Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

ФИПИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
обучающимся по организации самостоятельной подготовки к ЕГЭ 2025 года

МАТЕМАТИКА

Москва, 2025

Авторы-составители: И.В. Ященко, А.В. Семенов, П.И. Самсонов

Методические рекомендации предназначены для обучающихся 11 класса, планирующих сдавать ЕГЭ 2025 г. по математике. Они содержат полезную информацию от разработчиков контрольных измерительных материалов ЕГЭ для организации самостоятельной подготовки к ЕГЭ по математике базового и профильного уровней. В них указаны темы, на освоение/повторение которых целесообразно обратить особое внимание.

Содержание

Рекомендации по выполнению экзаменационной работы по математике базового уровня

Дорогие друзья!

Скоро вам предстоит сдать единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике. Ваша основная задача – получить достойную оценку на экзамене и аттестат о среднем образовании благодаря хорошей математической подготовке. Подготовка будет эффективной, если вы будете систематически заниматься. Данные рекомендации помогут вам в этом.

Экзаменационная работа состоит из 21 задания с кратким ответом базового уровня сложности. На её выполнение отводится 3 часа (180 минут).

Ответы к заданиям 1–21 с кратким ответом записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби в бланке ответов № 1.

Задания проверяют базовые вычислительные и логические умения и навыки, а также умения анализировать информацию, представленную на графиках и в таблицах, использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В работу включены задания базового уровня по всем основным предметным разделам: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

На экзамене разрешается пользоваться только теми справочными материалами, которые выдаются вместе с вариантом контрольных измерительных материалов. При выполнении заданий разрешается пользоваться линейкой. Использовать на экзамене калькулятор нельзя.

Максимальное количество первичных баллов, которое может получить участник экзамена за выполнение всей экзаменационной работы, – 21 балл. За правильное выполнение каждого из заданий 1–21 начисляется 1 первичный балл.

Для прохождения государственной итоговой аттестации по математике необходимо набрать не менее 7 первичных баллов.

При самостоятельной подготовке к экзамену рекомендуется использовать следующую таблицу, включающую все темы и элементы содержания, которые могут быть проверены на едином государственном экзамене по математике (таблица 1). Отметьте, какие темы вы уже изучили/повторили, а какие ещё предстоит изучить/повторить. Так вы сможете спланировать свою подготовку к экзамену.

Таблица 1

№ задания	Элементы содержания	Пройдено	Необходимо изучить/ повторить
Алгебра			
1	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений		
2	Умения решать текстовые задачи разных типов, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов, оценивать размеры объектов окружающего мира		
4	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов		
5	Умение вычислять в простейших случаях вероятности событий		
6	Умение извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках		
8	Умение проводить доказательные рассуждения		
14	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений		
15	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов		
16	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений		
19	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов, выбирать подходящий изученный метод для решения задачи		
Уравнения и неравенства			
17	Умение решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения		
18	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства		

№ задания	Элементы содержания	Пройдено	Необходимо изучить/ повторить
19	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов, выбирать подходящий изученный метод для решения задачи		
20	Умение решать текстовые задачи разных типов и уравнения		
21	Умения выполнять вычисление значений и преобразования выражений, решать текстовые задачи разных типов, выбирать подходящий изученный метод для решения задачи		
Функции			
3	Умение извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках		
7	Умения оперировать понятиями «функция», «непрерывная функция», «производная», определять значение функции по значению аргумента, описывать по графику поведение и свойства функции		
Начала математического анализа			
7	Умения оперировать понятиями «функция», «непрерывная функция», «производная», определять значение функции по значению аргумента, описывать по графику поведение и свойства функции		
Геометрия			
9	Умения использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии, оценивать размеры объектов окружающего мира		
10	Умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии		

№ задания	Элементы содержания	Пройдено	Необходимо изучить/ повторить
11	Умения решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы		
12	Умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии		
13	Умения решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы		
Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей			
3	Умение извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках		
5	Умение вычислять в простейших случаях вероятности событий		

Рекомендуем вам придерживаться следующих этапов индивидуальной подготовки.

1. Определить свой уровень подготовки

Для подготовки к экзамену нужно определить уровень своих знаний и умений. Нужно решить три–пять разных вариантов, соответствующих демонстрационному варианту[1] ЕГЭ базового уровня 2025 г. На выполнение каждого варианта следует отводить 3 часа. Результаты рекомендуем занести в лист достижений, оформленный в виде таблицы, в которой в вертикальных графах представлены номера вариантов, а в строчках — номера заданий, обозначая правильные ответы знаком «+», а неправильные — знаком «–». В таблице 2 приведена часть листа достижений.

[1] Демонстрационный вариант КИМ ЕГЭ по математике (базовый уровень), кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике и спецификация контрольных измерительных материалов для проведения единого государственного экзамена по математике (базовый уровень) размещены на сайте ФГБНУ «ФИПИ» в соответствующем разделе или по ссылке: <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2>.

аблица 2

Лист достижений

Задания	Варианты				
	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

В листе достижений будут видны задания, при выполнении которых возникли трудности (знак «–»). Лист достижений позволит определить уровень подготовки и темы, задания по которым вы решаете всегда правильно, не всегда правильно и не решаете или решаете неверно.

2. Сформулировать цель сдачи экзамена

Для подготовки к экзамену нужно определить цель его сдачи.

Для того чтобы пройти государственную итоговую аттестацию (набрать не менее 7 первичных баллов), достаточно выполнить задания первой половины варианта (задания 1–10).

Результаты базового ЕГЭ не используются при поступлении в вуз, однако подготовка к сдаче ЕГЭ базового уровня на высокий балл позволит закрепить математические навыки, необходимые в жизни, массовых профессиях, обучении в вузе по специальностям, для которых не требуется ЕГЭ по математике профильного уровня. При такой цели на экзамене необходимо выполнить максимально возможное количество заданий.

3. Выстроить стратегию подготовки к экзамену

Сформулированная верно цель с учётом уровня подготовки позволит спокойно готовиться к экзамену и достичь желаемого результата.

Если цель только сдать экзамен, а уровень подготовки базовый, то нужно тренироваться выполнять задания, которые хорошо получаются, добиваться стабильно верного их решения. При переходе к решению новых задач сначала повторите материал по учебникам, а затем, используя видеоуроки РЭШ, МЭШ и Гиперматику, переходите к решению задач. Обращайте внимание на правильность понимания вами вопроса задания, безошибочности проведённых вычислений.

Если цель — успешно учиться в вузе, который не предъявляет специальных требований к уровню математической подготовки абитуриентов, то следует ориентироваться на получение 4 или 5 тестовых баллов (от 12 первичных баллов) при текущем базовом уровне подготовки; нужно верно решать все задания варианта.

Следует уделять особое внимание вдумчивому чтению условия задач и отработке навыков безошибочного выполнения всех арифметических действий. При подготовке к экзамену все вычисления должны выполняться без калькулятора (как на экзамене). Распечатайте справочные материалы, которыми можно пользоваться на экзамене. На черновике нужно записывать выражение, преобразования выражения с использованием законов сложения и умножения, формул сокращённого умножения (не забывайте про справочные материалы) и вычисления в столбик. В самом решении целесообразно указывать порядок действий, записывать подробно приведение дробей к общему знаменателю, а также сложение, вычитание, умножение и деление дробей. После каждого действия полезно делать проверку обратным действием, поскольку самые распространённые ошибки вычислительные. Если допущена ошибка, то ответ получается неверный, и тогда за выполнение задания выставляется 0 баллов.

Для того чтобы набрать не менее 7 первичных баллов, нужно потренироваться решать не менее 10 линий заданий экзаменационного варианта. С помощью листа достижений выявите те задания варианта, которые вы можете выполнить. Нужно совершенствовать навык их решения до получения стабильно верного результата. Затем следует переходить к тем заданиям, выполнение которых вызывает затруднения, и с помощью учебника и пособий попробовать понять причину затруднения. При выполнении таких заданий простая сверка полученного ответа с эталонным не позволит достичь успеха в решении.

При решении каждого задания важно пройти все этапы:

а) внимательно прочитать условие, выделить в тексте ключевые моменты;
б) выполнить вычисления (рассуждения);
в) зафиксировать полученный ответ;
г) проверить правильность ответа, решив обратную задачу, или подставив корни в уравнение, или оценив полученный ответ прикидкой ожидаемого результата, а при решении задачи проверить реалистичность полученного ответа;
д) прочитать ещё раз вопрос в задании и убедиться, что ответ получен именно на него;
е) записать ответ в бланк ответов № 1.

После прохождения всех этапов решения задания должно сформироваться внутреннее убеждение: «Я выполнил(а) задание верно!»

При решении заданий нужно пользоваться справочными материалами.

Оптимальная стратегия подготовки к экзамену – набрать из открытого банка заданий ФИПИ разные типы заданий по 10 линиям, из них на каждый день составлять себе тренировочный вариант, решать каждое задание, выполняя все шаги. Обратите внимание на то, что открытый банк заданий допускает проверку полученного вами ответа. Отдельно изучайте решения аналогичных заданий, которые не получились, выполняйте по ним тренировочные задания. Торопиться при решении не нужно! Времени для решения 10 заданий достаточно (180 минут), его хватает и на проверку решения несколько раз, выполняя задание разными способами, и на проверку полученного решения. Справочные материалы могут помочь вам в решении задач, только когда придёт понимание, в каком случае имеет смысл к ним обращаться. В этих справочных материалах нет таблицы умножения, действий с обыкновенными и десятичными дробями, процентов; это нужно знать, не обращаясь к дополнительным вспомогательным материалам. Решать варианты и задания нужно самостоятельно — без калькулятора, других справочников, Интернета, звонков другу.

Для получения высокого балла нужно учиться решать все задания варианта.

Оптимальная стратегия подготовки к экзамену — работать тематически, используя задания открытого банка заданий ЕГЭ, размещённого на официальном сайте ФГБНУ «ФИПИ» (https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=E040A72A1A3DABA14C90C97E0B6EE7DC), Навигатор самостоятельной подготовки к ЕГЭ (https://fipi.ru/navigator-podgotovki/navigator-ege%23ma), проверенных электронных сервисов.

Обязательно уделяйте внимание тренировке навыков безошибочного выполнения заданий, в которых Вы уверены. Отдельно решайте задания по тем темам, которые усвоены не очень твёрдо. Изучение тем, знания по которым минимальны, и проработку соответствующих позиций варианта экзамена разумно исключить из подготовки.

Правильная стратегия подготовки — постепенно добиваться стабильных результатов в определённых темах и заданиях; тогда на экзамене эти задания не покажутся сложными. Лист достижений вам в этом поможет.

4. Выстроить график подготовки к экзамену

Заниматься математикой нужно постоянно, желательно каждый день, чередуя повторение тем с решением полных или сокращённых вариантов. Каждое занятие должно включать в себя решение задач по трудным темам и тренировочных вариантов. Трудным темам надо уделить больше времени — обратиться к учебнику, видеоурокам, пособиям. В период подготовки к экзамену важно накопить опыт решения разных задач.

Оптимальный график подготовки к экзамену для тех, кто выбирает «сдать экзамен»: набрать из открытых банков типы заданий по 10 позициям; из них на каждый день составлять себе тренировочный вариант; решать каждое задание, выполняя все шаги, засекая время выполнения. Нужно отдельно рассмотреть решение заданий, которые не получились, чтобы вновь решать их через какое-то время.

Оптимальный график подготовки к экзамену для тех, кто выбирает «высокий балл»: составлять из открытых банков или печатных учебных пособий тренировочные варианты и каждый день выполнять не больше одного варианта, отдельно решая задания по тем темам, которые усвоены плохо. На каждом занятии нужно решать задания как по алгебре, так и по геометрии, чтобы накапливать опыт решения задач.

5. Совершенствовать свои вычислительные навыки

В процессе подготовки исключите для себя возможность выполнять любые расчёты с помощью технических средств. Более того, нужно сразу для себя принять, что ответом на любое задание может быть целое число или конечная десятичная дробь.

Если, решая задачу, получился ответ $\frac{1}{3}$, то это сигнал об ошибке в решении, а если получена дробь $\frac{1}{8}$, то её нужно представить в виде десятичной дроби 0,125.

6. Ориентироваться на здравый смысл ответа к задаче

Все задачи экзамена ЕГЭ по математике базового уровня имеют реалистичный сюжет. Поэтому, получив число, которое является претендентом на ответ, не спешите записывать его в бланк ответов. Задержитесь на несколько мгновений, оцените найденное Вами значение с позиций здравого смысла.

Например, в задаче нужно было найти количество спасательных шлюпок по 50 мест в каждой для 260 человек, находящихся на корабле. Если разделить 260 на 50, то получится 5,2. Однако ответом будет не число 5 как результат округления, а число 6, поскольку если на борту будет 5 шлюпок по 50 мест, то для 10 человек уже мест не будет.

7. Проверять все результаты в задачах на установление соответствия элементов двух информационных рядов

В задачах 2, 7, 18 участнику экзамена необходимо установить соответствие между элементами из двух столбцов. Очень часто, когда три из четырёх соответствий установлены, четвёртое вносят в ответ как само собой разумеющееся. Это неверный подход.

Если в установлении первых трёх соответствий была допущена ошибка, то при проверке последнего – четвёртого она может быть обнаружена, а если проверка не была осуществлена, то и ошибка окажется невыявленной. Поэтому очень важно проверять правильность всех устанавливаемых соответствий.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 1**

Пример 1.1

Стоимость проездного билета на месяц составляет 580 рублей, а стоимость билета на одну поездку — 20 рублей. Аня купила проездной и совершила за месяц 41 поездку. На сколько рублей больше она бы потратила, если бы покупала билеты на одну поездку?

Ответ: 240.

Пример 1.2

В летнем лагере 192 ребёнка и 35 воспитателей. В одном автобусе можно перевозить не больше 28 пассажиров. Какое наименьшее количество таких автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

Ответ: 9.

Пример 1.3

В пачке 500 листов бумаги формата А4. За неделю в офисе расходуется 1200 листов. Какого наименьшего количества пачек бумаги хватит на 3 недели?

Ответ: 8.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 2**

Пример 2.1

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) рост жирафа	1) 500 см
Б) радиус Земли	2) 6400 км
В) ширина футбольного поля	3) 68 м
Г) толщина лезвия бритвы	4) 0,08 мм

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 1234.

Пример 2.2

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) масса новорождённого ребёнка	1) 3500 г
Б) масса кухонного холодильника	2) 18 т
В) масса карандаша	3) 15 г
Г) масса автобуса	4) 38 кг

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 1432.

Пример 2.3

Установите соответствие между величинами и их возможными значениями: к каждому элементу первого столбца подберите соответствующий элемент из второго столбца.

ВЕЛИЧИНЫ	ЗНАЧЕНИЯ
А) объём воды в Каспийском море	1) 78 200 км^3
Б) объём комнаты	2) 75 м^3
В) объём ящика для овощей	3) 0,5 л
Г) объём банки сметаны	4) 50 л

В таблице под каждой буквой, соответствующей величине, укажите номер её возможного значения.

Ответ:

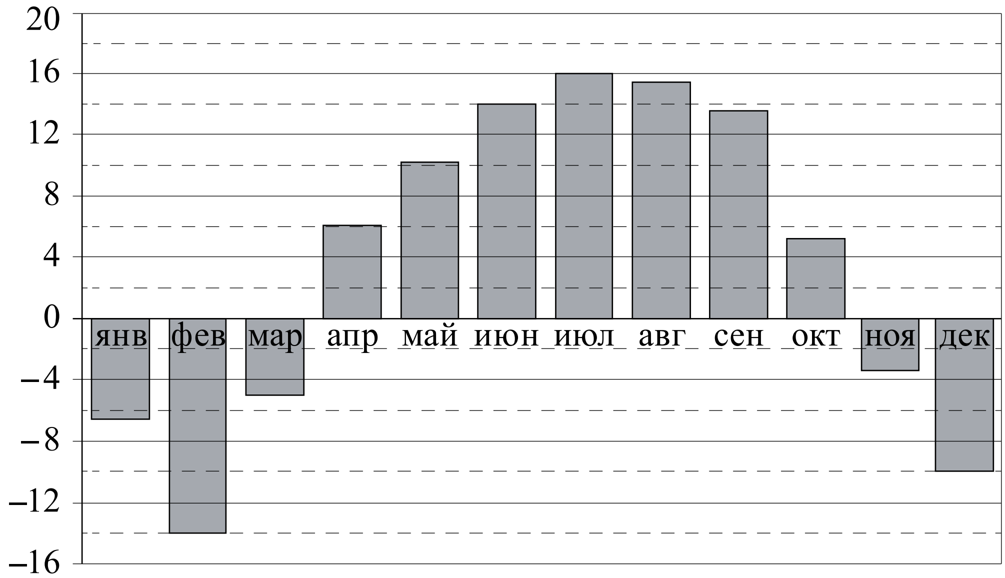
А	Б	В	Г

Ответ: 1243.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 3**

Пример 3.1

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Нижнем Новгороде за каждый месяц 1994 года. По горизонтали указаны месяцы; по вертикали — температура в градусах Цельсия.

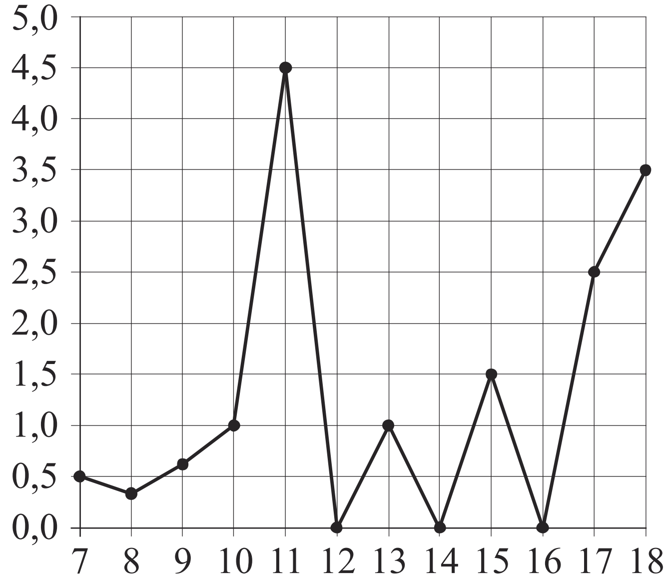


Определите по диаграмме наименьшую среднемесячную температуру в Нижнем Новгороде в 1994 году. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: –14.

Пример 3.2

На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Элисте с 7 по 18 декабря 2001 года. По горизонтали указаны числа месяца; по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.

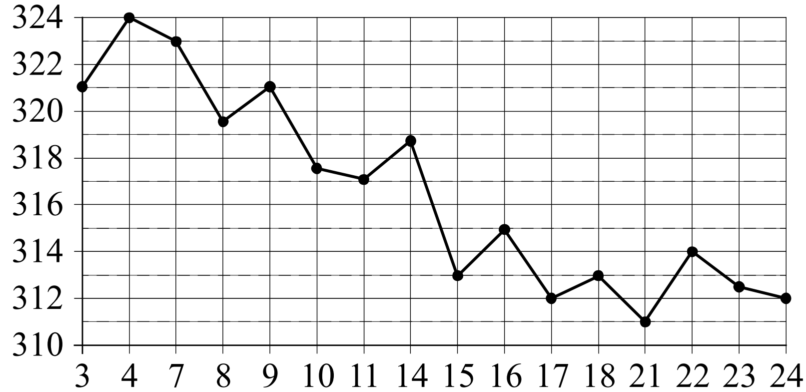


Определите по рисунку наибольшее суточное количество осадков в Элисте за данный период. Ответ дайте в миллиметрах.

Ответ: 4,5.

Пример 3.3

На рисунке жирными точками показана цена золота на момент закрытия биржевых торгов во все рабочие дни с 3 по 24 октября 2002 года. По горизонтали указаны числа месяца; по вертикали — цена золота в долларах США за унцию. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.



Определите по рисунку наименьшую цену золота на момент закрытия торгов за данный период. Ответ дайте в долларах США за унцию.

Ответ: 311.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 4**

Пример 4.1

В фирме «Эх, прокачу!» стоимость поездки на такси длительностью меньше 5 минут составляет 150 рублей. Если поездка длится 5 минут или дольше, то её стоимость (в рублях) рассчитывается по формуле $C = 150 + 11(t - 5)$, где t — длительность поездки, выраженная в минутах $(t \geq 5)$. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 16-минутной поездки. Ответ дайте в рублях.

Ответ: 271.

Пример 4.2

В фирме «Родник» стоимость (в рублях) колодца из железобетонных колец рассчитывается по формуле $C = 6000 + 4100n$, где n — число колец, установленных при рытье колодца. Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость колодца из 8 колец. Ответ дайте в рублях.

Ответ: 38800.

Пример 4.3

Площадь трапеции вычисляется по формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, где a и b — длины оснований трапеции, h — её высота. Пользуясь этой формулой, найдите площадь S, если $a = 6$, $b = 4$ и $h = 6$.

Ответ: 30.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 5**

Пример 5.1

На борту самолёта 20 мест рядом с запасными выходами и 12 мест за перегородками, разделяющими салоны. Остальные места неудобны для пассажира высокого роста. Пассажир Г. высокого роста. Найдите вероятность того, что на регистрации при случайном выборе места пассажиру Г. достанется удобное место, если всего в самолёте 400 мест.

Ответ: 0,08.

Пример 5.2

У бабушки 20 чашек: 4 с красными цветами, остальные с синими. Бабушка наливает чай в случайно выбранную чашку. Найдите вероятность того, что это будет чашка с синими цветами.

Ответ: 0,8.

Пример 5.3

Научная конференция проводится в четыре дня. Всего запланировано 60 докладов: первые два дня — по 12 докладов, остальные распределены поровну между третьим и четвёртым днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется случайным образом. Какова вероятность того, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

Ответ: 0,3.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 6**

Пример 6.1

Интернет-провайдер предлагает три тарифных плана.

Тарифный план	Абонентская плата	Плата за трафик
План «0»	Нет	0,9 руб. за 1 Мб
План «400»	432 руб. за 400 Мб трафика в месяц	0,5 руб. за 1 Мб сверх 400 Мб
План «800»	736 руб. за 800 Мб трафика в месяц	0,3 руб. за 1 Мб сверх 800 Мб

Пользователь предполагает, что его трафик составит 650 Мб в месяц, и, исходя из этого, выбирает наиболее дешёвый тарифный план. Сколько рублей должен будет заплатить пользователь за месяц, если его трафик действительно будет равен 650 Мб?

Ответ: 557.

Пример 6.2

Любовь Игнатьевна собирается в туристическую поездку на трое суток в некоторый город. В таблице дана информация о гостиницах в этом городе со свободными номерами на время её поездки.

Название гостиницы	Рейтинг гостиницы	Расстояние до центральной площади (км)	Цена номера (руб. за сутки)
«Южная»	6,4	1,5	3700
«Уют-плюс»	8,1	2,3	3200
«Центральная»	7,2	2,7	3100
«Вокзальная»	8,4	2,9	3000
«Турист»	7,5	2,2	3150
«Эльдорадо»	6,8	3,1	3000

Любовь Игнатьевна хочет остановиться в гостинице, которая находится не дальше 2,4 км от центральной площади города и цена номера в которой не превышает 3500 рублей за сутки. Среди гостиниц, удовлетворяющих этим условиям, выберите гостиницу с наивысшим рейтингом. Сколько рублей стоит проживание в этой гостинице в течение трёх суток?

Ответ: 9600.

Пример 6.3
В таблице приведены данные о шести чемоданах.

Номер чемодана	Длина (см)	Высота (см)	Ширина (см)	Масса (кг)
1	105	55	42	23
2	97	65	44	24
3	100	58	46	22,5
4	85	69	52	25
5	103	57	47	24,5
6	92	65	40	20

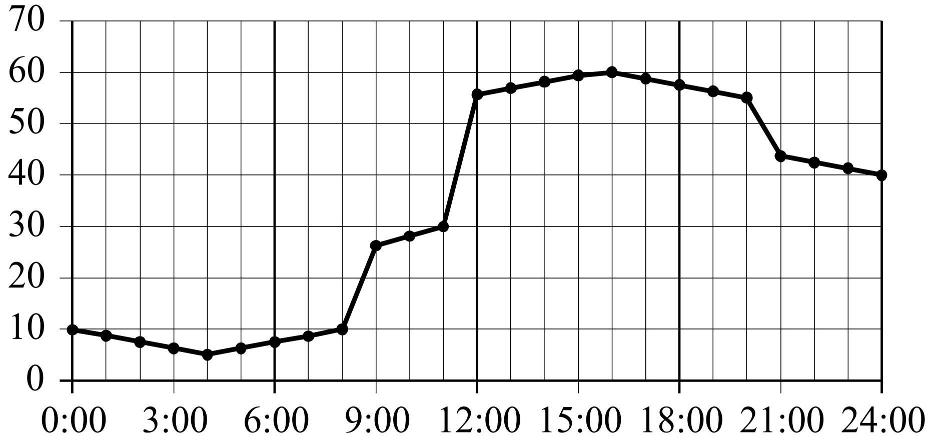
По правилам авиакомпании сумма трёх измерений (длины, высоты, ширины) чемодана, сдаваемого в багаж, не должна превышать 203 см, а масса не должна быть больше 23 кг. Какие чемоданы можно сдать в багаж по правилам этой авиакомпании?
В ответе укажите номера всех выбранных чемоданов без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 16.

Практико-ориентированные задания **линии 7** — о свойствах функций. В одних задачах может быть предложено исследование элементарных свойств функций по её графику, а в других — исследование, связанное с понятием производной и с касательной к графику функции.

Пример 7.1

На рисунке точками показано потребление воды городской ТЭЦ на протяжении суток. По горизонтали указывается время; по вертикали — объём воды в кубометрах в час. Для наглядности точки соединены линией.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику потребления данной ТЭЦ воды в течение этого периода.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

А) ночь (с 0 до 6 часов)

Б) утро (с 6 до 12 часов)

В) день (с 12 до 18 часов)

Г) вечер (с 18 до 24 часов)

ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) Потребление воды падало в течение всего периода.

2) Потребление воды достигло максимума за сутки.

3) Отмечен наибольший рост потребления воды за сутки.

4) Потребление воды сначала падало, а потом росло.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

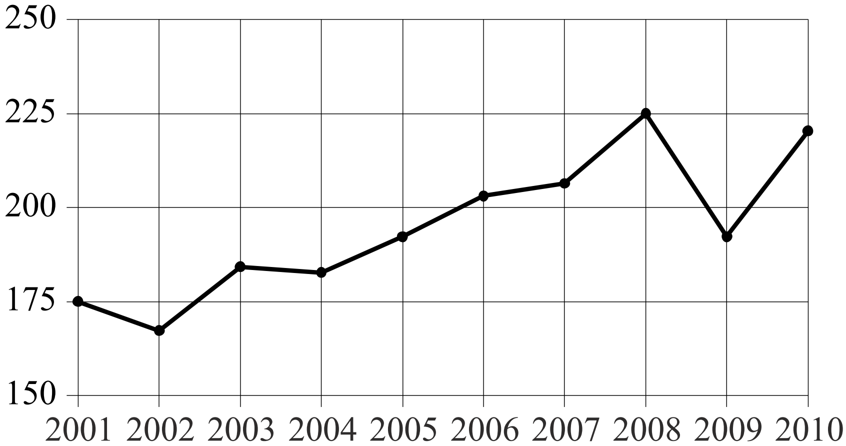
Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 4321.

Пример 7.2

На рисунке точками показан годовой объём добычи угля в России открытым способом в период с 2001 по 2010 год. По горизонтали указан год; по вертикали — объём добычи угля в миллионах тонн. Для наглядности точки соединены линиями.



Пользуясь рисунком, поставьте в соответствие каждому из указанных периодов времени характеристику добычи угля в этот период.

ПЕРИОДЫ ВРЕМЕНИ

А) 2002–2004 гг.

Б) 2004–2006 гг.

В) 2006–2008 гг.

Г) 2008–2010 гг.

ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) В течение периода объём добычи сначала уменьшался, а затем стал расти.
2) Объём добычи ежегодно составлял меньше 190 млн т.
3) Объём добычи равномерно рос в течение периода.
4) Объём добычи в первые два года почти не менялся, а затем значительно вырос.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

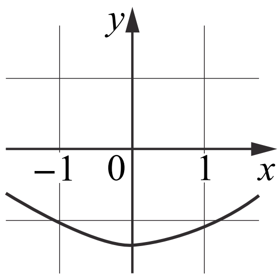
Ответ: 2341.

Пример 7.3

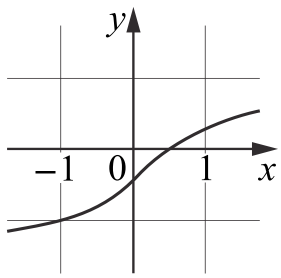
Установите соответствие между графиками функций и характеристиками этих функций на отрезке $[-1; 1]$.

ГРАФИКИ

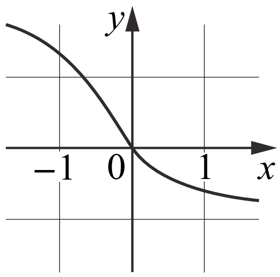
А)



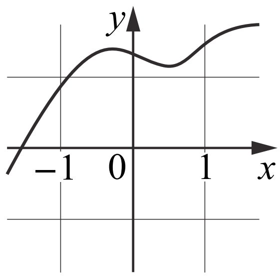
В)



Б)



Г)



ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) На отрезке $[-1; 1]$ функция убывает.
2) В каждой точке отрезка $[-1; 1]$ функция принимает отрицательное значение.
3) На отрезке $[-1; 1]$ функция возрастает.
4) В каждой точке отрезка $[-1; 1]$ функция принимает положительное значение.

В таблице под каждой буквой укажите соответствующий номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 2134

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 8**

Пример 8.1

Перед футбольным турниром измерили рост игроков футбольной команды города N. Оказалось, что рост каждого из футболистов этой команды больше 170 см и меньше 190 см. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) В футбольной команде города N обязательно есть игрок, рост которого равен 160 см.
2) В футбольной команде города N нет игроков с ростом 169 см.
3) Разница в росте любых двух игроков футбольной команды города N составляет больше 20 см.
4) Рост любого футболиста этой команды меньше 190 см.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 24.

Пример 8.2

В фирме работает 100 человек, из них 70 человек знают португальский язык, а 50 — французский. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Если человек из этой фирмы знает португальский язык, то он знает и французский.
2) В этой фирме хотя бы пять человек знают и португальский, и французский языки.
3) Нет ни одного человека в этой фирме, знающего и португальский, и французский языки.
4) Не больше 50 человек из этой фирмы знают и португальский, и французский языки.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 24.

Пример 8.3

Хозяйка к празднику купила торт, ананас, сок и мясную нарезку. Торт стоил дороже ананаса, но дешевле мясной нарезки, сок стоил дешевле торта. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Мясная нарезка была самой дорогой из покупок.
2) За сок хозяйка заплатила больше, чем за мясную нарезку.
3) Ананас стоил дешевле мясной нарезки.
4) Торт был самым дешёвым из покупок.

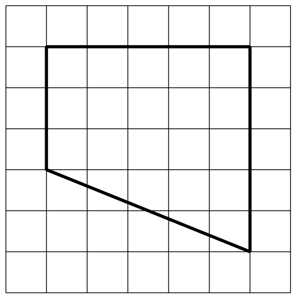
В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Ответ: 13.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 9**

Пример 9.1

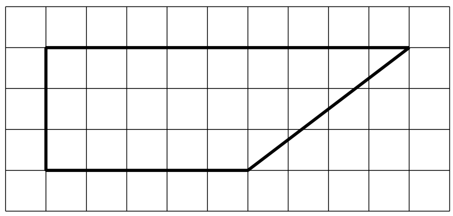
План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: 20.

Пример 9.2

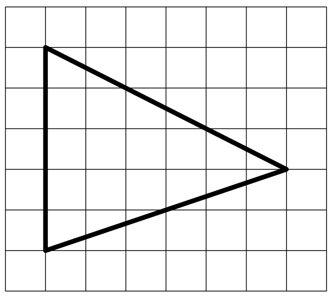
План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: 21.

Пример 9.3

План местности разбит на клетки. Каждая клетка обозначает квадрат 1 м × 1 м. Найдите площадь участка, изображённого на плане. Ответ дайте в квадратных метрах.



Ответ: 15.

Рассмотрим линии, на которые необходимо обратить особое внимание при подготовке к экзамену.

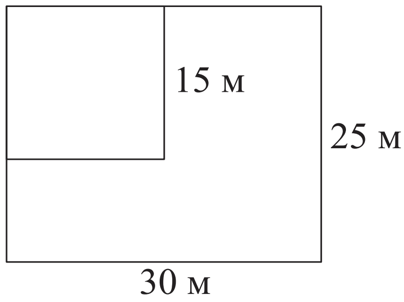
Практико-ориентированные задания по геометрии **линии 10** на вид не представляют особой сложности, но необходимо быть внимательным при работе с геометрическими величинами, уделять особое внимание размерности, аккуратно проводить выкладки.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 10**

<u>Пример 10.1</u>

Дачный участок имеет форму прямоугольника со сторонами 25 м и 30 м. Хозяин отгородил на участке квадратный вольер со стороной 15 м (см. рисунок). Найдите площадь оставшейся части участка. Ответ дайте в квадратных метрах.

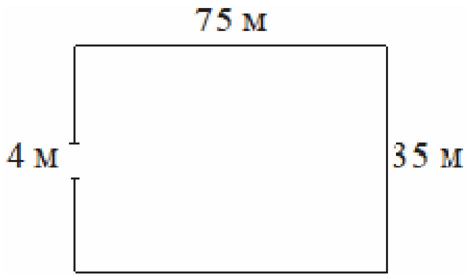
Ответ: 525.



<u>Пример 10.2</u>

Участок земли имеет прямоугольную форму. Стороны прямоугольника равны 35 м и 75 м. Найдите длину забора (в метрах), которым нужно обнести участок, предусмотрев проезд шириной 4 м.

Ответ: 216.



<u>Пример 10.3</u>

Участок земли для строительства дачи имеет форму прямоугольника, стороны которого равны 40 м и 30 м. Одна из бо́льших сторон участка идёт вдоль реки, а три остальные стороны нужно обнести забором. Найдите длину этого забора. Ответ дайте в метрах.

Ответ: 100.

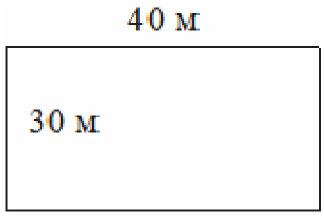


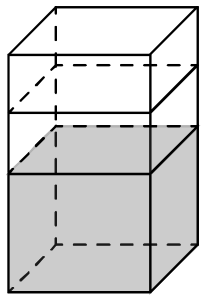
Рисунок в геометрической задаче нужно воспринимать как изображение взаимного расположения элементов, но нельзя относиться к нему как к чертежу, где соблюдены все размеры. При подготовке к экзамену можно сделать свой рисунок, отметив все известные элементы, и уже с использованием этого рисунка следует решать задачу — находить площадь, сумму длин, и только потом нужно отвечать на вопрос задания.

Геометрические задачи **линий 11** и **13** на расчёт элемента фигуры в пространстве представляют определённые трудности для участников экзамена базового уровня. Тем не менее, даже если участник экзамена испытывал трудности при изучении систематического курса стереометрии, отработка решения указанных заданий с использованием открытого банка и проверенных электронных ресурсов позволит освоить необходимые, в том числе для реальной жизни, пространственные навыки.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 11**

<u>Пример 11.1</u>

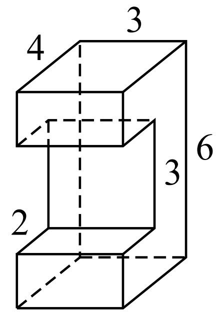
В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы, налито 5 л воды. После полного погружения в воду детали уровень воды в баке увеличился в 1,4 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.



Ответ: 2000.

<u>Пример 11.2</u>

Деталь имеет форму изображённого на рисунке многогранника (все двугранные углы прямые). Числа на рисунке обозначают длины рёбер в сантиметрах. Найдите площадь поверхности этой детали. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

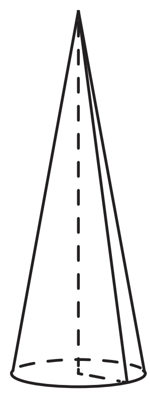


Ответ: 108.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 13**

<u>Пример 13.1</u>

Объём конуса равен 6π, а радиус его основания равен 1. Найдите высоту конуса.

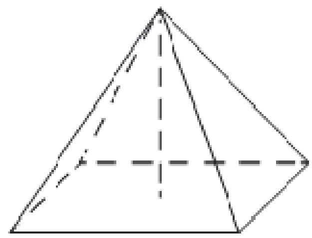


Ответ: 18.

Пример 13.2

Основанием четырёхугольной пирамиды является прямоугольник со сторонами 9 и 4. Найдите высоту этой пирамиды, если её объём равен 48.

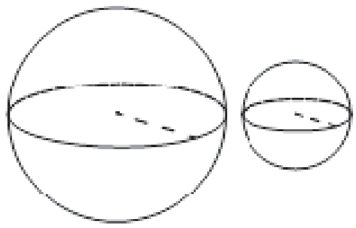
Ответ: 4.



Пример 13.3

Даны два шара с радиусами 7 и 1. Во сколько раз объём большего шара больше объёма меньшего?

Ответ: 343.



В трёхмерном пространстве объёмы визуально сравнить труднее, чем площади на плоскости. Задачи нужно решать с использованием формул из справочных материалов.

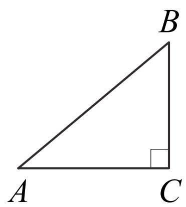
Геометрические задачи **линии 12** на различные соотношения в треугольнике представляют трудности для участников экзамена базового уровня. Рассмотрим примеры заданий, связанных с прямоугольным треугольником.

Примеры геометрических заданий **линии 12**

Пример 12.1

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=\sqrt{29}$, $BC=2$. Найдите $\operatorname{tg} A$.

Ответ: 0,4.

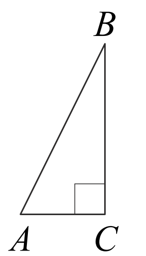


Пример 12.2

В треугольнике ABC угол C равен 90°, $AB=13$, $\sin A=\frac{12}{13}$.

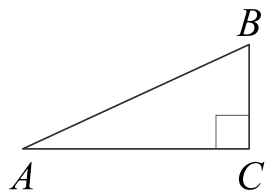
Найдите длину стороны AC.

Ответ: 5.



Пример 12.3

В треугольнике ABC угол C равен $90°$, $AB = 8$, $AC = 2\sqrt{15}$. Найдите $\cos B$.



Ответ: 0,25.

К решению задач о прямоугольных треугольниках можно применить следующий алгоритм.

1. Решая прямоугольный треугольник, нужно последовательно находить стороны и углы, которые можно найти непосредственно из условия или найденных ранее.
2. Найдя все стороны и углы, надо выписать в ответ нужный элемент.

Задачи можно решать с использованием формул справочных материалов — теоремы Пифагора и определения тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике.

Задания **линии 14** требуют нахождения значения выражения. При подготовке к решению этих задач следует обратить внимание на повторение понятий обыкновенной и десятичной дробей и на правильное выполнение вычислений, избегая устного счёта.

Примеры алгебраических заданий **линии 14**

Пример 14.1

Найдите значение выражения $\frac{5}{6} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{3}$.

Ответ: 2,5.

Пример 14.2

Найдите значение выражения $\frac{13}{3} : \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{7} \right)$.

Ответ: 7.

Пример 14.3

Найдите значение выражения $(3,1 + 3,4) \cdot 3,8$.

Ответ: 24,7.

Задания **линии 15** нацелены на решение простейших практико-ориентированных текстовых задач. При решении этих задач важно не просто выполнять действия, а проверять полученный ответ на «здравый смысл», что позволит избежать ошибок.

Примеры практико-ориентированных заданий **линии 15**

Пример 15.1
Держатели дисконтной карты книжного магазина получают при покупке скидку 5 %. Книга стоит 280 рублей. Сколько рублей заплатит держатель дисконтной карты за эту книгу?

Ответ: 266.

Пример 15.2
Пачка сливочного масла стоит 275 рублей. Пенсионерам магазин делает скидку 20 %. Сколько рублей стоит пачка масла для пенсионера?

Ответ: 220.

Пример 15.3
Из 2500 выпускников школ города 80 % правильно решили задачу № 1. Сколько выпускников школ этого города правильно решили задачу № 1?

Ответ: 2000.

Задания **линии 16** требуют нахождения значений рациональных, иррациональных, тригонометрических, логарифмических и показательных выражений.

Примеры алгебраических заданий **линии 16**

Пример 16.1
Найдите значение выражения $\sqrt{2{,}5}\cdot\sqrt{10}$.

Ответ: 5.

Пример 16.2
Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{150}}{\sqrt{6}}$.

Ответ: 5.

Пример 16.3
Найдите значение выражения $\log_{\sqrt{11}} 11^2$.

Ответ: 4.

Задания **линии 17** нацелены на решение линейных, квадратных, рациональных, показательных, логарифмических уравнений.

Примеры алгебраических заданий **линии 17**

Пример 17.1

Найдите корень уравнения $-3+4(-7+5x)=9x-9$.

Ответ: 2.

Пример 17.2

Найдите корень уравнения $4-2x=-4x+5$.

Ответ: 0,5.

Пример 17.3

Решите уравнение $x^2+3x-18=0$.

Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

Ответ: 3.

В заданиях **линии 18** нужно установить соответствие между точками координатной прямой и рациональными, иррациональными числами. На этой же позиции может быть задание на решение рациональных, показательных, логарифмических неравенств. При подготовке рекомендуется не только решать задания, аналогичные экзаменационным, но и повторять решения простейших неравенств всех типов.

Примеры алгебраических заданий **линии 18**

Пример 18.1

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\dfrac{x-3}{(x-6)^2}>0$	1) $(-\infty;3)\cup(6;+\infty)$
Б) $(x-3)(x-6)>0$	2) $(3;6)\cup(6;+\infty)$
В) $5^{-x+2}>0,2$	3) $(3;6)$
Г) $\log_3(x-3)<1$	4) $(-\infty;3)$

Запишите в приведённой в ответе таблице под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 2143.

Пример 18.2

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $4^{-x+7} > 16$	1) $x > 1$
Б) $\dfrac{1}{(x-5)(x-1)} > 0$	2) $1 < x < 5$
В) $\log_4 x > 0$	3) $x < 5$
Г) $\dfrac{x-1}{x-5} < 0$	4) $x < 1$ или $x > 5$

Запишите в приведённой в ответе таблице под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 3412.

Пример 18.3

Каждому из четырёх неравенств в левом столбце соответствует одно из решений в правом столбце. Установите соответствие между неравенствами и их решениями.

НЕРАВЕНСТВА	РЕШЕНИЯ
А) $\log_5 x < 1$	1) $\left(\dfrac{1}{5};\ +\infty\right)$
Б) $\log_5 x > 1$	2) $\left(0;\ \dfrac{1}{5}\right)$
В) $\log_5 x < -1$	3) $(5;\ +\infty)$
Г) $\log_5 x > -1$	4) $(0; 5)$

Запишите в приведённой в ответе таблице под каждой буквой соответствующий решению номер.

Ответ:

А	Б	В	Г

Ответ: 4321.

В заданиях **линии 20** проверяется умение решать текстовые задачи. Несмотря на то что в задании требуется лишь привести краткий ответ, решая данную задачу как при подготовке, так и на экзамене, рекомендуется полностью провести решение задачи на черновике, включая составление модели, решение полученного уравнения, проверку ответа.

Примеры алгебраических заданий **линии 20**

Пример 20.1

Путешественник переплыл море на яхте со средней скоростью 18 км/ч. Обратно он летел на спортивном самолёте со скоростью 306 км/ч. Найдите среднюю скорость путешественника на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 34.

Пример 20.2

Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 30 км/ч, вторую треть — со скоростью 150 км/ч, а последнюю — со скоростью 100 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 60.

Пример 20.3

Из городов А и В, расстояние между которыми равно 320 км, навстречу друг другу одновременно выехали два автомобиля и встретились через 2 часа на расстоянии 170 км от города В. Найдите скорость автомобиля, выехавшего из города А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 75.

Задачи **линий 19** и **21** требуют организованного перебора вариантов или логического анализа. Эти задания проверяют умение работать с числами, записанными по разрядам, знание признаков делимости.

Примеры заданий **линии 19**

Пример 19.1

Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 45, все цифры которого различны и чётны. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: в ответе нужно записать одно из чисел: 6840; 6480; 4860; 4680; 8640; 8460.

Пример 19.2

Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 2 и 0 и делится на 24. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: в ответе нужно записать одно из чисел: 222000; 220200; 202200.

Пример 19.3

Найдите четырёхзначное натуральное число, кратное 12, произведение цифр которого равно 10. В ответе запишите какое-нибудь одно такое число.

Ответ: в ответе нужно записать одно из чисел: 1152; 1512; 5112.

Задание линии 19 творческое, конструктивное, требующее не столько фантазии, сколько тщательного системного подбора, основанного на владении свойствами целых чисел. Если не использовать алгебраические соображения, то одно какое-либо число, удовлетворяющее всем условиям, можно найти за 5–10 минут простым перебором. Нужно обращать внимание на умение выполнять организованный, последовательный перебор вариантов, а позже — перебор условий, которым должно удовлетворять число-кандидат.

Прежде чем записать полученное число в ответ, целесообразно ещё раз проверить, удовлетворяет ли оно всем требованиям, указанным в условии задачи.

Задание **линии 21** — интересная задача на сообразительность и логику.

Примеры заданий **линии 21**

Пример 21.1

Улитка за день заползает вверх по дереву на 2 м, а за ночь сползает на 1 м. Высота дерева 10 м. За сколько дней улитка доползёт до вершины дерева, начав путь от его основания?

Ответ: 9.

Пример 21.2

В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- за две золотые монеты получить три серебряные и одну медную;
- за пять серебряных монет получить три золотые и одну медную.

У Николая были только серебряные монеты. После нескольких посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николая?

Ответ: 10.

Пример 21.3

Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире № 462, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша? (Во всех подъездах количество квартир на этаже одинаково, нумерация квартир в доме начинается с единицы.)

Ответ: 5.

Для успешного выполнения этих заданий требуется умение применять различные пути решения, которое вырабатывается при решении задач углублённого уровня на протяжении нескольких лет обучения, а также требуется внимательно прочитать условие задачи и провести организованный перебор вариантов, обращая внимание на проверку полученного ответа.

Желаем успеха на экзамене!

Рекомендации по выполнению экзаменационной работы по математике профильного уровня

Дорогие друзья!

Скоро вам предстоит сдать единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике. Ваша основная задача — получить результат, который позволит поступить на выбранную специальность вуза. Подготовка будет эффективной, если вы будете систематически заниматься. Данные рекомендации помогут вам в этом.

КИМ ЕГЭ 2025 г. по математике профильного уровня состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Все линии заданий преемственны по отношению к предыдущей экзаменационной модели.

Рекомендуем вам придерживаться следующих этапов индивидуальной подготовки.

1. Определение своего уровня подготовки

Для подготовки к экзамену нужно выяснить, какой балл был необходим в прошлом году для поступления на выбранную специальность вуза, определить уровень своих знаний и умений, при необходимости следует скорректировать свои планы, чтобы цель была реалистичной. Попробуйте решить три–пять из числа размещённых на сайте ФИПИ открытых и демонстрационного вариантов; посмотрите, какие задачи получается решить легко, в решении каких возникают трудности, а решение каких оказалось возможным только после ознакомления с критериями.

Начните подготовку с решения тех задач, которые получаются лучше всего, для этого вы можете использовать открытый банк заданий ФИПИ[2] , РЭШ, МЭШ и Гиперматику. После повторения соответствующих приёмов и методов решения задач по учебнику, рассмотрения решения задач на платформе Гиперматика, постепенно включайте в свои занятия решение тех задач, которые раньше вызвали у вас затруднения. Обращайте внимание на ключевые этапы решения задачи, которые позволили получить верный результат, выделяйте для себя те подходы, которые оказались эффективными.

Каждая задача может быть решена разными методами; это может помочь вам не только в решении новых и незнакомых задач, но и в выполнении проверки полученного решения и ответа.

2. Внимание к задачам, которые получается верно решать

Статистика результатов экзамена свидетельствует об очень досадном явлении. Участник ЕГЭ по математике профильного уровня получает максимальное количество первичных баллов за каждую задачу части 2,

[2] См.: <https://ege.fipi.ru/bank/index.php?proj=E040A72A1A3DABA14C90C97E0B6EE7DC>.

но 100 баллов в итоге у него нет, потому что он допустил ошибку в двух-трёх задачах части 1.

Парадокс — решивший верно последнюю задачу в варианте допускает арифметическую ошибку в первой задаче! Вы должны помнить, что любая верно решённая задача приносит баллы, в том числе и из части 1 экзаменационной работы. Уделяйте внимание задачам, которые хорошо получается решать, совершенствуйте навык их решения. Этот же подход позволит сэкономить время на решение других содержательных задач.

3. Достоверный источник заданий для тренировки

Доверяйте только достоверному источнику заданий, из которого вы выбираете задания для своей подготовки. Повторение, систематизация и обобщение знаний наиболее результативны, позволяют правильно выявить дефициты в подготовке к экзамену, если все задания соответствуют требованиям этого экзамена. На сайте ФИПИ размещён открытый банк заданий ЕГЭ по математике профильного уровня, из которого формируется часть 1 экзаменационной работы.

Кроме того, в открытом банке заданий ФИПИ представлены задачи из части 2 экзаменационной работы, которые ранее были использованы при проведении экзамена. Они помогут вам оценить свой уровень подготовки, составить соответствующий тренажёр, решить несколько типовых заданий, совершенствовать часто встречающиеся методы решения, получить уверенность в их посильности.

4. Тематическое повторение при подготовке к экзамену

Не увлекайтесь решением тренировочных вариантов ЕГЭ по математике профильного уровня. Решение варианта может помочь выстроить стратегию в последовательности решаемых задач, целесообразную именно для вас, в планировании времени на экзамене, научиться сосредоточиваться на решении задач.

Для текущей подготовки следует ориентироваться на тематическое повторение. Например, логарифмическая функция и её свойства могут быть представлены в следующих заданиях ЕГЭ по математике профильного уровня: 6 и 13 (решить уравнение), 7 (найти значение выражения), 9 (найти значение заданной величины), 11 (найти значение функции), 12 (исследовать функцию) и 15 (решить неравенство). Таким образом, если повторение будет иметь тематический характер, то оно обеспечит универсальность в подготовке к экзамену.

Тематическое повторение может быть, например, таким, как представлено в таблице 3.

Таблица 3

Тема	Номер задания в соответствии с демонстрационным вариантом ЕГЭ 2025 г. по математике профильного уровня
Показательная функция и её свойства	6, 7, 9, 11, 12, 13, 15
Логарифмическая функция и её свойства	6, 7, 9, 11, 12, 13, 15
Тригонометрические функции и их свойства	6, 7, 9, 11, 12, 13
Иррациональные выражения	6, 7, 9, 11, 12
Теория вероятностей	4, 5
Исследование функций	8, 12
Задачи по геометрии	1, 2, 3, 14, 17
Решение задач на составление уравнений	10

Для повторения, обобщения и систематизации знаний разумно решать сокращённые тренировочные варианты по пять–семь заданий (из которых одна-две задачи из части 2).

5. Непрерывное совершенствование вычислительных навыков

На экзамене нельзя использовать калькулятор или любое другое техническое средство, упрощающее или убыстряющее вычисления, поэтому ни на каком из занятий у вас не должно быть соблазна им воспользоваться. Отложите калькулятор в сторону. Все вычисления выполняйте на листе бумаги (черновике).

При этом совершенствуйте технику проведения вычислений. Не спешите найти числовой результат сразу перемножая, деля или складывая числа. Спрогнозируйте последовательность необходимых арифметических действий на несколько шагов вперёд. Возможно, для решения задачи и не потребуется проведение трудоёмких подсчётов.

Рассмотрим в качестве примера такую **задачу**. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне T_n = 15 °C, через радиатор отопления пропускают горячую воду. Расход проходящей через трубу радиатора воды m = 0,3 кг/с. Проходя по трубе расстояние x, вода охлаждается от начальной температуры $T_{\text{в}}$ = 90 °C до температуры T, причём $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_n}{T - T_n}$, где $c = 4200 \frac{\text{Вт} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{с}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 28 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{с}}$ — коэффициент теплообмена, а α = 1,6 — постоянная. Найдите, до какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы радиатора равна 144 м.

После анализа условия задачи и выполнения подстановки указанных значений в закон зависимости будет получено уравнение относительно T:

$$144 = 1{,}6 \cdot \frac{4200 \cdot 0{,}3}{28} \cdot \log_2 \frac{90-15}{T-15}.$$

Обратим внимание на то, что сначала можно выполнить преобразование, ведущее к арифметическим действиям с целыми числами, и упростить выражение под знаком логарифма

$$144 = \frac{16 \cdot 42 \cdot 3}{28} \log_2 \frac{75}{T-15}.$$

Следующим шагом можно сократить дробь (как коэффициент перед логарифмом) на 7 и на 4

$$144 = 4 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \log_2 \frac{75}{T-15}.$$

Теперь удобно обе части полученного уравнения разделить последовательно на числа 12 и 6:

$$12 = 6 \cdot \log_2 \frac{75}{T-15};\ \ 2 = \log_2 \frac{75}{T-15}.$$

После определения логарифма числа перейдём к решению уравнения с использованием свойства пропорции:

$$\frac{75}{T-15} = 4,\ \ 4 \cdot \left(T-15\right) = 75,\ \ 4T = 135,\ \ T = 33{,}75.$$

Спланированная последовательность действий позволила не прибегать к трудоёмким вычислениям и решить задачу.

6. Использование преимущества разных подходов к решению одной и той же задачи

Одна и та же математическая задача может быть решена разными способами. Это обстоятельство является хорошим помощником участнику экзамена. С одной стороны, предоставляется возможность, решив задачу по-разному, проверить верность полученного результата. С другой стороны, знание разных способов решения позволяет выбирать для конкретной задачи самый рациональный и экономить время, отведённое на решение всех экзаменационных задач. Кроме того, при встрече с незнакомой задачей появляется возможность попробовать разные подходы к решению.

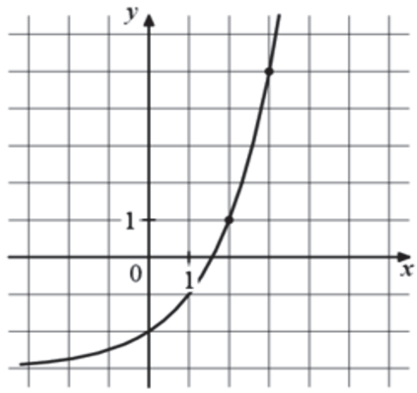
Например, если предложена задача найти значение выражения $\frac{11\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}} - \frac{6\sqrt{x}}{x} + 3x - 2$ при $x = 3$, то её можно решить разными способами. Можно сразу выполнить подстановку числа 3 вместо переменной x и выполнять далее преобразования числового выражения. Можно предварительно привести обе дроби к общему знаменателю x. Однако можно поступить иначе: сократить вторую дробь и уже после этого привести обе дроби к общему знаменателю и в завершении всех преобразований выполнить подстановку заданного значения переменной:

$$\frac{11\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}} - \frac{6\sqrt{x}}{x} + 3x - 2 = \frac{11\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}} - \frac{6}{\sqrt{x}} + 3x - 2 = \frac{11\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + 3x - 2 = 11 + 3x - 2 =$$

$= 9 + 3x;\ 9 + 3 \cdot 3 = 18.$

Такое решение показывает, что предложенная задача допускает простой подход в её решении, на этапе подготовке к экзамену разумно уделять внимание наиболее рациональным способам решения задач. На экзамене же это не имеет значения; важно, чтобы задача была решена верно.

Рассмотрим ещё один пример. По заданному на рисунке графику функции $f(x) = a^x + b$ необходимо найти значение $f(4)$.



Если придерживаться прямолинейного подхода решения задачи, то координаты (2; 1) и (3; 5) «выделенных» на графике функции точек необходимо поставить в функцию и предварительно решить составленную систему уравнений $\begin{cases} a^2 + b = 1, \\ a^3 + b = 5. \end{cases}$ Однако для её решения придётся решать уравнение третьей степени, что не так-то просто. Между тем если проанализировать график заданной функции, то можно найти другие, более удобные точки — (0; –2), (1; – 1), принадлежащие ему, и подстановка их координат приведёт к решению существенно более простой системы уравнений: $\begin{cases} 1 + b = -2, \\ a^1 + b = -1; \end{cases}$ $\begin{cases} b = -3, \\ a = 2. \end{cases}$ Откуда: $f(4) = 2^4 - 3 = 13$. При этом знание координат точек графика функции (2; 1) и (3; 5) помогает проверить, что функция $f(x) = 2^x - 3$ найдена верно.

7. Проверка полученного ответа

Получив ответ для предложенной задачи, не спешите вносить его в бланк ответов. Подумайте, как проверить его и убедиться, что задача решена верно. Если решали уравнение, то можно выполнить подстановку найденного корня; если решали задачу на движение, то помните, что скорость пешехода не может быть больше скорости поезда.

Интерпретация и оценка полученного результата очень важны в задачах, где требуется найти наибольшее значение, — оно должно достигаться. Например, если в задаче нужно найти наибольшее время, в течение которого электроприбор может нагреваться, и получены два положительных значения, то, перед тем как записать ответ, необходимо ещё раз проанализировать всю информацию, содержащуюся в условии задачи.

Обратимся для примера к задаче из открытого банка заданий. Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в кельвинах) от времени работы: $T(t) = T_0 + bt + at^2$, где t — время (в минутах), $T_0 = 1400$ К, $a = -10$ К/мин.^{2}, $b = 200$ К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1760 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Обычно путь решения состоит в том, что участник экзамена составляет уравнение $1760 = 1400 + 200t - 10t^2$. Из него получает приведённое квадратное уравнение $t^2 - 20t + 36 = 0$, корень которого $t = 18$ или $t = 2$.

Поставленный в задаче вопрос требует найти наибольшее время, и возникает предпосылка для получения неверного ответа – числа 18, так как из двух найденных корней: 2 и 18 — число 18 наибольшее. Между тем этот ответ неверен в силу физического смысла задачи. В ситуации непрерывного нагревания 2 – критичное значение, после которого прибор нужно будет уже выключать. Поэтому правильный ответ — число 2. А наибольшее время в данной ситуации означает, что прибор можно выключить и раньше, но через 2 минуты его выключить следует обязательно, иначе он сломается.

Рекомендации по выполнению заданий части 1 экзаменационной работы по математике профильного уровня

Часть 1 содержит 7 заданий базового уровня (задания 1–4, 6–8) и 5 заданий повышенного уровня (задания 5, 9–12), в которых ответ необходимо записать в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Они проверяют вычислительные и логические умения и практические навыки применения математических знаний в повседневных ситуациях, в том числе умения использовать простейшие вероятностные и статистические модели, ориентироваться в простейших геометрических конструкциях. В часть 1 работы включены задания по всем основным разделам курса математики: геометрия (планиметрия и стереометрия), алгебра, начала математического анализа, теория вероятностей и статистика.

Геометрия

Задания **линий 1–3** проверяют умение решать геометрические задачи, наиболее трудные для выпускников. Ниже приведены примеры заданий линий 1–3 базового уровня с кратким ответом.

Задание 1

Элементы содержания

Треугольник.

Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат.

Трапеция.

Окружность и круг.

Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника.

Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника.

Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности.

Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника.

Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.

Проверяемые умения

Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

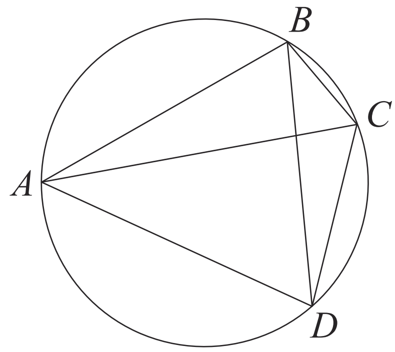
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Примеры таких заданий приведены ниже.

<u>Пример 1.1</u>

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 103°, угол CAD равен 42°. Найдите угол ABD. Ответ дайте в градусах.

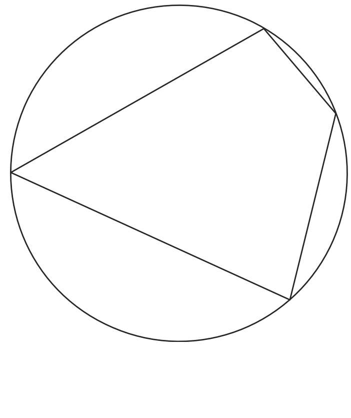
Ответ: 61.



<u>Пример 1.2</u>

Два угла вписанного в окружность четырёхугольника равны 59° и 102°. Найдите бо́льший из оставшихся углов. Ответ дайте в градусах.

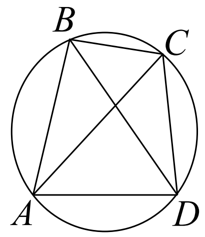
Ответ: 121.



Пример 1.3

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Угол ABC равен 120°, угол ABD равен 43°. Найдите угол CAD. Ответ дайте в градусах.

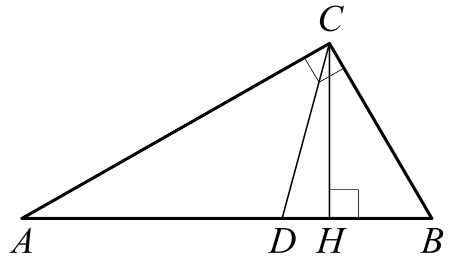
Ответ: 77.



Пример 1.4

Острый угол B прямоугольного треугольника ABC равен 75°. Найдите угол между высотой CH и биссектрисой CD, проведёнными из вершины прямого угла C. Ответ дайте в градусах.

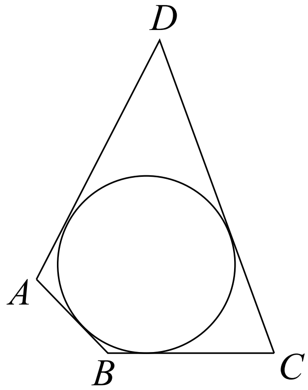
Ответ: 30.



Пример 1.5

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 8$, $BC = 10$ и $CD = 37$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

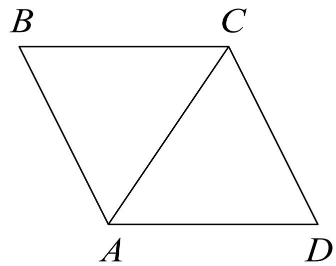
Ответ: 35.



Пример 1.6

В ромбе $ABCD$ угол CDA равен $78°$. Найдите величину угла ACB. Ответ дайте в градусах.

Ответ: 51.



Задание 2

Элементы содержания

Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве.
Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на число.
Координаты вектора, скалярное произведение векторов, угол между векторами.

Проверяемые умения

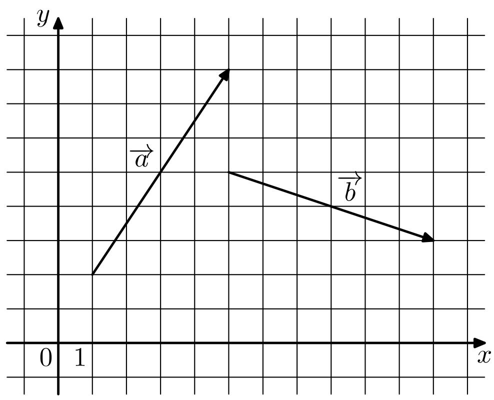
Определять координаты точки; проводить операции над векторами; вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами.
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 2.1

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

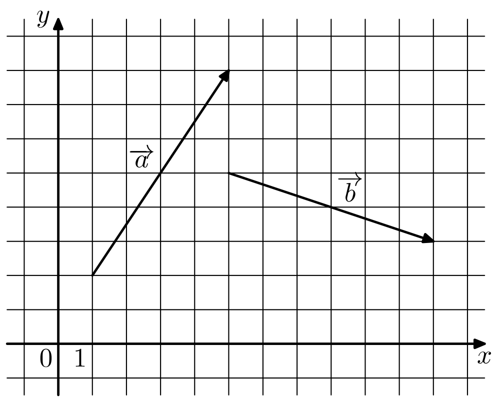
Ответ: 12.



Пример 2.2

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$.

Ответ: 22.



Пример 2.3

Даны векторы $\vec{a}(-6;4)$ и $\vec{b}(2;5)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: 8.

Пример 2.4

Даны векторы $\vec{a}(2;0)$, $\vec{b}(-19;6)$ и $\vec{c}(-4;6)$. Найдите длину вектора $7\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

Ответ: 1.

Пример 2.5

Даны векторы $\vec{a}(11;-8)$, $\vec{b}(-7;9)$ и $\vec{c}(-5;9)$. Найдите скалярное произведение $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Ответ: –11.

Пример 2.6

Длина вектора $\vec{a}$ равна $14\sqrt{2}$, угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 135°, а скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}$ равно -28. Найдите длину вектора $\vec{b}$.

Ответ: 2.

Задание 3

Элементы содержания

Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма.

Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида.

Сечения куба, призмы, пирамиды.

Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая.

Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая.

Шар и сфера, их сечения.

Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника.

Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми; расстояние между параллельными плоскостями.

Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.

Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы.

Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара.

Проверяемые умения

Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов), использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы.

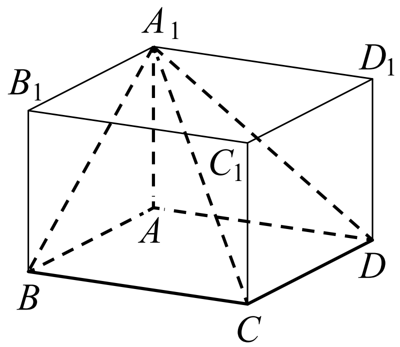
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 3.1

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, D, A_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 3$, $AD = 9$, $AA_1 = 4$.

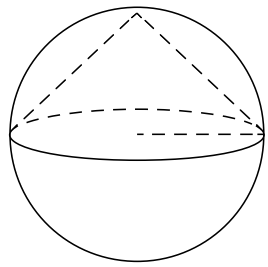
Ответ: 36.



Пример 3.2

Конус вписан в шар. Радиус основания конуса равен радиусу шара. Объём конуса равен 24. Найдите объём шара.

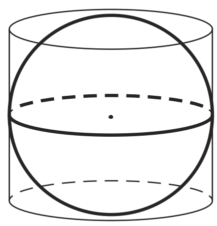
Ответ: 96.



Пример 3.3

Цилиндр, объём которого равен 18, описан около шара. Найдите объём шара.

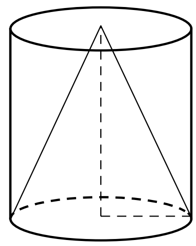
Ответ: 12.



Пример 3.4

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Объём цилиндра равен 30. Найдите объём конуса.

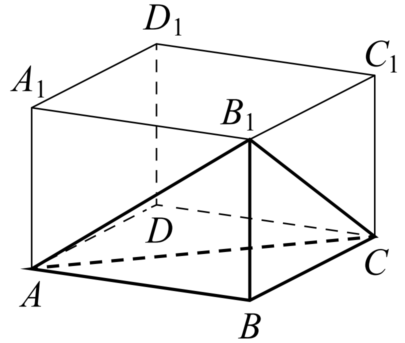
Ответ: 10.



Пример 3.5

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 9$, $BC = 7$, $AA_1 = 6$. Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.

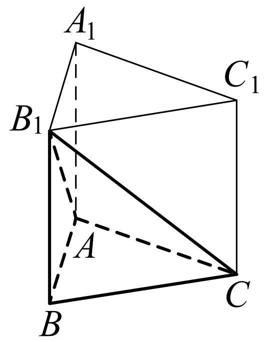
Ответ: 63.



Пример 3.6

Найдите объём многогранника, вершинами которого являются вершины A, B, C, B_1 правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$, площадь основания которой равна 3, а боковое ребро равно 8.

Ответ: 8.



Вероятность и статистика

Задания **линий 4** и **5** проверяют сформированность умения находить вероятность события. Ниже приведены примеры заданий линии 4 базового уровня и заданий линии 5 повышенного уровня.

Задание 4

Элементы содержания

Вероятности событий.

Проверяемые умения

Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 4.1

В группе туристов 20 человек. С помощью жребия они выбирают семь человек, которые должны идти в село в магазин за продуктами. Какова вероятность того, что турист Д., входящий в состав группы, пойдёт в магазин?

Ответ: 0,35.

Пример 4.2

В чемпионате по гимнастике участвуют 50 спортсменок: 22 из Японии, 13 из Китая, остальные из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.

Ответ: 0,3.

Пример 4.3

На конференцию приехали учёные из трёх стран: 9 из Португалии, 7 из Финляндии и 4 из Болгарии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что седьмым окажется доклад учёного из Португалии.

Ответ: 0,45.

Пример 4.4

Вероятность того, что в случайный момент времени температура тела здорового человека окажется ниже $36{,}8\,^{\circ}\mathrm{C}$, равна 0,83. Найдите вероятность того, что в случайный момент времени у здорового человека температура окажется $36{,}8\,^{\circ}\mathrm{C}$ или выше.

Ответ: 0,17.

Пример 4.5

В сборнике билетов по географии всего 20 билетов, в семи из них встречается вопрос по теме «Физическая география». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику достанется вопрос по теме «Физическая география».

Ответ: 0,35.

Пример 4.6

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпадет ровно один раз.

Ответ: 0,5.

Задание 5

Элементы содержания

Вероятности событий.

Проверяемые умения

Моделировать реальные ситуации на языке теории вероятностей статистики, вычислять в простейших случаях вероятности событий.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 5.1

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,91. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Ответ: 0,037.

Пример 5.2

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: 0,0576.

Пример 5.3
В торговом центре два одинаковых автомата продают чай. Вероятность того, что к концу дня в первом автомате закончится чай, равна 0,2. Вероятность того, что в то же время чай закончится во втором автомате, такая же. Вероятность того, что чай закончится одновременно в обоих автоматах, равна 0,18. Найдите вероятность того, что к концу дня чай останется и в первом, и во втором автоматах.

Ответ: 0,78.

Пример 5.4
Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,2. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.

Ответ: 0,992.

Пример 5.5
В коробке 6 синих, 9 красных и 10 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры.

Ответ: 0,18.

Пример 5.6
Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,7. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в три первые мишени и не попадёт в последнюю.

Ответ: 0,1029.

Алгебра и начала математического анализа

Задания **линий 6–12** проверяют сформированность умения решать алгебраические задания. Ниже приведены примеры заданий линий 6–8 базового уровня и заданий линий 9–12 повышенного уровня.

Задание 6

Элементы содержания

Квадратные уравнения.
Рациональные уравнения.
Иррациональные уравнения.
Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения.
Логарифмические уравнения.

Проверяемое умение

Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 6.1

Найдите корень уравнения $3^{x+2}=81$.

Ответ: 2.

Пример 6.2

Найдите корень уравнения $4^{x-3}=64$.

Ответ: 6.

Пример 6.3

Найдите корень уравнения $\sqrt{44-5x}=3$.

Ответ: 7.

Пример 6.4

Найдите корень уравнения $\sqrt{99-7x}=6$.

Ответ: 9.

Пример 6.5

Найдите корень уравнения $\log_5(8-x)=\log_5 2$.

Ответ: 6.

Пример 6.6

Найдите корень уравнения $\log_7(1-x)=\log_7 5$.

Ответ: – 4.

Пример 6.7

Найдите корень уравнения $(x-5)^3=64$.

Ответ: 9.

Пример 6.8

Найдите корень уравнения $(x+4)^3=-125$.

Ответ: – 9.

Задание 7

Элементы содержания

Степень с натуральным показателем.
Дроби, проценты, рациональные числа.
Степень с целым показателем.

Корень степени $n > 1$ и его свойства.
Степень с рациональным показателем и её свойства.
Свойства степени с действительным показателем.
Синус, косинус, тангенс и котангенс числа.
Основные тригонометрические тождества.
Формулы приведения.
Синус и косинус двойного угла.
Логарифм числа.
Логарифм произведения, частного, степени.
Преобразования выражений, включающих в себя арифметические операции.
Преобразования выражений, включающих в себя операцию возведения степень.
Преобразования выражений, включающих в себя корни натуральной степени.
Преобразования тригонометрических выражений.
Преобразование выражений, включающих в себя операцию логарифмирования.

Проверяемые умения

Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма.

Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих в себя степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 7.1

Найдите значение выражения $\log_2 6,4 + \log_2 10$.

Ответ: 6.

Пример 7.2

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_8 81}{\log_8 3}$.

Ответ: 4.

Пример 7.3

Найдите значение выражения $\dfrac{8\sin 94^\circ}{\sin 47^\circ \cdot \sin 43^\circ}$.

Ответ: 8.

Пример 7.4

Найдите значение выражения $3\sin\dfrac{13\pi}{12}\cdot\cos\dfrac{13\pi}{12}$.

Ответ: 0,75.

Пример 7.5

Найдите значение выражения $3\sqrt{3}-6\sqrt{3}\sin^2\frac{13\pi}{12}$.

Ответ: 4,5.

Пример 7.6

Найдите значение выражения $3\cos 2\alpha$, если $\cos\alpha=-0,8$.

Ответ: 0,84.

Задание 8

Задания **линии 8** проверяют умение применять производную к исследованию функции. Здесь важно знать геометрический смысл производной функции в точке, производные элементарных функций и правила нахождения производных, а также уметь определить связь между характером монотонности функции и знаком её производной, по графику производной функции охарактеризовать свойства самой функции.

Элементы содержания

Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания.

Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции.

Наибольшее и наименьшее значения функции.

Понятие о производной функции, геометрический смысл производной.

Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.

Уравнение касательной к графику функции.

Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Проверяемые умения

Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, описывать по графику поведение свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения, строить графики изученных функций.

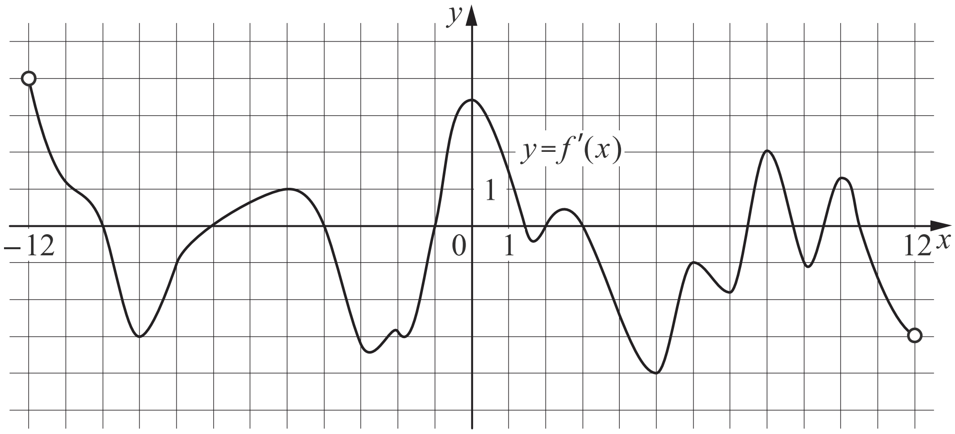
Исследовать простейшие случаи функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 8.1

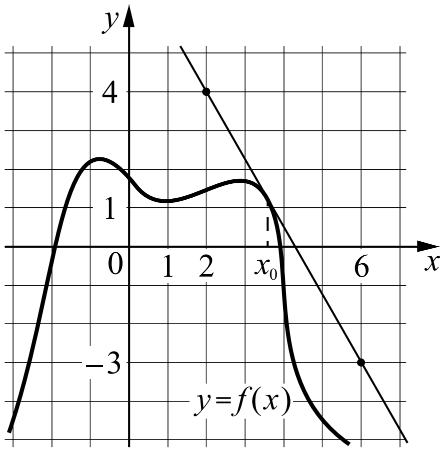
На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-12;12)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-6;11]$.



Ответ: 5.

Пример 8.2

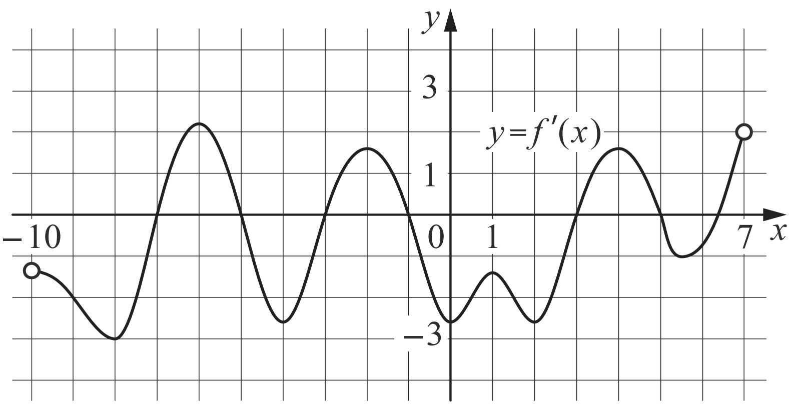
На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Ответ: – 1,75.

Пример 8.3

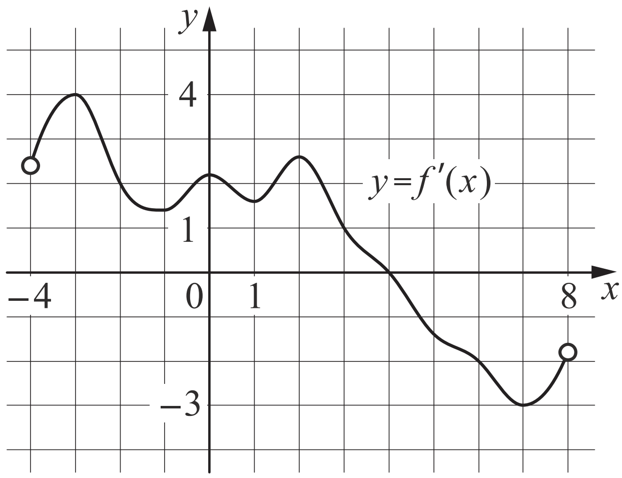
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-10; 7)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-2; 6]$.



Ответ: 1.

Пример 8.4

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-4; 8)$. В какой точке отрезка $[-2; 3]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: 3.

Задание 9

Существенные затруднения вызывают задания, связанные с вычислением по формуле. Задания **линии 9** проверяют сформированность навыка использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни.

Элементы содержания

Преобразования выражений, включающих в себя арифметические операции.
Преобразования выражений, включающих в себя операцию возведения в степень.
Преобразования выражений, включающих в себя корни натуральной степени.
Преобразования тригонометрических выражений.
Преобразование выражений, включающих в себя операцию логарифмирования.
Рациональные уравнения.
Иррациональные уравнения.
Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения.
Логарифмические уравнения.
Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.
Рациональные неравенства.
Показательные неравенства.
Логарифмические неравенства.

Проверяемые умения

Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма.

Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих в себя степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 9.1

Мотоциклист, движущийся по городу со скоростью $v_0 = 90$ км/ч, выезжает из него и сразу после выезда начинает разгоняться с постоянным ускорением $a = 16$ км/ч^2. Расстояние (в км) от мотоциклиста до города вычисляется по формуле $S = v_0 t + \frac{at^2}{2}$, где t — время в часах, прошедшее после выезда из города. Определите время, прошедшее после выезда мотоциклиста из города, если известно, что за это время он удалился от города на 72 км. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 45.

Пример 9.2

Локатор батискафа, погружающегося вертикально и равномерно, испускает ультразвуковые импульсы частотой 494 МГц. Скорость погружения батискафа v (в м/с) вычисляется по формуле $v = c \cdot \frac{f - f_0}{f + f_0}$, где c = 1500 м/с — скорость звука в воде, f_0 — частота испускаемых импульсов (в МГц), f — частота отражённого от дна сигнала (в МГц), регистрируемая приёмником. Определите частоту отражённого сигнала, если скорость погружения батискафа равна 18 м/с. Ответ дайте в МГц.

Ответ: 506.

Пример 9.3

В ходе распада радиоактивного изотопа его масса (в мг) уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа (в мг), t — время, прошедшее от начального момента (в мин.), T — период полураспада (в мин.). В начальный момент времени масса изотопа равна 116 мг. Период его полураспада составляет 9 мин. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 29 мг.

Ответ: 18.

Пример 9.4

Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 20 см до 40 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно разместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким? Ответ дайте в сантиметрах.

Ответ: 36.

Пример 9.5

Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 295$ Гц. Чуть позже гудок издал подъезжающий к платформе такой же тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f (в Гц) больше первого: она зависит от скорости тепловоза v (в м/с) и изменяется по закону $f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}}$ (Гц), где c — скорость звука (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они различаются не менее чем на 5 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы, а $c = 300$ м/с. Ответ дайте в м/с.

Ответ: 5.

Пример 9.6

Автомобиль, движущийся со скоростью $v_0 = 24$ м/с, начал торможение с постоянным ускорением $a = 3$ м/с^2. За t секунд после начала торможения он прошёл путь $S = v_0 t - \frac{at^2}{2}$ (м). Определите время, прошедшее с момента начала торможения, если известно, что за это время автомобиль проехал 90 метров. Ответ дайте в секундах.

Ответ: 6.

Задание 10

Элементы содержания

Квадратные уравнения.

Рациональные уравнения.

Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными.

Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Проверяемые умения

Решать рациональные уравнения, их системы.

Решать рациональные неравенства, их системы.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 10.1

Юля и Уля, работая вместе, пропалывают грядку за 24 минуты, а одна Уля — за 120 минут. За сколько минут пропалывает эту грядку одна Юля?

Ответ: 30.

Пример 10.2

Из пункта *A* в пункт *B* одновременно выехали два автомобиля. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей на 7 км/ч скорости первого, а вторую половину пути — со скоростью 72 км/ч, в результате чего прибыл в пункт *B* одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля, если известно, что она больше 30 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 63.

Пример 10.3

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 128 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью, на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 ч. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 16.

Пример 10.4
Первая труба пропускает на 5 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объёмом 104 литра она заполняет на 5 минут дольше, чем вторая труба?

Ответ: 8.

Пример 10.5
Два велосипедиста одновременно отправились в 220-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 9 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 9 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 20.

Пример 10.6
Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 468 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость течения, если скорость теплохода в неподвижной воде равна 22 км/ч, стоянка длится 3 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 47 часов. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 4.

Пример 10.7
Имеется два сплава. Первый сплав содержит 40 % меди, второй – 25 % меди. Масса первого сплава на 10 кг больше массы второго. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 35 % меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: 30.

Пример 10.8
Расстояние между пристанями A и B равно 192 км. Из A в B по течению реки отправился плот, а через 3 часа вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт B, тотчас повернула обратно и возвратилась в A. К этому времени плот проплыл 92 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 4 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: 20.

Задание 11

Линия 11 — задания повышенного уровня сложности с кратким ответом интегрированного характера, для выполнения которых необходимо привлекать знания из разных разделов курса математики: элементарные функции; решение линейных, квадратных, иррациональных, рациональных, логарифмических, показательных уравнений и их систем.

Элементы содержания

Определение и график функции.
Линейная функция, её график.
Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график.
Квадратичная функция, её график.
Степенная функция с натуральным показателем, её график.
Тригонометрические функции, их графики.
Показательная функция, её график.
Логарифмическая функция, её график.
Квадратные уравнения.
Рациональные уравнения.
Иррациональные уравнения.
Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения.
Логарифмические уравнения.
Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными.
Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.

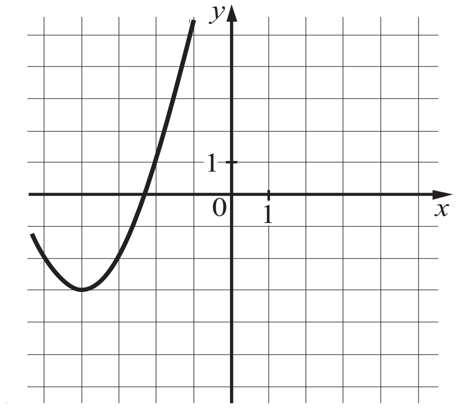
Проверяемые умения

Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, описывать по графику поведение свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения, строить графики изученных функций.
Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

Примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 11.1

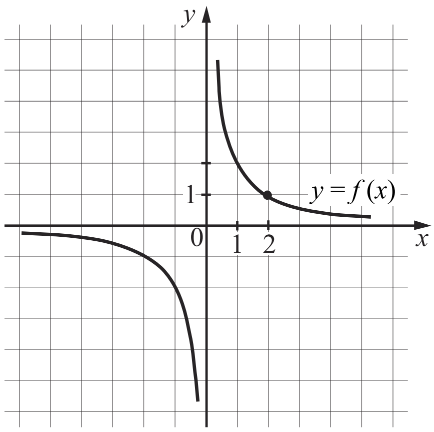
На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c целые. Найдите значение $f(-12)$.



Ответ: 61.

Пример 11.2

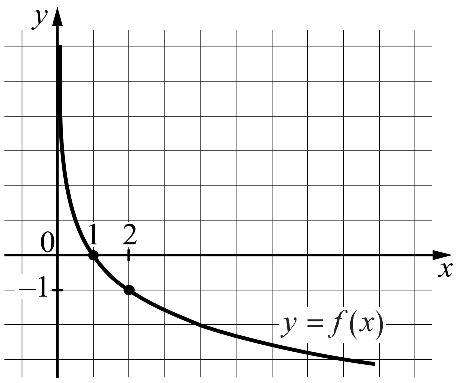
На рисунке изображён график функции $f(x)=\dfrac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: 0,2.

Пример 11.3

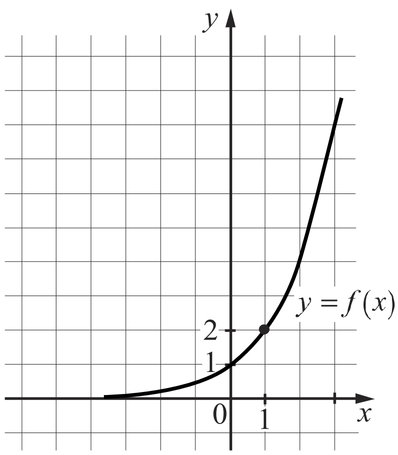
На рисунке изображён график функции $f(x)=\log_a x$. Найдите значение $f(32)$.



Ответ: – 5.

Пример 11.4

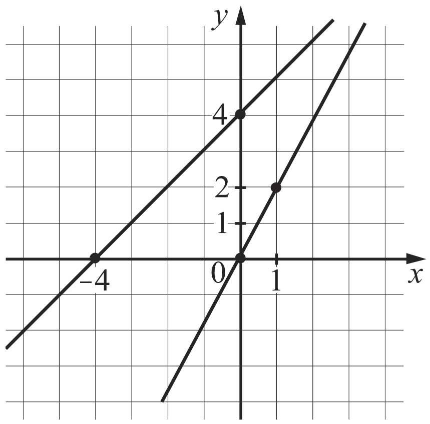
На рисунке изображён график функции вида $f(x)=a^x$. Найдите значение $f(3)$.



Ответ: 8.

Пример 11.5

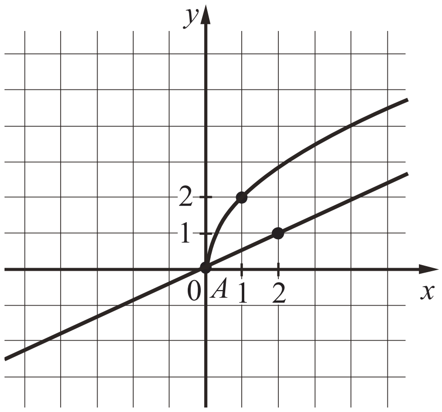
На рисунке изображены графики двух линейных функций, пересекающиеся в точке A. Найдите абсциссу точки A.



Ответ: 4.

Пример 11.6

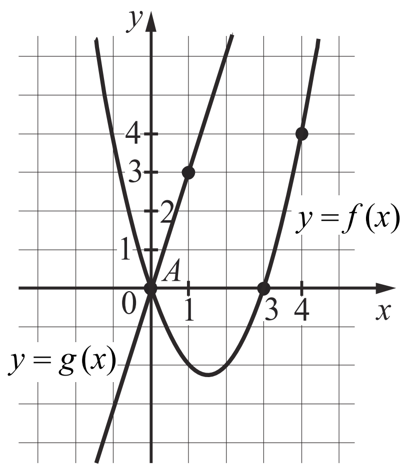
На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = a\sqrt{x}$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 16.

Пример 11.7

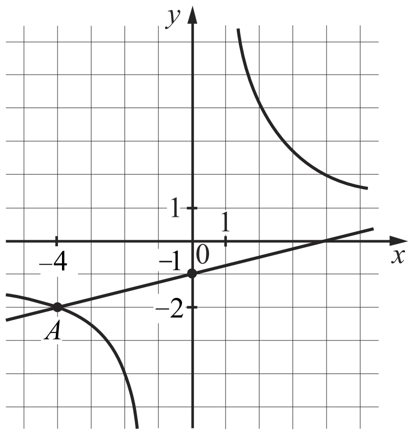
На рисунке изображены графики функций видов $f(x) = ax^2 + bx + c$ и $g(x) = kx$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 6.

Пример 11.8

На рисунке изображены графики функций видов $f\left(x\right)=\dfrac{k}{x}$ и $g\left(x\right)=ax+b$, пересекающиеся в точках A и B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: 8.

Задание 12

Задания **линии 12** проверяют умение применять производную к исследованию функции. Здесь важно знать геометрический смысл производной функции в точке, производные элементарных функций и правила нахождения производных, а также уметь определить связь между характером монотонности функции и знаком её производной, находить точки экстремума функции.

Элементы содержания

Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания.
Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции.
Наибольшее и наименьшее значения функции.
Понятие о производной функции, геометрический смысл производной.
Физический смысл производной; нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.
Уравнение касательной к графику функции.
Производные суммы, разности, произведения, частного.
Производные основных элементарных функций.
Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

Проверяемые умения

Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, описывать по графику поведение свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения, строить графики изученных функций.

Вычислять производные и первообразные элементарных функций.

Исследовать простейшие случаи функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Примеры таких заданий приведены ниже.

<u>Пример 12.1</u>

Найдите точку максимума функции $y = x^3 - 147x + 19$.

Ответ: – 7.

<u>Пример 12.2</u>

Найдите точку максимума функции $y = 9 \cdot \ln(x-4) - 9x - 7$.

Ответ: 5.

<u>Пример 12.3</u>

Найдите точку максимума функции $y = (4-x) \cdot e^{x+4} + 4$.

Ответ: 3.

<u>Пример 12.4</u>

Найдите наибольшее значение функции $y = 7 + 12x - 4x\sqrt{x}$ на отрезке $[0;12]$.

Ответ: 23.

<u>Пример 12.5</u>

Найдите наименьшее значение функции $y = 9x - 9 \cdot \ln(x+11) + 7$ на отрезке $[-10{,}5;\,0]$.

Ответ: – 83.

<u>Пример 12.6</u>

Найдите наибольшее значение функции $y = 10\sin x - \dfrac{42x}{\pi} - 12$ на отрезке $\left[-\dfrac{5\pi}{6};\,0\right]$.

Ответ: 18.

Рекомендации по выполнению заданий части 2 экзаменационной работы по математике профильного уровня

В части 2 КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня предлагается 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности. Используя демонстрационный вариант, необходимо изучить критерии оценивания этих заданий, особенно требования к полному верному ответу.

Алгебра и начала математического анализа

Задания **линий 13**, **15** и **16** относятся к алгебраическим заданиям с развёрнутым ответом повышенного уровня сложности.

Задание 13

В заданиях **линии 13** нужно решить тригонометрическое, или логарифмическое, или показательное уравнение и отобрать корни, принадлежащие числовому отрезку.

Элементы содержания

Тригонометрические уравнения.
Показательные уравнения.
Логарифмические уравнения.
Рациональные неравенства.
Показательные неравенства.
Логарифмические неравенства.
Системы линейных неравенств.
Системы неравенств с одной переменной.

Проверяемые умения

Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.
Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.
Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

При подготовке к решению таких задач уделите особое внимание решению простейших тригонометрических уравнений, приёмам введения новой переменной и разложения на множители. Полезно периодически решать именно простые уравнения типа $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos x = -\frac{1}{2}$ и т.п., чтобы повторять «табличные значения» тригонометрических функций, совершенствовать технику нахождения корней из числовой серии, принадлежащих указанному промежутку.

Большинство участников экзамена, приступающих к решению этой задачи, верно выполняет преобразования с использованием функций удвоенного аргумента, формул приведения. В результате всех преобразований уравнение приводится к совокупности простейших тригонометрических уравнений.

Отбор корней с помощью числовой окружности не представляет трудностей, если участник экзамена понимает, где на окружности находятся найденные им серии решений и отрезок (дуга), на котором лежат корни. При отборе корней с помощью тригонометрической окружности на ней должны быть: начало и конец дуги (отмечены и подписаны на окружности), выделение (любым способом) рассматриваемой дуги, корни (отмечены и подписаны на окружности), принадлежащие этой дуге; при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие ей.

Обратите внимание на то, что отбор корней уравнения, принадлежащих заданному промежутку, может быть проведён разными способами. Можно составить и решить в целых числах соответствующее неравенство или провести организованный перебор целых значений параметра. Владение разными способами позволит провести проверку найденных корней, убедиться, что не допущена ошибка. Записать в бланке следует только одно решение.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

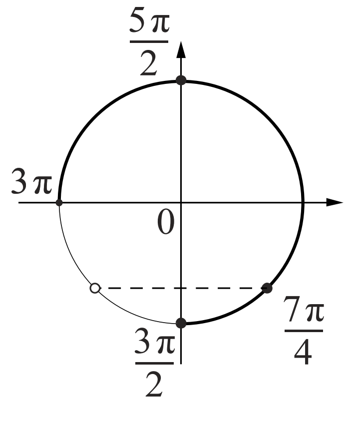
а) Решите уравнение $\sin x\cdot\cos 2x+\sqrt{2}\cos^2 x+\sin x=0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $2\sin x\cdot\cos^2 x-\sin x+\sqrt{2}\cos^2 x+\sin x=0$;
$2\sin x\cdot\cos^2 x+\sqrt{2}\cos^2 x=0$; $\cos^2 x\cdot\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)=0$. Значит, $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\quad n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.



Получим числа: $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\quad k\in\mathbb{Z};\qquad -\frac{\pi}{4}+2\pi n,\qquad n\in\mathbb{Z};$
$-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 13.1

а) Решите уравнение $\cos 2x+\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+1=0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Пример 13.2

а) Решите уравнение $2\sin^3 x+\sqrt{2}\cos 2x+\sin x=\sqrt{2}$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Пример 13.3

а) Решите уравнение $\sin 2x+2\sin(-x)+\cos(-x)-1=0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Пример 13.4

а) Решите уравнение $\dfrac{\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin x)}{2\cos x+\sqrt{3}}=0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Пример 13.5

а) Решите уравнение $8\cdot 16^{\sin^2 x}-2\cdot 4^{\cos 2x}=63$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi\right]$.

Пример 13.6

а) Решите уравнение $8^x-3\cdot 2^{x+2}+2^{5-x}=0$.

б) Укажите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\log_4 5; \sqrt{3}\right]$.

Задание 15

В заданиях **линии 15** нужно решить рациональное, логарифмическое, показательное неравенства.

Элементы содержания

Рациональные неравенства.

Показательные неравенства.

Логарифмические неравенства.

Системы неравенств с одной переменной.

Метод интервалов.

Проверяемые умения

Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

В ходе подготовки к решению таких неравенств необходимо основательно повторить метод интервалов, обратить особое внимание на решение неравенств методом замены переменной и разложением на множители.

Трудности при решении таких неравенств возникают у тех, кто не видит подходящей замены переменных или основы для разложения на множители. Экзаменуемые часто допускают ошибки не при решении показательных или логарифмических неравенств, а при решении полученных алгебраических неравенств методом интервалов и проведении неравносильных преобразований.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

Решите неравенство $\dfrac{25^{x^2+0,5}+5^{x^2+1}}{5^{x+1}-5}\le 25\cdot\dfrac{5^{x^2}+1}{5^x-1}$.

Решение. Последовательно преобразуем заданное неравенство:

$$\frac{5\cdot\left(25^{x^2}+5^{x^2}\right)}{5\cdot\left(5^x-1\right)}\le 25\cdot\frac{5^{x^2}+1}{5^x-1},\quad \frac{25^{x^2}+5^{x^2}}{5^x-1}-\frac{25\cdot\left(5^{x^2}+1\right)}{5^x-1}\le 0,\quad \frac{\left(5^{x^2}+1\right)\cdot\left(5^{x^2}-25\right)}{5^x-1}\le 0,$$

$$\frac{5^{x^2}-25}{5^x-1}\le 0,\quad \frac{5^{x^2}-5^2}{5^x-5^0}\le 0,\quad \frac{(5-1)\cdot\left(x^2-2\right)}{(5-1)\cdot(x-0)}\le 0,\quad \frac{\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)}{x}\le 0,$$ откуда $x\le-\sqrt{2},\ 0<x\le\sqrt{2}$.

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right]\cup\left(0;\sqrt{2}\right]$.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

<u>Пример 15.1</u>

Решите неравенство $\left(25^x-4\cdot 5^x\right)^2+8\cdot 5^x<2\cdot 25^x+15$.

Пример 15.2

Решите неравенство $3^x + \dfrac{243}{3^x - 36} \geq 0$.

Пример 15.3

Решите неравенство $\log_8\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right) \geq \log_2\left(x^2 - 1\right) - 5$.

Пример 15.4

Решите неравенство $\log_5(3x+1) + \log_5\left(\dfrac{1}{72x^2} + 1\right) \geq \log_5\left(\dfrac{1}{24x} + 1\right)$.

Пример 15.5

Решите неравенство $\dfrac{\log_8 x}{\log_8\left(\dfrac{x}{64}\right)} \geq \dfrac{2}{\log_8 x} + \dfrac{3}{\log_8^2 x - \log_8 x^2}$.

Пример 15.6

Решите неравенство $\dfrac{8^{x+\frac{2}{3}} - 9 \cdot 4^{x+\frac{1}{2}} + 13 \cdot 2^x}{4^{x+\frac{1}{2}} - 9 \cdot 2^x + 4} \leq 2^{x+1} - \dfrac{1}{2^x - 2} + \dfrac{3}{2^{x+1} - 1}$.

Задание 16

Задания **линии 16** проверяют сформированность навыка использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Для выполнения этих заданий нужно уметь решать текстовую задачу с экономическим содержанием.

Элементы содержания

Квадратные уравнения.

Рациональные уравнения.

Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными.

Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Проверяемые умения

Решать рациональные уравнения, их системы.

Решать рациональные неравенства, их системы.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Для успешного решения таких задач необходимо внимательно анализировать условие задачи, составлять математическую модель, исследовать её и интерпретировать полученный результат.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.

В июле 2025 года планируется взять кредит на 10 лет. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2030 года долг должен составить 600 тыс. рублей;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2360 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Решение. Пусть сумма кредита равна A тыс. рублей.

По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

A; $0,8A+120$; $0,6A+240$; $0,4A+360$; $0,2A+480$; 600; 480; 360; 240; 120; 0.

В январе каждого года долг возрастает на 20 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$1,2A$; $0,96A+144$; $0,72A+288$; $0,48A+432$; $0,24A+576$; 720; 576; 432; 288; 144.

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$0,4A-120$; $0,36A-96$; $0,32A-72$; $0,28A-48$; $0,24A-24$; 240; 216; 192; 168; 144.

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$5(0,32A-72)+5\cdot 192=1,6A+600$.

Получаем: $1,6A+600=2360$, откуда $A=1100$.

Планируется взять кредит в размере 1100 тыс. рублей.

Ответ: 1100 тыс. рублей.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 16.1

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

<u>Пример 16.2</u>
15 января 2025 года планируется взять кредит в банке на сумму 1200 тыс. рублей на 11 месяцев. Условия его возврата таковы:
- 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца с 1-го по 10-й (с февраля по ноябрь 2025 года включительно) долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
- 15 ноября 2025 года долг составит 400 тыс. рублей;
- 15 декабря 2025 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите общую сумму выплат после полного погашения кредита.

<u>Пример 16.3</u>
В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:
- каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- платежи в 2027 и 2028 годов должны быть по 300 тыс. рублей;
- к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что платёж в 2029 года будет равен 417,6 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

<u>Пример 16.4</u>
В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 10 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 292 820 рублей?

Пример 16.5

Пенсионный фонд владеет ценными бумагами, которые стоят t^2 тыс. рублей в конце года t ($t = 1; 2; \ldots$). В конце любого года пенсионный фонд может продать ценные бумаги и положить деньги на счёт в банке, при этом в конце каждого следующего года сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В конце какого года пенсионному фонду следует продать ценные бумаги, чтобы в конце двадцать пятого года сумма на его счёте была наибольшей?

Геометрия

Задания **линий 14** и **17** относятся к геометрическим заданиям с развёрнутым ответом повышенного уровня сложности. Эти задания верно решают в основном те участники экзамена, которые претендуют на высокий балл. Рекомендуем начинать повторение с разбора простейших задач курса стереометрии и планиметрии по тем учебникам, по которым Вы изучали соответствующий курс в школе, затем добиться уверенного решения геометрических задач части 1 и уже потом переходить к решению задач 14 и 17.

Задания **линии 14** проверяют сформированность наглядных представлений об изученных стереометрических фигурах, а также умений строить сечения, проводить доказательства, пользуясь изученными фактами о взаимном расположении прямых и плоскостей, находить геометрические величины, пользуясь теоремами об объёмах и площадях поверхности геометрических тел.

Задание состоит из двух пунктов. Первый пункт считается выполненным, если приведено верное доказательство. Второй пункт считается выполненным, если обоснованно получен верный ответ. Важно отметить, что, выполняя задание, можно использовать утверждение пункта *а* при решении пункта *б*.

Элементы содержания

Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма.

Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида.

Сечения куба, призмы, пирамиды.

Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая.

Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая.

Шар и сфера, их сечения.

Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника.

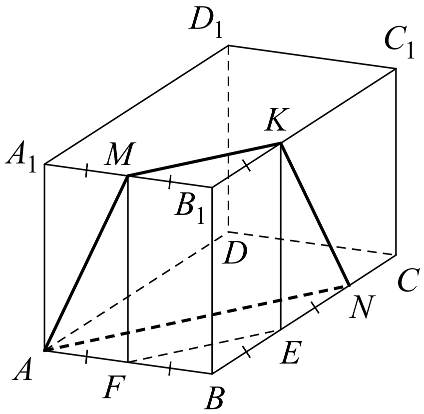
Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между параллельными и скрещивающимися прямыми; расстояние между параллельными плоскостями.
Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.
Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы.
Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара.

Проверяемые умения

Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов), использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы.
Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

Рассмотрим в качестве примера решение следующей задачи.
В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с углом 60° при вершине A. На рёбрах A_1B_1, B_1C_1 и BC отмечены точки M, K и N соответственно так, что четырёхугольник $AMKN$ — равнобедренная трапеция с основаниями 1 и 2.
а) Докажите, что точка M — середина ребра A_1B_1.
б) Найдите высоту призмы, если её объём равен 5 и известно, что точка K делит ребро B_1C_1 в отношении $B_1K : KC_1 = 2:3$.

Решение.



а) Пусть отрезки MF и KE — высоты призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок). Тогда отрезок FE параллелен и равен отрезку MK, а значит, параллелен отрезку AN и равен его половине. Следовательно, FE — средняя линия в треугольнике ABN.
Таким образом, точки F и E — середины отрезков AB и BN соответственно, а точка M — середина отрезка A_1B_1.
б) Прямоугольные треугольники AFM и NEK равны по катету и гипотенузе, значит, $AF = EN$. Тогда треугольник ABN равнобедренный с углом 120° при вершине B и основанием $AN = 2$. По теореме косинусов найдём боковые стороны:
$AB^2 + BN^2 - 2 \cdot AB \cdot BN \cdot \cos 120° = AN^2$;

$3AB^2=4$; $AB=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Поскольку $AF=B_1K=\frac{2}{5}B_1C_1=\frac{2}{5}AD$ и $AB=2AF$, отрезок $AD=\frac{5}{4}AB=\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Таким образом, объём призмы:

$$5=AA_1\cdot AB\cdot AD\cdot\sin 60^\circ=AA_1\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=AA_1\cdot\frac{5\sqrt{3}}{6},$$

откуда $AA_1=2\sqrt{3}$.

Ответ: б) $2\sqrt{3}$.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 14.1

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка M делит ребро A_1D_1 в отношении $A_1M:MD_1=1:2$, а точка K — середина ребра DD_1.

а) Докажите, что плоскость MKC делит отрезок BB_1 пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью MKC, если $\angle MKC=90^\circ$, $\angle ADC=60^\circ$.

Пример 14.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания AD равна 14, высота SH равна 24. Точка K — середина бокового ребра SD, а точка N — середина ребра CD. Плоскость AKB пересекает боковое ребро SC в точке P.

а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите расстояние от точки P до плоскости SAB.

Пример 14.3

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N=6$.

Пример 14.4

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка O — центр основания пирамиды, точка M — середина ребра SC, точка K делит ребро BC в отношении $BK:KC=3:1$, а $AB=2$ и $SO=\sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость OMK параллельна прямой SA.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость OMK пересекает грань SAD.

Пример 14.5

В правильной треугольной пирамиде *SABC* с основанием *ABC* точки *M* и *K* — середины рёбер *AB* и *SC* соответственно, а точки *N* и *L* отмечены на рёбрах *SA* и *BC* соответственно так, что отрезки *MN* и *NL* пересекаются, а $AN = 3NS$.

а) Докажите, что прямые *MN*, *KL* и *SB* пересекаются в одной точке.

б) Найдите отношение $BL : LC$.

Пример 14.6

Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды *SABCD* с основанием *ABCD* равны 4. Точка *O* — центр основания пирамиды. Плоскость, параллельная прямой *SA* и проходящая через точку *O*, пересекает рёбра *SC* и *SD* в точках *M* и *N* соответственно. Точка *N* делит ребро *SD* в отношении $SN : ND = 1 : 3$.

а) Докажите, что точка *M* — середина ребра *SC*.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость *OMN* пересекает грань *SBC*.

Задание 17

Задание 17 – планиметрическая задача, проверяющая умения пользоваться изученными геометрическими фактами и теоремами, исследовать геометрические конфигурации на плоскости.

Планиметрические задачи традиционно входили в состав вступительных испытаний технических и математических специальностей вузов. Первый пункт считается выполненным, если приведено верное доказательство. Второй пункт считается выполненным, если обоснованно получен верный ответ. Важно отметить, что, выполняя задание, можно использовать утверждение пункта *а* при решении пункта *б*.

Элементы содержания

Треугольник.

Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат.

Трапеция.

Окружность и круг.

Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника.

Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника.

Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности.

Длина отрезка, ломаной, окружности; периметр многоугольника.

Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора.

Проверяемые умения

Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

Моделировать реальные ситуации на языке геометрии; исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин.

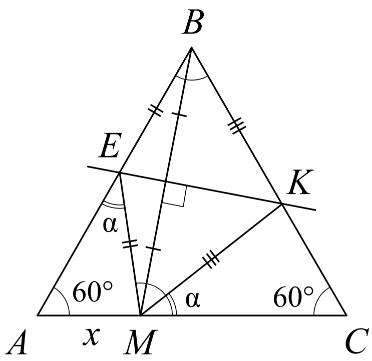
Рассмотрим несколько примеров.

На стороне AC равностороннего треугольника ABC отмечена точка M. Серединный перпендикуляр к отрезку BM пересекает стороны AB и BC в точках E и K соответственно.

а) Докажите, что треугольники AEM и CMK подобны.

б) Найдите отношение $AM : MC$, если площади треугольников AEM и CMK равны 4 и 9 соответственно.

Решение.



а) Треугольники MEB и MKB равнобедренные.

Значит, $\angle EMB = \angle EBM$, $\angle KMB = \angle KBM$.

Следовательно, $\angle EMK = \angle EBK = 60°$.

Пусть $\angle AEM = \alpha$. Тогда:

$\angle EMA = 180° - \angle EAM - \alpha = 120° - \alpha$;

$\angle KMC = 180° - \angle EMA - \angle EMK =$

$= 180° - (120° - \alpha) - 60° = \alpha$.

Следовательно, треугольники AEM и CMK подобны по двум углам.

б) Пусть $AM = x$, $AB = BC = AC = a$. Тогда $MC = a - x$.

Отношение площадей подобных треугольников AEM и CMK равно $\frac{4}{9}$ и равно квадрату коэффициента подобия. Значит, отношение их периметров равно $\frac{2}{3}$. Запишем это равенство: $AM + AE + EM = \frac{2}{3}(CM + CK + MK)$;

$x + AE + EB = \frac{2}{3}(a - x + CK + KB)$; $x + a = \frac{4}{3}a - \frac{2}{3}x$; $\frac{5}{3}x = \frac{1}{3}a$; $x = \frac{1}{5}a$,

то есть $AM = \frac{1}{5}AC$, откуда $AM : MC = 1:4$.

Ответ: б) $1:4$.

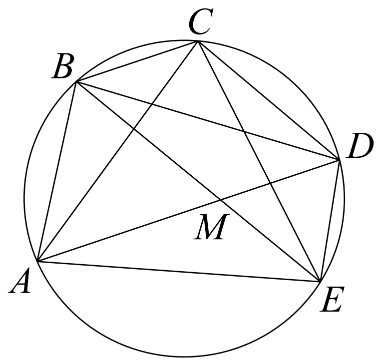
Следующий пример.

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Диагонали AD и BE пересекаются в точке M. Известно, что $BCDM$ — параллелограмм.

а) Докажите, что $BC = DE$.

б) Найдите длину стороны AB, если известно, что $DE = 4$, $AD = 7$, $BE = 8$ и $AB > BC$.

Решение.



а) Прямые CD и BE, содержащие противоположные стороны параллелограмма $BCDM$, параллельны. Значит, $\angle CDB = \angle EBD$. Следовательно, хорды BC и DE равны, поскольку на них опираются равные углы CDB и EBD соответственно.

б) Пусть $AB = x$. Аналогично пункту *а* из параллельности BC и DM получаем, что $CD = AB = x$. Четырёхугольник $BCDM$ является параллелограммом, поэтому $BM = CD = AB = x$, $DM = BC = DE = 4$.

Следовательно, треугольники ABM и MDE равнобедренные, причём $\angle BAM = \angle AMB = \angle DME = \angle DEM$. Значит, эти треугольники подобны. Найдём основания этих треугольников: $AM = AD - MD = 3$, $EM = BE - BM = 8 - x$. Получаем:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{EM}{DE};\ \frac{3}{x} = \frac{8-x}{4};\ x^2 - 8x + 12 = 0,$$

откуда $x = 2$ или $x = 6$. Учитывая условие $AB > BC$, получаем: $AB = 6$.

Ответ: б) 6.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 17.1

Биссектрисы углов BAD и BCD равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O. Через точку O провели прямую, параллельную основаниям BC и AD.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону AB в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

Пример 17.2

Трапеция $ABCD$ с бо́льшим основанием AD и высотой BH вписана в окружность. Прямая BH вторично пересекает эту окружность в точке K.

а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.

б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N. Найдите AD, если радиус окружности равен 12, $\angle BAC = 30°$, а площадь четырёхугольника $BCNH$ в 8 раз больше площади треугольника KNH.

Пример 17.3

На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M, такая, что $AM = MC$.

а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC.

б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5$, $BC = 10$, $\angle BAD = 60°$.

Пример 17.4

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали BE, если $AD = 6$.

Пример 17.5

Окружность с центром в точке O касается сторон угла с вершиной N в точках A и B. Отрезок BC — диаметр этой окружности.

а) Докажите, что прямая AC параллельна биссектрисе угла ANB.

б) Найдите длину отрезка NO, если известно, что $AC = 10$ и $AB = 24$.

Пример 17.6

Периметр треугольника ABC равен 36. Точки E и F — середины сторон AB и BC соответственно. Отрезок EF касается окружности, вписанной в треугольник ABC.

а) Докажите, что $AC = 9$.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle ACB = 90°$.

Алгебра и начала математического анализа

Задания **линий 18** и **19** относятся к алгебраическим заданиям с развёрнутым ответом высокого уровня сложности.

В заданиях **линии 18** нужно уметь проводить исследования количества решений уравнения, неравенства или их систем.

Элементы содержания

Рациональные уравнения.

Иррациональные уравнения.

Тригонометрические уравнения.

Показательные уравнения.

Логарифмические уравнения.

Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными.

Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.
Использование свойств и графиков функций при решении уравнений.
Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем.
Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.
Рациональные неравенства.
Показательные неравенства.
Логарифмические неравенства.
Системы неравенств с одной переменной.
Равносильность неравенств, систем неравенств.
Использование свойств и графиков функций при решении неравенств.
Метод интервалов.
Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.
Линейная функция, её график.
Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график.
Квадратичная функция, её график.
Степенная функция с натуральным показателем, её график.
Тригонометрические функции, их графики.
Показательная функция, её график.
Логарифмическая функция, её график.
Применение производной к исследованию функций и построению графиков.
Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических, задачах.

Проверяемые умения

Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.
Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы.
Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции, описывать по графику поведение свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения, строить графики изученных функций.
Вычислять производные элементарных функций.
Исследовать простейшие случаи функции на монотонность, находить наибольшее наименьшее значения функции.
Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Рассмотрим примеры.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $12+10\log_{49}\sin x = a^2 - a - a\log_7 \sin x$ имеет хотя бы один корень.

Решение. Преобразуем уравнение. $(5+a)\log_7\sin x = (a+3)(a-4)$.

Если $a=-5$, то $0=18$. Полученное равенство неверно, уравнение корней не имеет.

Если $a \neq -5$ то $\log_7 \sin x = \dfrac{(a+3)(a-4)}{a+5}$. Так как в данном случае $0<\sin x \le 1$, то для всех значений x верно неравенство $\log_7 \sin x \le 0$, следовательно, искомые значения a удовлетворяют неравенству $\dfrac{(a+3)(a-4)}{a+5} \le 0$. Откуда получаем, что $a<-5$, $-3 \le a \le 4$.

Ответ: $(-\infty;-5)\cup[-3;4]$.

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение. Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x|-2x-2-a=0$, для которых выполнено условие $x^2-2x-a \neq 0$.

При $x \le 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $-5x-2-a=0$ и задаёт на плоскости Oxa луч l_1 с началом в точке (0; –2). При $x \ge 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $x-2-a=0$ и задаёт луч l_2 с началом в точке (0; –2). Значит, уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ имеет два корня при $a>-2$, имеет один корень при $a=-2$ и не имеет корней при $a<-2$.

Уравнение $x^2-2x-a=0$ задаёт параболу $a=x^2-2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_1 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -5x-2=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\le 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x+1)(x+2)=0, \\ a=-5x-2, \\ x\le 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом l_1 в точках $(-1;3)$ и $(-2;8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом l_2 являются решениями системы:

$$\begin{cases} a = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 2 = x^2 - 2x, \\ a = x - 2, \\ x \ge 0; \end{cases} \quad \begin{cases} (x-1)(x-2) = 0, \\ a = x - 2, \\ x \ge 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a = x^2 - 2x$ пересекается с лучом l_2 в точках $(1; -1)$ и $(2; 0)$.

Следовательно, условие $x^2 - 2x - a \ne 0$ выполнено для корней уравнения $|3x| - 2x - 2 - a = 0$ при всех a, кроме $a = -1$, $a = 0$, $a = 3$ и $a = 8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Ответ: $-2 < a < -1$; $-1 < a < 0$; $0 < a < 3$; $3 < a < 8$; $a > 8$.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 18.1

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2 - a^2\right| = |x + a| \cdot \sqrt{x + a^2 - 2a}$ имеет ровно два различных корня.

Пример 18.2

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left|x^2 + a^2 - 6x - 4a\right| = 2x + 2a$ имеет четыре различных корня.

Пример 18.3

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2 - 5x - y + 3\right) \cdot \sqrt{x - y + 3} = 0, \\ y = 3x + a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Пример 18.4

Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - ax - 2x^2 - 6a + 3x + 9|x| = 0$$

имеет четыре различных корня.

Пример 18.5

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x - a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Пример 18.6

Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ |y| = |x^2 - 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Пример 18.7

Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x| + |y| = a, \\ y = \sqrt{x+4} \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Задание 19

Задания **линии 19** проверяют способность находить пути решения, комбинируя известные методы и алгоритмы. Их особенность состоит в том, что практически все задания этой линии апеллируют к целочисленной арифметике, причём к фактам, известным из курса математики 5–7 классов. Задача имеет исследовательский характер, требуя подчас подтверждения или опровержения гипотез. При этом первый пункт задачи имеет конструктивный характер и доступен многим участникам экзамена. Важно, что для выполнения первого пункта не требуется специальных знаний: достаточно сообразительности и терпения, чтобы обнаружить нужную математическую конструкцию.

Элементы содержания

Целые числа.

Дроби, проценты, рациональные числа.

Преобразования выражений, включающих в себя арифметические операции.

Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.

Проверяемые умения

Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приёмы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма.

Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих в себя степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.
Проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений, распознавать логически некорректные рассуждения.

Рассмотрим примеры.

В коробке у портного лежат красные, синие и белые пуговицы. Если он возьмёт горсть из 10 пуговиц, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна красная. Если он возьмёт горсть из 15 пуговиц, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна синяя. Если же он возьмёт горсть из 20 пуговиц, то среди них обязательно найдётся хотя бы одна белая.

а) Может ли в коробке лежать 50 пуговиц?

б) Какое наибольшее количество пуговиц может лежать в коробке?

в) Какой наибольшей может быть стоимость всех пуговиц, лежащих у портного в коробке, если красная пуговица стоит 20 рублей, синяя — 50 рублей, белая — 100 рублей?

Решение. Обозначим a – число красных пуговиц, b – число синих пуговиц, c – число белых пуговиц, лежащих в коробке. Из условия следуют неравенства: $b+c\le 9,\ a+c\le 14,\ a+b\le 19.$

а) Из неравенств следует, что $a+b+c\le 21$. Значит, общее количество пуговиц в коробке не превосходит 21 и не может быть 50.

б) Так как $a+b+c\le 21,$ то приведём пример, когда число пуговиц ровно 21:

$$\begin{cases} b+c=9, \\ a+c=14, \\ a+b=19; \end{cases} \quad \begin{cases} a=12, \\ b=7, \\ c=2. \end{cases}$$

в) Стоимость всех пуговиц будет равна $20a+50b+100c$. Так как из коробки можно взять 20 пуговиц, то их не меньше 20, кроме того, по доказанному в пункте б их не больше 21.

Если пуговиц 21, то набрать их можно единственным способом, и их стоимость: $20\cdot 12+50\cdot 7+100\cdot 2=240+350+200=790.$

Если пуговиц 20, то наименьшее число красных пуговиц 11 (иначе, если взять горсть только из 10 красных пуговиц, останется ещё одна горсть из 10 пуговиц, в которой красной нет), а наименьшее число синих пуговиц — 6. Тогда наибольшее возможное число белых пуговиц — 3 (самых дорогих). Их стоимость: $20\cdot 11+50\cdot 6+100\cdot 3=220+300+300=820.$

Ответ: а) нет; б) 21; в) 820.

Есть 4 камня, каждый массой 7 тонн, и 9 камней, каждый массой 22 тонны.

а) Можно ли разложить все эти камни на две группы так, чтобы разность суммарных масс камней в этих группах составила 8 тонн?

б) Можно ли разложить все эти камни на две группы, суммарные массы камней в которых равны?
в) Все камни хотят разложить на две группы. Какое наименьшее положительное значение (в тоннах) может принимать разность суммарных масс камней в этих группах?
Решение.
а) Сумма масс всех камней равна 226 тоннам. Если разность суммарных масс камней в двух группах составит 8 тонн, то суммарные массы камней в этих группах равны 117 тоннам и 109 тоннам. Если одна группа состоит из одного камня массой 7 тонн и пяти камней, каждый массой 22 тонны, а другая — из всех остальных камней, то суммарные массы камней в этих группах равны 117 тоннам и 109 тоннам соответственно. Разность этих масс составляет 8 тонн.
б) Предположим, что можно разложить камни на две группы так, чтобы суммарные массы камней в этих группах были равны. Тогда суммарная масса камней в каждой из этих групп составляет 113 тонн. Количество камней массой 7 тонн в каждой из групп не превосходит 4. Если убрать из первой группы камней все камни массой 7 тонн, то масса оставшихся камней составит 113, 106, 99, 92 или 85 тонн. Ни одно из этих чисел не делится на 22. Получается противоречие. Следовательно, камни нельзя разложить на две группы так, чтобы суммарные массы камней в этих группах были равны.
в) Рассмотрим группу камней, суммарная масса камней в которой больше. Пусть эта масса составляет M тонн и в этой группе n камней массой 7 тонн. Тогда $M > 113$, $0 \le n \le 4$. Для того чтобы разность суммарных масс камней в двух группах была наименьшей, нужно, чтобы число M было наименьшим. Оценим это число для каждого значения n от 0 до 4.
Если $n = 0$, то $M \ge 132$.
Если $n = 1$, то $M \ge 117$.
Если $n = 2$, то $M \ge 124$.
Если $n = 3$, то $M \ge 131$.
Если $n = 4$, то $M \ge 116$.
Таким образом, наименьшее значение M не меньше 116. Это значение достигается, если объединить в одну группу четыре камня, каждый массой 7 тонн, и четыре камня, каждый массой 22 тонны. В этом случае разность суммарных масс камней в группах составит 6 тонн.
Ответ: а) да; б) нет; в) 6.

Другие примеры таких заданий приведены ниже.

Пример 19.1
Отношение трёхзначного натурального числа к сумме его цифр – целое число.
а) Может ли это отношение быть равным 34?
б) Может ли это отношение быть равным 84?
в) Какое наименьшее значение может принимать это отношение, если первая цифра трёхзначного числа равна 4?

Пример 19.2

С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.

а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?

б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?

в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

Пример 19.3

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

Пример 19.4

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

Пример 19.5

Есть 16 монет по 2 рубля и 29 монет по 5 рублей.

а) Можно ли этими монетами набрать сумму 175 рублей?

б) Можно ли этими монетами набрать сумму 176 рублей?

в) Какое наименьшее количество монет, каждая по 1 рублю, нужно добавить, чтобы иметь возможность набрать любую целую сумму от 1 рубля до 180 рублей включительно?

Пример 19.6

Над парами целых чисел проводится операция: из пары $(a; b)$ получается пара $(3a+b; 3b-a)$.

а) Можно ли из какой-то пары получить пару $(5; 5)$?

б) Верно ли, что если пара $(c; d)$ может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции, то и пара $(-d; c)$ тоже может быть получена из какой-то пары с помощью данной операции?

в) Зададим расстояние между парами целых чисел $(a; b)$ и $(c; d)$ выражением $|a-c|+|b-d|$. Найдите наименьшее расстояние от пары $(9; 2)$ до пары, полученной из какой-то пары с помощью данной операции.

Желаем успеха на экзамене!