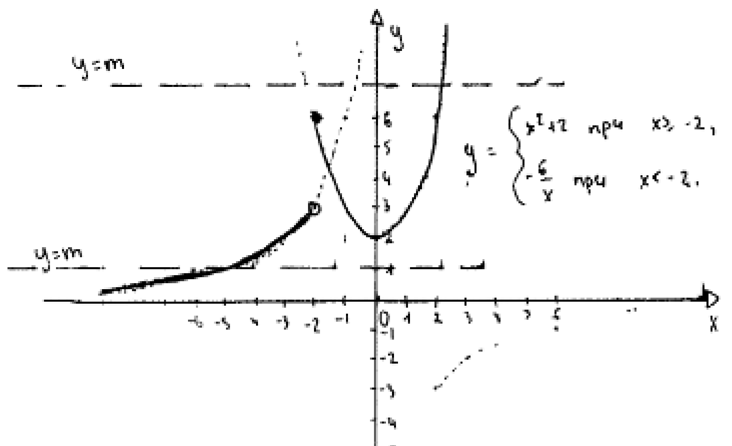
$y_0 = 0+2=2$

$O(0;2)$

x	0	2	-2
y	2	6	6

II $y=-\dfrac{6}{x}$ – функция обратной пропорциональности, график – гипербола, симметрично отражённая относительно оси абсцисс

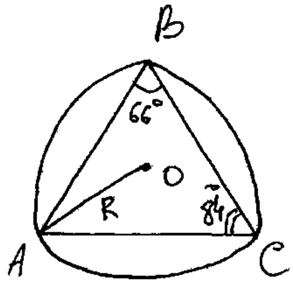
x	1	-1	2	-2	3	-3	6	-6
y	-6	6	-3	3	-2	2	-1	1



Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку при $m \in (0;2) \cup (6;+\infty)$

23. Углы B и C треугольника ABC равны соответственно $66°$ и $84°$. Найдите BC, если радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 15.

Ответ: 15.



Дано: Окр$(O;R)$ описан. около $\triangle ABC$

$\angle B = 66°$; $\angle C = 84°$

$R = 15$

Найти: BC

Решение

1) $\angle A = 180° - (66° + 84°) = 30°$ (по сумме углов в треуг.)

2) $\dfrac{AB}{\sin\angle C} = \dfrac{BC}{\sin\angle A} = \dfrac{AC}{\sin\angle B} = 2R$ (для $\triangle ABC$, где R – радиус описан. окр.)

$$\frac{BC}{\sin\angle A} = 2R$$

$$\frac{BC}{\sin 30°} = 2\cdot 5$$

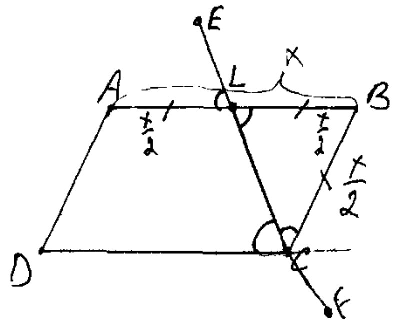
$$\frac{BC}{\frac{1}{2}} = 10$$

$$BC = 10\cdot\frac{1}{2}$$

$$BC = 5$$

Ответ: $BC = 5$

24. Сторона AB параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны BC. Точка L — середина стороны AB. Докажите, что CL — биссектриса угла BCD.



Дано: $ABCD$ - параллелограм
AB больше BC в 2 раза
L - середина AB
Д-ть: CL - биссектриса.
Д-во:

1) Примем сторону AB за x, тогда $BC = \frac{x}{2}$
2) $AL = \frac{x}{2}$ и $LB = \frac{x}{2}$, т.к. L - середина AB
3) Расмотрим $\triangle LBC$
$LB = BC = \frac{x}{2} \Rightarrow \triangle LBC$ равнобедренный $\Rightarrow \angle LCB = \angle CLB$ как углы при основании равнобедренного треугольника.
4) Продлим прямую LC до точки E
$\angle ALE = \angle CLB$ как вертикальные.
5) $\left.\begin{array}{l}\angle LCB = \angle CLB \text{ (по доказанному)} \\ \angle ALE = \angle CLB \text{ (по доказанному)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle LCB = \angle ALE$
6) Продлим прямую LC до точки F
7) $\angle ALE = \angle DCE$ как соответственные углы при $AB \parallel DC$ (по св-ву паралл-ма) и секущей EF.
8) $\left.\begin{array}{l}\angle LCB = \angle ALE \\ \angle DLE = \angle ALE\end{array}\right\} \Rightarrow \angle LCB = \angle DLE \Rightarrow CL$ является биссектрисой $\angle BCD$

Ч. и. т. д.

25. В равнобедренную трапецию, периметр которой равен 200, а площадь равна 2000, можно вписать окружность. Найдите расстояние от точки пересечения диагоналей трапеции до её меньшего основания.

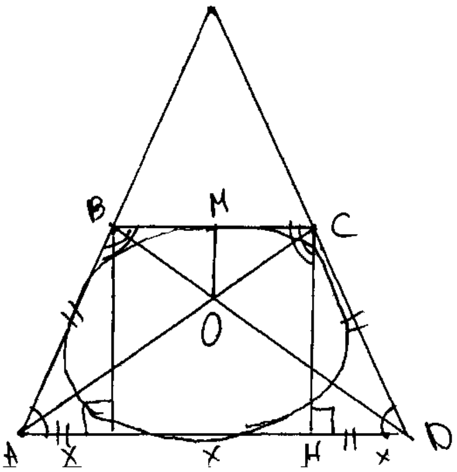
Ответ: 8.

25. Дано:

$P = 200$

$S = 2000$

$MO - ?$



Решение:

1. $AB = CD$ т.к. $ABCD$ – р/б трапеция
2. $\angle A = \angle D$ т.к. $ABCD$ – р/б трапеция
3. $P = AB + BC + CD + AD$, т.к. $AB = CD \Rightarrow P = 2AB + BC + AD$;

$BC + AD = P - 2AB$

4. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$; $S = \frac{BC + \cancel{AB}AD}{2} \cdot CH$; $CH = \frac{2S}{BC + AD}$
5. $MO = \frac{1}{3} CH$; 6. $3BC = AD$;

7. $CH = \frac{2 \cdot 2000}{P - 2AB} = \frac{\cancel{2}\,4000}{200 - 100} = \frac{40\cancel{00}}{1\cancel{00}} = 40$

6. $MO = \frac{1}{3} \cdot \frac{40}{1} = \frac{40}{3}$

Ответ: $\frac{40}{3}$

Ответы и комментарии к материалам части 4

Вариант	Задание	Оценка	Комментарий
1	20	0	Решение содержит множественные логические и алгебраические ошибки
	21	1	Математическая модель (уравнение) составлена верно, присутствует вычислительная ошибка при решении квадратного уравнения
	22	0	График построен как объединение двух парабол. При этом параболы «склеились» по дуге
	23	2	Ход решения верный, понятный. В записи $BH = \sqrt{AH + HC}$ знак «плюс» следует считать опиской
	24	0	Записи противоречивые и логически не связанные
	25	2	Решение полное и верное, хотя и не самое рациональное
2	20	2	Решение верное
	21	0	Неверное составлена математическая модель (уравнение)
	22	2	График построен, значения параметра найдены верно
	23	0	В решении присутствуют грубые геометрические ошибки. Доказательство подобия опирается на углы, которые найдены неверно
	24	0	Доказательство отсутствует, указаны отдельные верные факты, не связанные между собой.
	25	2	Решение полное и верное, хотя и не самое рациональное
3	20	2	Решение полное и верное
	21	1	Арифметическая ошибка, ответ неверный
	22	0	Вид функции не определен, точки не выколоты, дальнейшие вычисления содержат многочисленные ошибки
	23	2	Решение полное и верное, хотя нерациональное
	24	0	Равенство нужных углов не доказано, многочисленные логические ошибки
	25	1	Арифметическая ошибка

4	20	0	Алгебраическая ошибка: потерян корень
	21	0	Алгебраическая ошибка при решении уравнения
	22	2	Решение полное и верное
	23	1	Арифметическая ошибка
	24	2	Решение полное и верное
	25	1	Описка, приведшая к неверному ответу
5	20	1	Арифметическая ошибка
	21	0	Неверно составлена таблица, потеряны единицы измерения
	22	2	Решение полное и верное
	23	1	Описка: радиус 5 вместо 15
	24	2	Доказательство полное и верное, несмотря на лишние рассуждения и неверно написанную букву C в обозначении угла DCE
	25	0	Несвязные рассуждения, неверные утверждения