ФЕДЕРАЛЬНАЯ СЛУЖБА ПО НАДЗОРУ В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ НАУЧНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
«ФЕДЕРАЛЬНЫЙ ИНСТИТУТ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ»

# Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2026 года

# МАТЕМАТИКА

Руководитель комиссии по разработке контрольных измерительных материалов, используемых при проведении государственной итоговой аттестации по образовательным программам основного общего и среднего общего образования по математике, И.В. Ященко, в.н.с. Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений».
Авторы: И.В. Ященко, П.И. Самсонов, А.В. Семенов, А.С. Трепалин, М.А. Черняева.

Методические материалы для председателей и членов предметных комиссий субъектов Российской Федерации по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ 2026 г. по математике подготовлены в соответствии с Тематическим планом работ федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный институт педагогических измерений». Пособие предназначено для подготовки экспертов по оцениванию выполнения заданий с развёрнутым ответом, которые являются частью контрольных измерительных материалов (КИМ) для сдачи единого государственного экзамена (ЕГЭ) по математике профильного уровня.

В методических материалах характеризуются типы заданий с развёрнутым ответом, используемые в КИМ ЕГЭ по математике, и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом, приводятся примеры оценивания выполнения заданий и даются комментарии, объясняющие выставленную оценку.

В пособии использованы работы участников ЕГЭ 2019–2025 гг.

Авторы будут благодарны за замечания и предложения по совершенствованию пособия.

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

Общие позиции и характер оценивания выполнения заданий в целом повторяют прошлогодние. Небольшие видоизменения и корректировки формулировок в содержании критериев оценивания для конкретного задания могут быть в тех случаях, когда необходимость подобного рода уточнений диктуется содержанием и структурой самого задания.

Более подробное описание заданий с развёрнутым ответом и критериев оценивания их выполнения представлены ниже, в начале каждого из параграфов 1–7.

**В соответствии с Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования (приказ Минпросвещения России и Рособрнадзора от 04.04.2023 № 233/552, зарегистрирован Минюстом России 15.05.2023 № 73314)**

«81. Проверка экзаменационных работ включает в себя:

1) проверку и оценивание предметными комиссиями ответов на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <…>, в том числе устных ответов, в соответствии с критериями оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором[1]. <…>

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом <…>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в первичных баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

По результатам первой и второй проверок эксперты независимо друг от друга выставляют первичные баллы за каждый ответ на задания КИМ для проведения ЕГЭ с развёрнутым ответом. <…>

В случае существенного расхождения в первичных баллах, выставленных двумя экспертами, назначается третья проверка. Существенное расхождение в первичных баллах определено в критериях оценивания по соответствующему учебному предмету, разработка которых организуется Рособрнадзором.

Эксперту, осуществляющему третью проверку, предоставляется информация о первичных баллах, выставленных экспертами, ранее проверявшими экзаменационную работу».

Существенными считаются следующие расхождения.

1. Расхождение между баллами, выставленными двумя экспертами за выполнение любого из заданий 13–19, составляет 2 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет только те ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

2. Расхождение между суммами баллов, выставленных двумя экспертами за выполнение заданий 13–19, составляет 3 или более балла. В этом случае третий эксперт проверяет ответы на все задания работы.

3. Расхождение в результатах оценивания двумя экспертами ответа на одно из заданий 13–19 заключается в том, что один эксперт указал на отсутствие ответа на задание, а другой выставил за выполнение этого задания ненулевой балл. В этом случае третий эксперт проверяет только ответы на задания, которые были оценены со столь существенным расхождением.

4. Ситуации, в которых один эксперт указал на отсутствие ответа в экзаменационной работе, а второй эксперт выставил нулевой балл за выполнение этого задания, не являются ситуациями существенного расхождения в оценивании.

[1] Часть 14 статьи 59 Федерального закона от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации».

# 1. Критерии проверки и оценка решений задания 13

Задание № 13 — тригонометрическое, логарифмическое или показательное уравнение.

Выделение решения уравнения в отдельный пункт *а* прямо указывает участникам экзамена на необходимость полного решения предложенного уравнения: при отсутствии в тексте конкретной работы ответа на вопрос пункта *а* задание № 13 оценивается 0 баллов.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

***Комментарий.***

Ответ в задании с развёрнутым ответом — это решение и вывод (называемый ответом).

## Задача 13 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

а) Решите уравнение

$$2\sin^3 x=\sqrt{2}\cos^2 x+2\sin x.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

**Решение.**

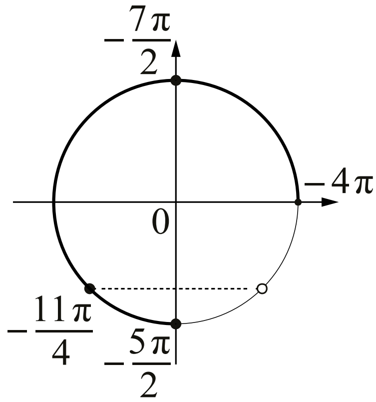
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x\cdot\left(1-\cos^2 x\right)-\sqrt{2}\cos^2 x-2\sin x=0;\ 2\sin x-2\sin x\cdot\cos^2 x-\sqrt{2}\cos^2 x-2\sin x=0;$$

$$2\sin x\cdot\cos^2 x+\sqrt{2}\cos^2 x=0;\ \cos^2 x\cdot\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)=0.$$

Значит, $\cos x=0$, откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\dfrac{5\pi}{2}\right]$.




Получим числа: $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{11\pi}{4};\ -\dfrac{5\pi}{2}$.

**Ответ:** а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\dfrac{7\pi}{2};\ -\dfrac{11\pi}{4};\ -\dfrac{5\pi}{2}$.

**ИЛИ**

а) Решите уравнение

$$2+2\cos(\pi-2x)+\sqrt{8}\sin x=\sqrt{6}+\sqrt{12}\sin x.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\dfrac{9\pi}{2}\right]$.

**Решение.**

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2-2\cos 2x+2\sqrt{2}\sin x=\sqrt{6}+2\sqrt{3}\sin x;$$

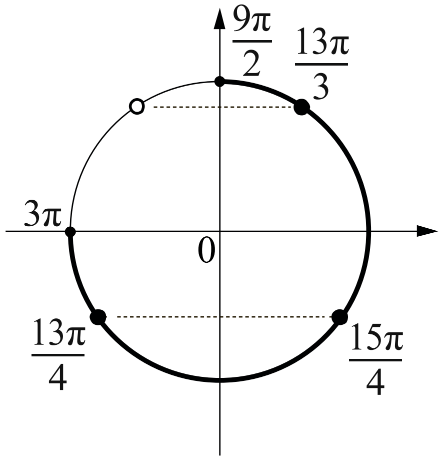
$$2-2\left(1-2\sin^2 x\right)+2\sqrt{2}\sin x-2\sqrt{3}\sin x-\sqrt{6}=0;$$

$$4\sin^2 x-2\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sin x-\sqrt{6}=0;\ \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\cdot\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)=0.$$

Значит, $\sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$, или $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{3}$.




**Ответ:** а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$;

$-\frac{\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{13\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$; $\frac{13\pi}{3}$.

***Комментарий.***

Множество корней может быть записано по-другому.

Отбор корней может быть произведён любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

При отборе корней с помощью числовой (тригонометрической) окружности на числовой окружности должно быть: отмечены и обозначены концы числового отрезка, выделена дуга, отмечены и обозначены корни, принадлежащие данному отрезку. На окружности могут быть отмечены вспомогательные числа, принадлежащие числовому отрезку.

## Задание 13.1

а) Решите уравнение

$$1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin\left(x+\pi\right).$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

**Решение.**

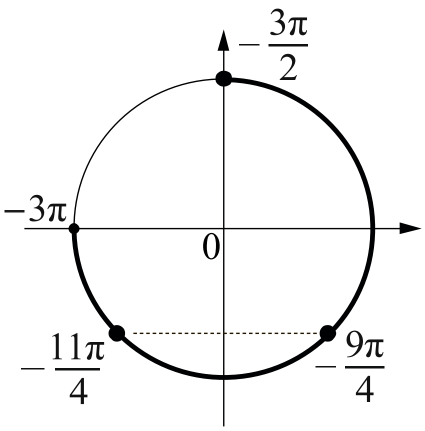
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1-\left(1-2\sin^2 x\right)+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\left(-\sin x\right);\ 2\sin^2 x-\left(2-\sqrt{2}\right)\sin x-\sqrt{2}=0;$$

$$\left(\sin x-1\right)\cdot\left(2\sin x+\sqrt{2}\right)=0.$$

Значит, $\sin x=1$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.




Получим числа: $-\frac{11\pi}{4};\ -\frac{9\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{2}$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{11\pi}{4};\ -\frac{9\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{2}$.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

### Задание 13.2

а) Решите уравнение

$$\cos 2x-\sqrt{2}\sin\left(x+\pi\right)-1=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.

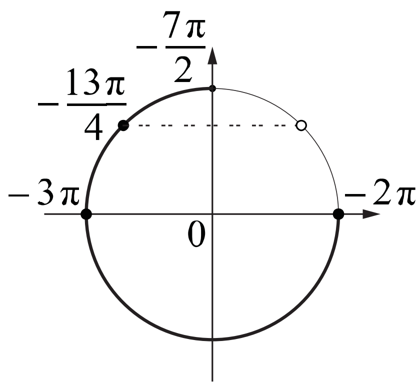
**Решение.**

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$1-2\sin^2 x-\sqrt{2}\left(-\sin x\right)-1=0;\ -2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x=0;\ -\sin x\cdot\left(2\sin x-\sqrt{2}\right)=0.$$

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};-2\pi\right]$.




Получим числа: $-\frac{13\pi}{4}$; $-3\pi$; $-2\pi$.

**Ответ:** а) $\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

$\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;

б) $-\frac{13\pi}{4}$; $-3\pi$; $-2\pi$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 13.3

а) Решите уравнение

$$\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

**Решение.**

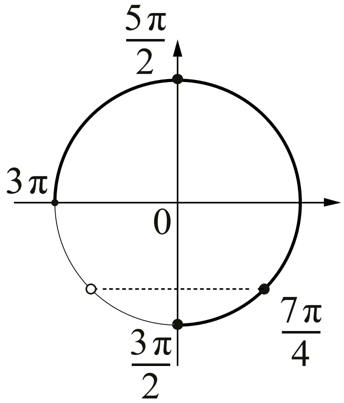
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x \cdot \cos^2 x - \sin x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0;\ 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0;$$

$$\cos^2 x \cdot \left(2\sin x + \sqrt{2}\right) = 0.$$

Значит, $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.




Получим числа: $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

$-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 13.4

а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

**Решение.**

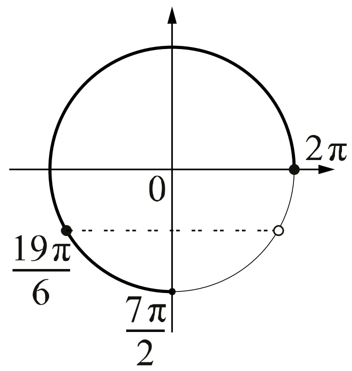
а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0;\ (\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0.$$

Значит, $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, или $\sin x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $2\pi$; $\frac{19\pi}{6}$.




**Ответ:** а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $2\pi$; $\frac{19\pi}{6}$.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 13.5

а) Решите уравнение

$$9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.

**Решение.**

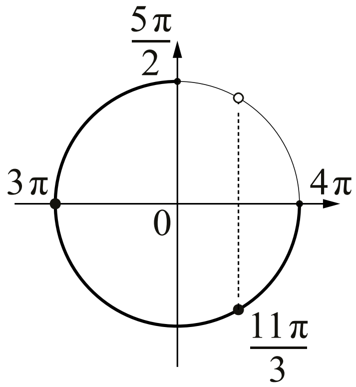
а) Пусть $t=9^{\cos x}$, тогда уравнение запишется в виде $9t^2-28t+3=0$, откуда $t=\frac{1}{9}$ или $t=3$.

При $t=\frac{1}{9}$ получим: $9^{\cos x}=\frac{1}{9}$; $\cos x=-1$, откуда $x=\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

При $t=3$ получим: $9^{\cos x}=3$; $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$, или $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\,4\pi\right]$.

Получим числа: $3\pi$; $\frac{11\pi}{3}$.




**Ответ:** а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;

б) $3\pi$; $\frac{11\pi}{3}$.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 13.6

а) Решите уравнение

$$2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0\,.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\,0\right]$.

**Решение.**

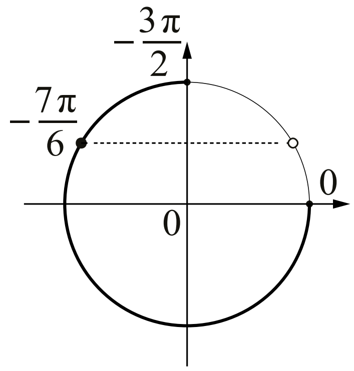
а) Пусть $t = \log_4(4\sin x)$, тогда исходное уравнение запишется в виде $2t^2 - 5t + 2 = 0$, откуда $t = 2$ или $t = \frac{1}{2}$.

При $t = 2$ получим: $\log_4(4\sin x) = 2$, значит, $\sin x = 4$, что невозможно.

При $t = \frac{1}{2}$ получим: $\log_4(4\sin x) = \frac{1}{2}$, значит, $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};\,0\right]$.

Получим число $-\frac{7\pi}{6}$.




**Ответ:** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

б) $-\frac{7\pi}{6}$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*<br>ИЛИ<br>получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов – пункта *а* и пункта *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Примеры оценивания решений задания 13

**Пример 13.1.1**

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin\left(x+\pi\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

№13

а)

$1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin(x+\pi)$

$1-\cos^2 x+\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\cdot(\sin x\cdot\cos\pi+\sin\pi\cdot\cos x)$

$1-1+2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}+2\sin x$

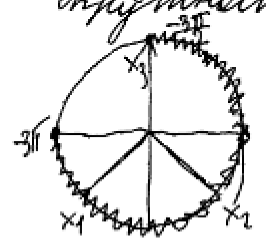
$2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}-2\sin x=0$

$2\sin x(\sin x-1)+\sqrt{2}(\sin x-1)=0$

$(2\sin x+\sqrt{2})(\sin x-1)=0$

$\left[\begin{array}{l}2\sin x+\sqrt{2}=0\\ \sin x-1=0\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin x=1\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=(-1)^k\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k;\ k\in Z\\ x=\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ n\in Z\end{array}\right.$

б). найдём корни с помощью тригонометрической окружности




$x_1=-3\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{11\pi}{4}$

$x_2=-2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{-9\pi}{4}$

$x_3=\frac{-3\pi}{2}$

***Комментарий.***

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 13.1.2**

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin\left(x+\pi\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$; $-\frac{3\pi}{2}$.

13. а) $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin x(x+\pi)$

$1-(1-2\sin^2 x)+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}\ \cancel{+}\ 2\sin x)$

$2\sin^2 x-2\sin x+\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}=0$

$2\sin x(\sin x-1)+\sqrt{2}(\sin x-1)=0$

$(2\sin x+\sqrt{2})(\sin x-1)=0$

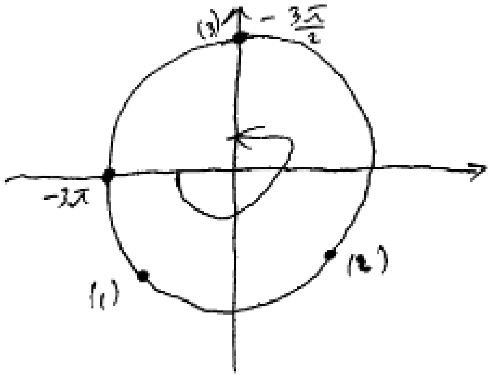
$2\sin x+\sqrt{2}=0$ или $\sin x-1=0$

$\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad$ $\sin x=1$

$x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$ $\quad$ $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$

$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k, k\in Z$

б) Проведу отбор корней на отрезке $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$ с помощью единичной окружности:




(1): $-\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{9\pi}{4}$

(2): $-\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{11\pi}{4}$

(3): $-\frac{3\pi}{2}$

Ответ. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $-\frac{3\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$

б) $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{11\pi}{4}$, $-\frac{9\pi}{4}$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

При отборе корней с помощью числовой (тригонометрической) окружности допущена ошибки: точка $-3\pi$ на окружности явно обозначена $-2\pi$; корень (1) неверно назван $-\frac{9\pi}{4}$; корень (2) неверно назван $-\frac{11\pi}{4}$. Пункт «б» не выполнен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 13.1.3**

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin(x+\pi)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{4}$; $-\dfrac{9\pi}{4}$; $-\dfrac{3\pi}{2}$.

13. а) $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin(x+\pi)$

$1-\cos^2 x+\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin\pi\cos x-2\cos\pi\sin x$

$2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}+2\cdot 0\cdot\cos x+2\cdot(-1)\cdot\sin x=0$

$2\sin^2 x-2\sin x+\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}=0$

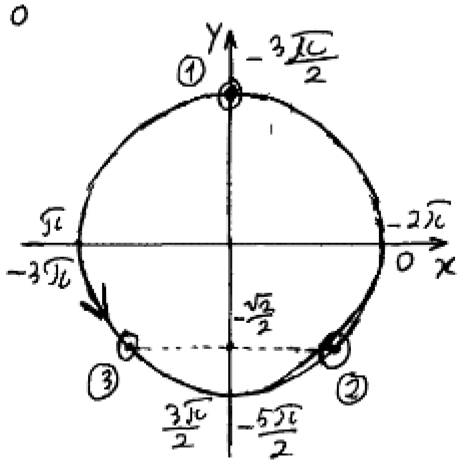
$2\sin x(\sin x-1)+\sqrt{2}(\sin x-1)=0$

$(2\sin x+\sqrt{2})(\sin x-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} 2\sin x+\sqrt{2}=0 \\ \sin x-1=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x=1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{ll} x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} & ① \\ x=-\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} & ② \\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z} & ③ \end{array}\right.$




б) В промежуток $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$ входят корни $\left\{-\frac{11\pi}{4};-\frac{9\pi}{4};-\frac{3\pi}{2}\right\}$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

Отбор корней с помощью числовой (тригонометрической) окружности не должен приниматься. На числовой (тригонометрической) окружности на рисунке должны быть отмечены (подписаны) начало и конец дуги, выделена рассматриваемая дуга, отмечены (подписаны) корни, принадлежащие этой дуге, при этом на дуге могут быть отмечены дополнительные точки, принадлежащие данной дуге. Пункт «б» не выполнен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 13.1.4**

а) Решите уравнение $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin\left(x+\pi\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** а) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{4}$; $-\dfrac{9\pi}{4}$; $-\dfrac{3\pi}{2}$.

№13

а) $1-\cos 2x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin(x+\pi)$

$\cancel{1}-\cancel{1}+2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}-2\sin(\pi+x)$

$2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x=\sqrt{2}+2\sin x$

$2\sin^2 x-2\sin x+\sqrt{2}\sin x-\sqrt{2}=0$

$2\sin x(\sin x-1)+\sqrt{2}(\sin x-1)=0$

$(\sin x-1)(2\sin x+\sqrt{2})=0$

$\sin x-1=0$ или $2\sin x+\sqrt{2}=0$

$\sin x=1$ $\qquad \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ $\qquad x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$

1) $-3\pi\le\frac{\pi}{2}+\pi n\le-\frac{3\pi}{2}\quad |:\pi$

$-3\le\frac{1}{2}+n\le-\frac{3}{2}$

$-6\le1+2n\le-3$

$-\frac{7}{2}\le n\le-\frac{4}{2}$

$-3\frac{1}{2}\le n\le-2$

$n=-2\quad x=\frac{\pi}{2}-2\pi=-\frac{3\pi}{2}$

$n=-3\quad x=\frac{\pi}{2}-3\pi=-\frac{5\pi}{2}$

2) $-3\pi\le-\frac{\pi}{4}+2\pi k\le-\frac{3\pi}{2}\quad |:\pi$

$-3\le-\frac{1}{4}+2k\le-\frac{3}{2}$

$-12\le-1+8k\le-6$

$-\frac{11}{8}\le k\le-\frac{5}{8}$

$k=-1\quad x=-\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{9\pi}{4}$

3) $-3\pi\le-\frac{3\pi}{4}+2\pi k\le-\frac{3\pi}{2}\quad |:\pi$

$-3\le-\frac{3}{4}+2k\le-\frac{3}{2}$

$-12\le-3+8k\le-6$

$-\frac{9}{8}\le k\le-\frac{3}{8}$

$k=-1\quad x=-\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{11\pi}{4}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

$-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\frac{11\pi}{4};\ -\frac{9\pi}{4};\ -\frac{3\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{2}$

***Комментарий.***

В пункте «а» неверно решено простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x=1$.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 13.2.1**

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right].$

**Ответ:** а) $\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; $-3\pi$; $-2\pi$.

№13. $\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0$

а) $(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$     $\sin x = t$

$\cancel{1} - 2t^2 + \sqrt{2}t - \cancel{1} = 0$

$-2t^2 + \sqrt{2}t = 0$

$-t(2t - \sqrt{2}) = 0$

$-t\left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

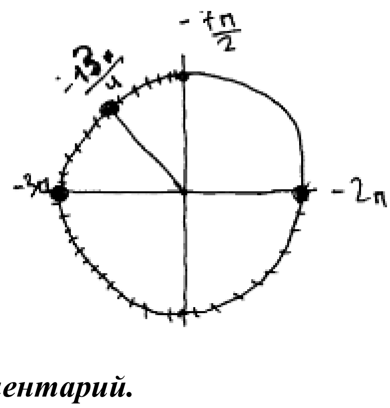
1) $t = 0$     2) $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin x = 0$     $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pi n; n \in Z$     $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$; $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$   $k \in Z$

а) $x = \pi n;$
$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n;$
$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n;$  $n \in Z$

б) отобрать на $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$; $\pi n$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n$.




$-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi$

Ответ: $-\frac{13\pi}{4}; -3\pi; -2\pi$

***Комментарий.***
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 13.2.2**

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\sin\left(x+\pi\right) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

**Ответ:** а) $\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; $-3\pi$; $-2\pi$.

№13

а) $\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0$

З-у, что $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$, тогда ур-ение будет:

$\cos 2x - \sqrt{2}(-\sin(x)) - 1 = 0$

$\cos 2x + \sqrt{2}\sin(x) - 1 = 0$

З-у, что $\cos 2x =$ ~~cos2x~~ $1 - 2\sin^2 x$, тогда

$\cancel{1} - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin(x) - \cancel{1} = 0$

$\sqrt{2}\sin(x) - 2\sin^2 x = 0$

$\sin(x)\left(\sqrt{2} - 2\sin(x)\right) = 0$

$$\left[\begin{array}{ll} \sin(x) = 0 & (1) \\ \sqrt{2} = 2\sin(x) & (2) \end{array}\right.$$

(1) $\sin(x) = 0$

$x = \pi k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$

(2) $\sqrt{2} = 2\sin(x)$

$\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2,\ k_2 \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3,\ k_3 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ

$x = \pi k_1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$   I

$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2$, $k_2 \in \mathbb{Z}$   II

$x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3$, $k_3 \in \mathbb{Z}$   III б) Буду решать с помощью дв-ного нер-ва. т.е. если $x_0 \in [-\frac{7\pi}{2}; -2\pi] \Rightarrow -\frac{7\pi}{2} \le x_0 \le -2\pi$.

Из п.а есть 3 серии решений:

I $x = \pi k_1,\ k_1 \in \mathbb{Z}$

II $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2,\ k_2 \in \mathbb{Z}$

III $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3,\ k_3 \in \mathbb{Z}$

I $x = \pi k_1,\ k_1 \in \mathbb{Z}$

$-\frac{7\pi}{2} \le \pi k_1 \le -2\pi \ \Big| \cdot \frac{2}{\pi}$; з-у, что $\frac{2}{\pi} > 0 \Rightarrow$ знак нер-ва не поменяется

$-7 \le 2k_1 \le -4. \ | :2$

$-3{,}5 \le k_1 \le -2$ з-у, что $k_1 \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_1 \in \{-2; -3\} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} x = -2\pi \\ x = -3\pi \end{array}\right.$

II $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2,\ k_2 \in \mathbb{Z}$

$-\frac{7\pi}{2} \le \frac{\pi}{4} + 2\pi k_2 \le -2\pi \ \Big| \cdot \frac{4}{\pi}$; з-у, что $\frac{4}{\pi} > 0 \Rightarrow$ знак нер-ва не помен.

$-14 \le 1 + 8k_2 \le -8 \ | -1$

$-15 \le 8k_2 \le -9 \ | :8$

$-\frac{15}{8} \le k_2 \le -\frac{9}{8}$. з-у, что $k_2 \in \mathbb{Z}$ и $-1 > -\frac{9}{8}$, а $-2 < -\frac{15}{8} \Rightarrow$ таких $k_2$ не существует

III $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3$

$-\frac{7\pi}{2} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi k_3 \le -2\pi \ \Big| \cdot \frac{4}{\pi}$

$-14 \le 3 + 8k_3 \le -8$

$-17 \le 8k_3 \le -11 \ | :8$

$-\frac{17}{8} \le k_3 \le \frac{-11}{8}$ т.к. $k_3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow k_3 = -3 \to x = \frac{3\pi}{4} - 6\pi = \frac{-21\pi}{4}$

Ответ. $x = -2\pi$, $x = -3\pi$, $x = \frac{-21\pi}{4}$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

При нахождении целого значения $k_3$, удовлетворяющего неравенствам $-\frac{17}{8} \le k_3 \le -\frac{11}{8}$, допущена ошибка: $k_3 = -3$, что привело к неверному ответу в пункте «б».

Пункт «б» не выполнен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 13.2.3**

а) Решите уравнение $\cos 2x-\sqrt{2}\sin\left(x+\pi\right)-1=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right].$

**Ответ:** а) $\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{13\pi}{4}$; $-3\pi$; $-2\pi$.

√13. а) $\cos 2x-\sqrt{2}\sin(x+\pi)-1=0$

$1-2\sin^2x+\sqrt{2}\sin x-1=0$

$-2\sin^2x+\sqrt{2}\sin x=0$

$2\sin^2x-\sqrt{2}\sin x=0$

$\sin x(2\sin x-\sqrt{2})=0$

I. $\sin x=0$

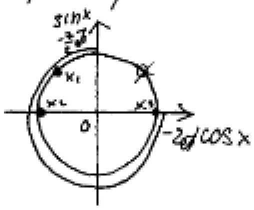
$x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

II $2\sin x-\sqrt{2}=0$

$\sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$ $\qquad x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

б) Отберём корни с помощью единичной окружности на отрезке $[-\frac{7\pi}{2};-2\pi]$




$x_1=-\frac{7}{2}\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{13}{4}\pi$

$x_2=-\pi$

$x_3=-2\pi$

Ответ а) $x=\pi n;\ n\in\mathbb{Z}$; $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, $x=\frac{3\pi}{4}+2\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$

б) $x=-\frac{13}{14}\pi$ $\quad x=-\pi$ $\quad x=-2\pi$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

Отбор корней с помощью тригонометрической окружности неверный, так как на отмеченной дуге обозначен корень $x_2$, не принадлежащий числовому отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2};-2\pi\right]$, в ответе неверно записан корень $x_1$. Пункт «б» не выполнен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 13.2.4**

а) Решите уравнение $\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

**Ответ:** а) $\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{13\pi}{4}$; $-3\pi$; $-2\pi$.

№13.

а) $\cos 2x - \sqrt{2}\sin(x+\pi) - 1 = 0$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \qquad \sin(x+\pi) = -\sin x$

$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x - 1 = 0$

$\sin x(-2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

б) $x \in \left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$

$x = -2\pi$; $x = -3\pi$; $x = -\frac{13}{4}\pi$

Ответ: а) $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $x = \frac{3\pi}{4} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$; б) $x = -2\pi$; $x = -3\pi$; $x = -\frac{13}{4}\pi$.

***Комментарий.***

В пункте «а» неверно решено простейшее тригонометрическое уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 13.3.1**

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

а) $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$\sin x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{2}(1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$

$\sin x\,(1 - \sin^2 x - \sin^2 x) + \sqrt{2}(1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$

$\sin x\,(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2}(1 - \sin^2 x) + \sin x = 0$

$\sin x + \sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2}(1 - \sin^2 x) = 0$

$2\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2}(1 - \sin^2 x) = 0$

$2\sin x\,(1 - \sin^2 x) + \sqrt{2}(1 - \sin^2 x) = 0$

$(1 - \sin^2 x)(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

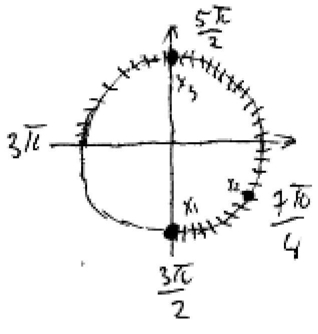
$1 - \sin^2 x = 0$ или $2\sin x + \sqrt{2} = 0$

$\cos^2 x = 0$ $\qquad 2\sin x = -\sqrt{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z.$ $\qquad \sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z \end{array}\right.$$

б) $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ Отберём корни уравнения при помощи окружности;




$x_1 = \frac{3\pi}{2}$

$x_2 = \frac{7\pi}{4}$

$x_3 = \frac{5\pi}{2}$

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

***Комментарий.***

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 13.3.2**

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

а) $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0.$

$\sin x(2\cos^2 x - 1 + 1) + \sqrt{2}\cos^2 x = 0.$

$\sin x \cdot 2\cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0.$

$\cos^2 x(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

$\Downarrow$

$\cos^2 x = 0$ или $2\sin x = -\sqrt{2}.$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ или $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$

$$x = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z. \\ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z. \end{array}\right.$$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z.$

б) 1) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \ x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

$\frac{3\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \pi k \le 3\pi \quad (k \in Z).$

$\cancel{\pi}\,1 \le k \le \frac{5\cancel{\pi}}{2} \ (k \in Z) \Rightarrow k = 1 \ (x = \frac{3\pi}{2})$ или $k = 2 \ (x = \frac{5\pi}{2}).$

2) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z, \ x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$

$\frac{3\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le 3\pi \quad (n \in Z).$

$\frac{7}{8} \le n \le \frac{13}{8}. \ (n \in Z) \Rightarrow n = 1 \ (x = \frac{7\pi}{4}).$

3) $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z, \ x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right].$

$\frac{3\pi}{2} \le -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m \le 3\pi \quad (m \in Z)$

$\frac{9}{8} \le m \le \frac{15}{8} \ (m \in Z)$ – реш. нет.

Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$ или $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ или $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in Z.$

б) $x = \frac{3\pi}{2}, x = \frac{5\pi}{2}; \ x = \frac{7\pi}{4}.$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

При нахождении целого значения $n$ в третьей строчке пункта 2) допущена ошибка. Пункт «б» не выполнен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 13.3.3**

а) Решите уравнение $\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

№13

$\sin x \cdot \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$\sin x(1 - 2\sin^2 x) + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$

$2\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

$2\sin x(1 - \sin^2 x) + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

$2\sin x \cdot \cos^2 x + \sqrt{2}\cos^2 x = 0$

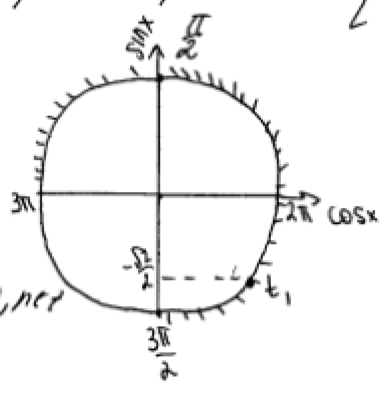
$\cos^2 x(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos^2 x = 0 \\ 2\sin x = -\sqrt{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0 \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

б) Отберем корни с помощью триг. окр-ти, кот $\in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

$t_1 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{8\pi - \pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow$ нам подх. $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$




Ответ: а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4}; \frac{\pi}{2}$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

Отбор корней с помощью тригонометрической окружности неверный, так как на отмеченной дуге обозначен корень, не принадлежащий числовому отрезку. Пункт «б» не выполнен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 13.3.4**

а) Решите уравнение $\sin x\cdot\cos 2x+\sqrt{2}\cos^2 x+\sin x=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $-\frac{3\pi}{4}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{4}$; $\frac{5\pi}{2}$.

$\sin x \cos 2x + \sqrt{2}\cos^2 x + \sin x = 0$ , $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$

а) $\sin x\,(1-2\sin^2 x) + \sqrt{2}\,(1-\sin^2 x) + \sin x = 0$

$\sin x - 2\sin^3 x + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sin^2 x + \sin x = 0$

$-2\sin^3 x + \sqrt{2} - \sqrt{2}\sin^2 x + 2\sin x = 0$

$-2\sin x\,(\sin^2 x - 1) - \sqrt{2}\,(\sin^2 x - 1) = 0$

$(\sin^2 x - 1)(-2\sin x - \sqrt{2}) = 0$

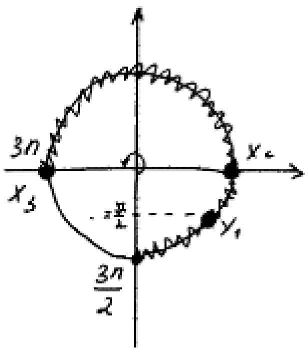
$\sin^2 x - 1 = 0$ или $-2\sin x - \sqrt{2} = 0$

$\sin^2 x = 1$ $\qquad -2\sin x = \sqrt{2}$

$\sin x = \pm 1$ $\qquad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \pi k, k\in z$ $\qquad \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n\in z \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, k\in z \end{array}\right.$

б) Отберем корни с помощью тригонометрической окружности на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$




Получаем корни:

$x_1 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$

$x_2 = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{2} = 2\pi$

$x_3 = 2\pi + \pi = 3\pi$

Ответ: а) $x = \pi k, k\in z$, $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n\in z$; $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n\in z$

б) $\frac{7\pi}{4}$; $2\pi$; $3\pi$

***Комментарий.***

Неверно решены тригонометрические уравнения $\sin x=\pm 1.$

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 13.4.1**

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi$; $\frac{19\pi}{6}$.

$\sin(2x) + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$ $\quad\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

$2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x) - 2\cdot\sin(x) + \cos(x) - 1 = 0$

$2\cdot\sin(x)\cdot(\cos(x) - 1) + \cos(x) - 1 = 0$

$(\cos(x) - 1)\cdot(2\cdot\sin(x) + 1) = 0$

Произведение равно нулю, когда ~~хотя~~ хотя бы один из множителей равен нулю, а второй при этом не теряет смысла.

$\cos(x) - 1 = 0$ $\qquad 2\cdot\sin(x) + 1 = 0$

$\cos(x) = 1$ $\qquad \sin(x) = -\frac{1}{2}$

$x = 2\pi k; k \in \mathbb{Z}$ $\qquad x = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in \mathbb{Z}$

Отбор корней:

$2\pi \le 2\pi k \le \frac{7\pi}{2} \,\Big|\, : 2\pi$

$1 \le k \le \frac{7}{4}$

$k = 1 \quad x = 2\pi$

$2\pi \le -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \le \frac{7\pi}{2} \,\Big|\cdot \frac{6}{\pi}$

$12 \le -1 + 12k \le 21$

$13 \le 12k \le 22$

$\frac{13}{12} \le k \le \frac{11}{6}$

$k \notin \mathbb{Z}$

$2\pi \le -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \le \frac{7\pi}{2} \,\Big|\cdot \frac{6}{\pi}$

$12 \le -5 + 12k \le 21$

$17 \le 12k \le 26$

$\frac{17}{12} \le k \le \frac{13}{6}$

$k = 2 \quad x = \frac{19\pi}{6}$

Ответ: а) $2\pi k$; $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$; $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$; $k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi$; $\frac{19\pi}{6}$.

***Комментарий.***

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 13.4.2**

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** а) $2\pi k$, $k \in$ □ ; $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in$ □ ; $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in$ □ ; б) $2\pi$; $\dfrac{19\pi}{6}$.

а) $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$

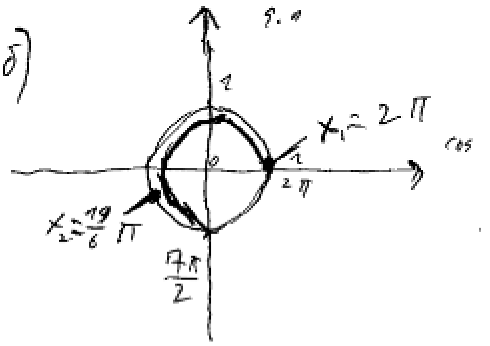
$2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$

$(2\sin x + 1)(\cos x - 1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} 2\sin x = -1 \\ \cos x = 1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z \\ x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n,\ n \in Z \\ x = 2\pi w;\ w \in Z \end{array}\right.$

б)




Отв: а) $\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z \\ x = -\frac{5}{6}\pi + 2\pi n;\ n \in Z \\ x = 2\pi w;\ w \in Z. \end{array}\right.$

б) $x_1 = 2\pi$; $x_2 = \frac{19}{6}\pi$

***Комментарий.***

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 13.4.3**

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi$; $\dfrac{19\pi}{6}$.

а) $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$

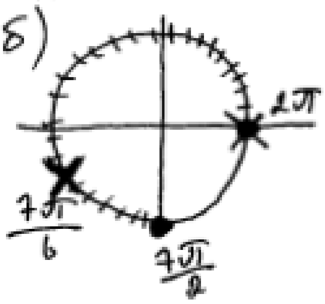
$2\sin x \cdot \cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$

$2\sin x(\cos x - 1) + (\cos x - 1) = 0$

$(\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ 2\sin x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi n,\ n \in Z \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. \quad k \in Z \end{array}\right.$

б)




$2\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{12\pi - 5\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}.$

Ответ: а) $\left\{2\pi n; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right\}$

$n, k \in Z$

б) $\left\{2\pi; \frac{7\pi}{6}\right\}$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

Отбор корней с помощью тригонометрической окружности неверный, так как на отмеченной дуге указан корень, не принадлежащий числовому отрезку. Пункт «б» не выполнен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 13.4.4**

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

**Ответ:** а) $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $-\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi$; $\dfrac{19\pi}{6}$.

а) $\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$, тогда:

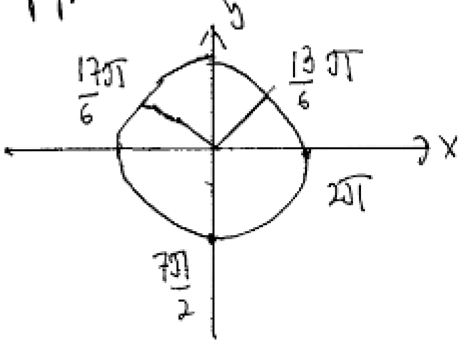
$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0$

$2\sin x(\cos x - 1) + \cos x - 1 = 0$

$(2\sin x - 1)(\cos x - 1) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x - 1 = 0 \\ \cos x - 1 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0{,}5 \\ \cos x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n_1,\ n_1 \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{5}{6}\pi + 2\pi n_2,\ n_2 \in \mathbb{Z} \\ x = 2\pi n_3,\ n_3 \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберём подходящие корни, используя единичную окружность




Подходят $2\pi$, $\dfrac{13}{6}\pi$, $\dfrac{17}{6}\pi$

Ответ: а) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n_1$, $x = \dfrac{5}{6}\pi + 2\pi n_2$, $x = 2\pi n_3$, $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}$

б) $x = 2\pi$, $x = \dfrac{13}{6}\pi$, $x = \dfrac{17}{6}\pi$

***Комментарий.***

Неверное разложение на множители в 5-й строке пункта «а».

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 13.5.1**

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

**Ответ:** а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $3\pi$; $\frac{11\pi}{3}$.

$9\ 81^{\cos x}-28\ 9^{\cos x}+3=0$

$9\cdot(9^{\cos x})^2-28\ 9^{\cos x}+30$

$9^{\cos x}=t$, тогда

$9t^2-28t+3=0$

$D=784-108=676$

$t=\frac{28\pm 26}{18}$ $\quad t_1=\frac{1}{9}$ $\quad t_2=3$

$9^{\cos x}=\frac{1}{9}$ $\quad 9^{\cos x}=3$

$9^{\cos x}=9^{-1}$ $\quad 3^{2\cos x}=3^{1}$

$\cos x=-1$ $\quad 2\cos x=1$ $\quad \cos x=\frac{1}{2}$

$x_1=\pi+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ $\quad x_2=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$., объединяя

$x_1$ и $x_2$ получаем $x=\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}$

б) $\frac{11\pi}{3}$; $3\pi$; $4\pi$ $\in\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3}, k\in\mathbb{Z}$, б) $3\pi$, $\frac{11\pi}{3}$; $4\pi$.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте «а».

При отборе корней отсутствует решение и ошибочно указано число, которое не является корнем тригонометрического уравнения. Пункт «б» не выполнен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 13.5.2**

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

**Ответ:** а) $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3}+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; б) $3\pi$; $\frac{11\pi}{3}$.

а) $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$

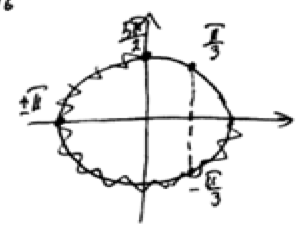
$9\cdot 3^{4\cos x}-28\cdot 3^{2\cos x}+3=0$

Пусть $3^{2\cos x}=t$, то $9\cdot t^2-28\cdot t+3=0$

$D=784-4\cdot 9\cdot 3=676$

$t_1=\frac{28-26}{18}=\frac{1}{9}$

$t_2=\frac{28+26}{18}=3$




$3^{2\cos x}=\frac{1}{9}$ $\quad$ $3^{2\cos x}=3^1$

$3^{2\cos x}=3^{-2}$ $\quad$ $\cos x=\frac{1}{2}$

$\cos x=-1$ $\quad$ $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

$x=\pm\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

б) $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$

$x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$, не подходит.

1. $x=-\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$2{,}5\pi<-\frac{\pi}{3}+2\pi k<4\pi \quad |:\pi$

$2{,}5<-\frac{1}{3}+2k<4$

$2\frac{3}{6}+\frac{2}{6}<2k<4\frac{1}{3} \quad |:2$

$1\frac{5}{6}<k<2\frac{1}{3}$

$\Rightarrow k=2 \quad x=-\frac{\pi}{3}+4\pi=\frac{11\pi}{3}$

2. $x=\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

$2{,}5\pi<\pi+2\pi k<4\pi \quad |:\pi\ -1$

$2{,}5-1<2k<4-1 \quad |:2.$

$0{,}75<k<1{,}5$

$\Rightarrow k=1.$

$x=\pi+2\pi=3\pi.$

3. $x=-\pi+2\pi k$

$2{,}5\pi<-\pi+2\pi k<4\pi \quad |:2\pi$

$1{,}75<k<2{,}5$

$\Rightarrow k=2.$

$x=-\pi+4\pi=3\pi.$

Ответ: $x=3\pi$, $x=\frac{11\pi}{3}$

***Комментарий.***

В записи корней первого тригонометрического уравнения содержится дублирующая запись корней, но ошибки в этом нет. Получен верный ответ в пункте «а».

При отборе корней допущены ошибки при делении $2\frac{5}{6}$ и $4\frac{1}{3}$ на 2. Пункт «б» не выполнен.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 13.5.3**

а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

**Ответ:** а) $\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $3\pi$; $\frac{11\pi}{3}$.

а) $9\cdot 81^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$

$9\cdot (9^2)^{\cos x} - 28\cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$

Пусть $9^{\cos x} = t$, тогда:

$9t^2 - 28t + 3 = 0$

$D = (-28)^2 - 4\cdot 9\cdot 3 = 784 - 108 = 676$

$t_1 = \frac{28-26}{2\cdot 9} = \frac{2}{18} = \frac{1}{9}$; $t_2 = \frac{28+26}{2\cdot 9} = \frac{54}{18} = 3$

Вернемся к замене: $9^{\cos x} = \frac{1}{9}$ или $9^{\cos x} = 3$

$\cos x = -1$

$x = \pi + \pi d, d \in z$

$(3^2)^{\cos x} = 3^1$

$2\cos x = 1$

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in z$

б) $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

$\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 4\pi$;

$\frac{5}{2} \le \frac{1}{3} + 2n \le 4, n \in z$

$2\frac{1}{6} \le 2n \le 3\frac{2}{3}, n \in z$

$1\frac{1}{12} \le n \le 1\frac{5}{6}, n \in z$

$n$ - нет чисел

$\frac{5\pi}{2} \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le 4\pi$

$\frac{5}{2} \le -\frac{1}{3} + 2k \le 4, k \in z$

$2\frac{5}{6} \le 2k \le 4\frac{1}{3}, k \in z$

$1\frac{5}{12} \le k \le 2\frac{1}{6}, k \in z$

$k = 2$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\cdot 2\pi = \frac{11\pi}{3}$

$\frac{5\pi}{2} \le \pi + \pi d \le 4\pi$

$\frac{5}{2} \le 1 + d \le 4, d \in z$

$1\frac{1}{2} \le d \le 3, d \in z$

$d = 2, 3$

$x_2 = \pi + 2\pi = 3\pi$

$x_3 = \pi + 4\pi = 5\pi$

Ответ: а) $x = \pi + \pi d, d \in z$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in z$;

б) $x_1 = \frac{11\pi}{3}$; $x_2 = 3\pi$; $x_3 = 5\pi$

***Комментарий.***

Неверно решено тригонометрическое уравнение $\cos x = -1$.

**Оценка эксперта: 0 баллов**.

**Пример 13.6.1**

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$, $\log_4(4\sin x)=t$,

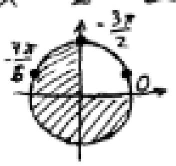
$2t^2-5t+2=0$; $D=25-16=9=3^2$, $t_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$; $t_2=\frac{5+3}{4}=1$;

$\log_4(4\sin x)=t_1=\frac{1}{2}$; $\log_4(4\sin x)=\log_4 2$, $4\sin x=2$; $\sin x=\frac{1}{2}$;

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$; $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$;

$\log_4(4\sin x)=t_2=1$; $\log_4(4\sin x)=\log_4 4$; $4\sin x=4$; $\sin x=1$;

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in Z$ Ответ: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $k\in Z$

б) 

Ответ: $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{6}$.

***Комментарий.***

Получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки при вычислении $t_2$, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*.

**Оценка эксперта: 1 балл**.

**Пример 13.6.2**

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x) - 5\log_4(4\sin x) + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

**Ответ:** а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

а) ОДЗ: $4\sin x > 0$

$\sin x > 0$

Для таких $x$ решим методом интервалов

Пусть $\log_4(4\sin x) = t$ ; $t \geqslant 0$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2$

$D = 25 - 16$

$D = 9$

$t_1 = \frac{5+3}{2}$ $\quad t_1 = 4$

$t_2 = \frac{5-3}{2}$ $\quad t_2 = 1$

Обратная замена

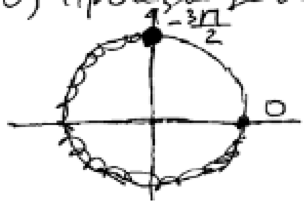
$\log_4(4\sin x) = 1$ или $\log_4(4\sin x) = 4$

$4\sin x = 4$ $\quad 4\sin x = 256$

$\sin x = 1$ $\quad \sin x = 64$

$x = \frac{\Pi}{2} + 2\Pi n,\ n \in Z$ $\quad$ нет решений.

б) Произведём отбор на единичной окружности




$-\frac{3\Pi}{2}$

Ответ: а) $x = \frac{\Pi}{2} + 2\Pi n;\ n \in Z$ б) $-\frac{3\Pi}{2}$

***Комментарий.***

Получены неверные ответы не из-за вычислительной ошибки при нахождении корней квадратного уравнения.

**Оценка эксперта: 0 баллов**.

**Пример 13.6.3**

а) Решите уравнение $2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2};0\right]$.

**Ответ:** а) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{6}$.

$2\log_4^2(4\sin x)-5\log_4(4\sin x)+2=0$ $\quad \log_4(4\sin x)=t$ $\quad$ ОДЗ $4\sin x\neq 0$, $\sin x\neq 0$, $x\neq\pi n$ $\quad n\in\mathbb{Z}$

$2t^2-5t+2=0 \quad D=25-16=9$

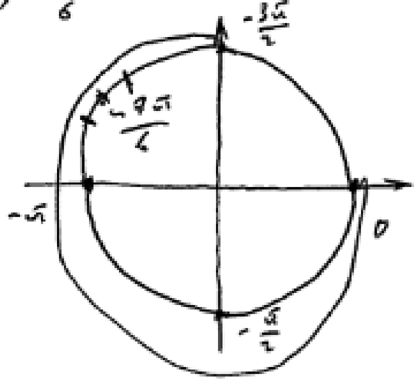
$t_1=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

$t_2=\frac{5+3}{4}=2$

$\left[\begin{array}{l}\log_4(4\sin x)=2\\ \log_4(4\sin x)=\frac{1}{2}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}8=4\sin x\\ 2=4\sin x\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\sin x=2\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.$ не подходит т.к. $-1\leq\sin x\leq 1$

$x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n \quad n\in\mathbb{Z}$

$\left[-\frac{3\pi}{2};0\right]$




Ответ: а) $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$

б) же $-\frac{7\pi}{6}$ $\quad n\in\mathbb{Z}$

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi_n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi_n$; б) $-\frac{7\pi}{6}$.

***Комментарий.***

При решении простейшего логарифмического уравнения допущена ошибка, которая не является вычислительной, кроме того при нахождении «ОДЗ» допущена ошибка, которая никак не может быть отнесена к вычислительным. Любая из этих ошибок уже не позволяет выставить положительный балл. Типичный пример выставления 0 баллов.

**Оценка эксперта: 0 баллов**.

## 2. Критерии проверки и оценка решений задания 14

Задание 14 — стереометрическая задача, она разделена на пункты *а* и *б*. В пунк-те *а* нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* найти (вычислить) геометрическую величину.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

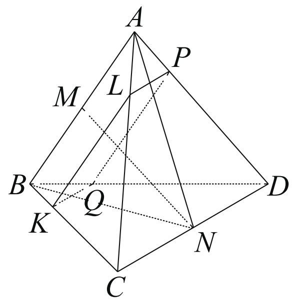
**Задача 14 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)**

В правильном тетраэдре $ABCD$ точки $M$ и $N$ — середины рёбер $AB$ и $CD$ соответственно. Плоскость $\alpha$ перпендикулярна прямой $MN$ и пересекает ребро $BC$ в точке $K$.

а) Докажите, что прямая $MN$ перпендикулярна рёбрам $AB$ и $CD$.

б) Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью $\alpha$, если известно, что $BK = 1$, $KC = 3$.

**Решение.**




а) В треугольнике $ANB$ имеем: $AN = BN = \frac{\sqrt{3}}{2}CD$.

Следовательно, он равнобедренный с основанием $AB$, а его медиана $NM$ перпендикулярна ребру $AB$.

Аналогично прямая $MN$ перпендикулярна ребру $CD$.

б) Плоскость $\alpha$, перпендикулярная прямой $MN$, параллельна прямым $AB$ и $CD$, поскольку эти прямые перпендикулярны прямой $MN$.

Обозначим точки пересечения рёбер $AC$, $AD$ и $BD$ с плоскостью $\alpha$ через $L$, $P$ и $Q$ соответственно. Тогда четырёхугольник $KLPQ$ является прямоугольником, поскольку его стороны $KL$ и $PQ$ параллельны ребру $AB$, стороны $KQ$ и $LP$ параллельны ребру $CD$, а прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны.

Треугольники $KCL$ и $KBQ$ равносторонние. Следовательно, $KL = KC = 3$, $QK = BK = 1$, а площадь прямоугольника $KLPQ$ равна $KL \cdot KQ = 3$.

**Ответ:** б) 3.

**ИЛИ**

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ через ребро $AB$ провели плоскость $\alpha$, образующую сечение $ABMN$, где точки $M$ и $N$ — точки пересечения плоскости $\alpha$ с боковыми рёбрами $SC$ и $SD$ соответственно. Известно, что $AB = BM = AN = 5MN$.

а) Докажите, что точки $M$ и $N$ делят рёбра $SC$ и $SD$ в отношении $1:4$, считая от вершины $S$.

б) Найдите косинус угла между плоскостью основания $ABCD$ и плоскостью $\alpha$.

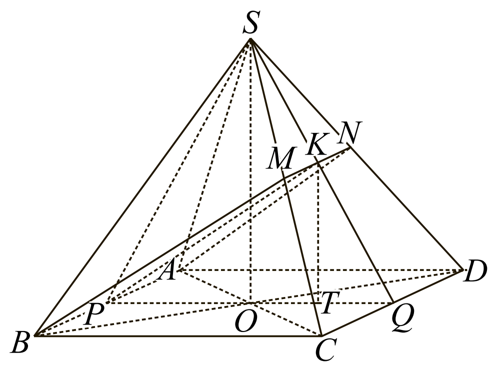
**Решение.**

а) Прямые $AB$ и $CD$ параллельны, значит, плоскость $\alpha$ параллельна прямой $CD$. Получаем, что прямая $MN$, по которой пересекаются плоскости $SCD$ и $\alpha$, параллельна прямой $CD$.

Следовательно, $\angle SMN = \angle SCD$ и $\angle SNM = \angle SDC$, значит, треугольники $MSN$ и $CSD$ подобны. Получаем:

$$\frac{SM}{SC} = \frac{SN}{SD} = \frac{MN}{CD} = \frac{1}{5}.$$

Таким образом, $SM : MC = SN : ND = 1:4$.




б) Обозначим середины рёбер $AB$ и $CD$ точками $P$ и $Q$ соответственно, а точку пересечения плоскости $SPQ$ с отрезком $MN$ — точкой $K$. Прямые $MN$ и $CD$ параллельны, поэтому $SK : KQ = SM : MC = 1 : 4$.

Плоскость $SPQ$ содержит высоту пирамиды и прямую $PQ$, перпендикулярную прямой $AB$. Следовательно, плоскость $SPQ$ перпендикулярна прямой $AB$, по которой пересекаются плоскости $ABC$ и $\alpha$, значит, искомый угол равен углу $KPQ$.

Пусть $MN = 2a$, тогда $AB = BM = AN = 5MN = 10a$. Высота $PK$ равнобедренной трапеции $ANMB$ равна

$$\sqrt{AN^2 - \left(\frac{AB - MN}{2}\right)^2} = 2\sqrt{21}a.$$

В треугольнике $SPQ$ опустим перпендикуляры $SO$ и $KT$ на сторону $PQ$. Тогда точка $O$ является серединой отрезка $PQ$, так как $SO$ — высота правильной пирамиды $SABCD$. По теореме о пропорциональных отрезках $OT : TQ = SK : KQ = 1 : 4$. Поскольку $PQ = BC = 10a$, получаем: $PO = OQ = 5a$; $OT = \frac{1}{5}OQ = a$; $PT = PO + OT = 6a$.

Треугольник $KPT$ прямоугольный, поэтому

$$\cos\angle KPQ = \cos\angle KPT = \frac{TP}{KP} = \frac{6a}{2\sqrt{21}a} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

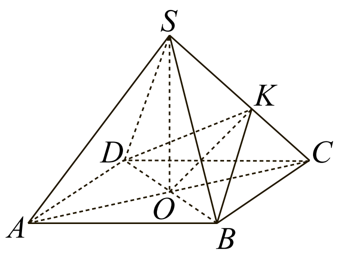
**Ответ:** б) $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

## Задание 14.1

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку $O$ пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру $SC$ провели плоскость $\alpha$.
а) Докажите, что плоскость $\alpha$ проходит через вершины $B$ и $D$.
б) В каком отношении плоскость $\alpha$ делит ребро $SC$, считая от вершины $S$, если площадь сечения равна $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$?

**Решение.**




а) Прямая $BD$ перпендикулярна прямым $SO$ и $AC$, лежащим в плоскости $ASC$. Следовательно, прямая $BD$ перпендикулярна плоскости $ASC$, а значит, перпендикулярна прямой $SC$, лежащей в этой плоскости.

Прямая $BD$ проходит через точку $O$ и перпендикулярна прямой $SC$. Значит, прямая $BD$ лежит в плоскости $\alpha$. Следовательно, точки $B$ и $D$ лежат в плоскости $\alpha$.

б) Обозначим точку пересечения плоскости $\alpha$ и ребра $SC$ точкой $K$. Тогда отрезок $OK$ является высотой треугольника $SOC$.
Отрезки $AC$ и $BD$ являются диагоналями квадрата $ABCD$. Значит, $AC = BD = \sqrt{2} \cdot AB = \sqrt{2}$ и $OC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Площадь $m$ треугольника $BKD$ равна $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$, значит, $KO = \dfrac{2m}{BD} = \dfrac{2}{3}$.

В прямоугольном треугольнике $CKO$

$$CK = \sqrt{CO^2 - KO^2} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Прямоугольные треугольники $CKO$ и $OKS$ подобны, поскольку $\angle COK + \angle KOS = 90°$. Следовательно:

$$\frac{SK}{OK} = \frac{OK}{CK}; \quad SK = \frac{OK^2}{CK} = \frac{4\sqrt{2}}{3}; \quad SK : KC = \frac{4\sqrt{2}}{3} : \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

Таким образом, $SK : KC = 8 : 1$.

**Ответ:** б) $8:1$.

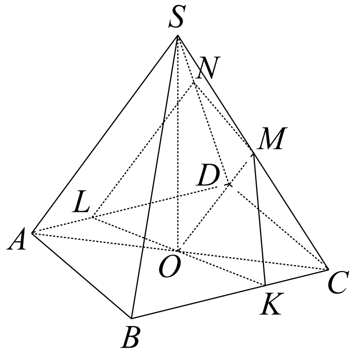
### Задание 14.2

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка $O$ — центр основания пирамиды, точка $M$ — середина ребра $SC$, точка $K$ делит ребро $BC$ в отношении $BK:KC=3:1$, а $AB=2$ и $SO=\sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость $OMK$ параллельна прямой $SA$.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость $OMK$ пересекает грань $SAD$.

**Решение.**




а) В треугольнике $SAC$ отрезок $OM$ является средней линией, а значит, прямые $SA$ и $OM$ параллельны. Следовательно, плоскость $OMK$, содержащая прямую $OM$, параллельна прямой $SA$ (точка $K$ не лежит в плоскости $SAC$).

б) Пусть прямая $OK$ пересекает ребро $AD$ в точке $L$. Тогда треугольники $AOL$ и $COK$ равны, поскольку $\angle LAO=\angle KCO$, $\angle AOL=\angle COK$ и $AO=CO$. Следовательно: $AL=CK$; $AL:LD=CK:KB=1:3$.

Боковое ребро $SA=\sqrt{SO^2+OA^2}=\sqrt{SO^2+\dfrac{AB^2}{2}}=4$.

Обозначим точку пересечения плоскости $OMK$ и прямой $SD$ через $N$. Прямые $SA$ и $NL$, содержащиеся в плоскости $SAD$, параллельны, поскольку плоскость $OMK$, содержащая прямую $NL$, параллельна прямой $SA$. Следовательно, треугольники $SDA$ и $NDL$ подобны с коэффициентом подобия $\dfrac{LD}{AD}=\dfrac{3}{4}$. Значит, $NL=\dfrac{3}{4}SA=3$.

**Ответ:** б) 3.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

## Задание 14.3

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD=3$ и $BC=2$. Точка $M$ делит ребро $A_1D_1$ в отношении $A_1M:MD_1=1:2$, а точка $K$ — середина ребра $DD_1$.

а) Докажите, что плоскость $MKC$ делит отрезок $BB_1$ пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью $MKC$, если $\angle MKC=90°$, $\angle ADC=60°$.

**Решение.**

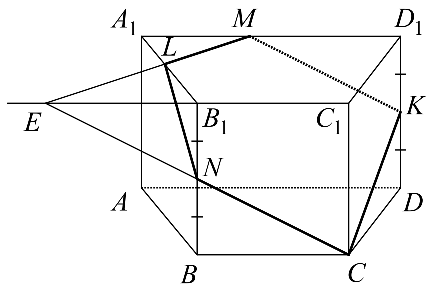


Рис. 1

а) Боковая грань $BCC_1B_1$ призмы параллельна грани $ADD_1A_1$, поскольку составляющие их рёбра соответственно параллельны. Проведём через вершину $C$ прямую, параллельную $KM$. Пусть эта прямая пересекает ребро $BB_1$ в точке $N$, а продолжение ребра $B_1C_1$ в точке $E$,

а прямая $EM$ пересекает ребро $A_1B_1$ в точке $L$ (рис. 1).

Прямоугольные треугольники $CBN$ и $MD_1K$ равны, поскольку равны их катеты $BC$ и $MD_1$, а также острые углы, ввиду параллельности соответствующих сторон. Следовательно,

$$BN=D_1K=\frac{1}{2}DD_1=\frac{1}{2}BB_1,$$

а значит, точка $N$ — середина ребра $BB_1$.

б) Пусть высота призмы равна $2x$. Тогда $B_1N=BN=DK=x$.

В равнобедренной трапеции с основаниями 3 и 2 и углом $60°$ боковые стороны равны 1, то есть $A_1B_1=CD=1$.

Прямоугольные треугольники $EB_1N$ и $CBN$ равны по катету и углу при вершине $N$. Значит,

$$EN^2=NC^2=BN^2+BC^2=x^2+4.$$

Из прямоугольных треугольников $CDK$ и $NCK$ имеем:

$$CK^2=CD^2+DK^2=x^2+1;\ NK^2=NC^2+CK^2=x^2+4+x^2+1=2x^2+5.$$

Для треугольника $BCD$ имеем:

$$BD^2=BC^2+CD^2-2BC\cdot CD\cdot\cos 120°=7.$$

Поскольку $NK=BD$, получаем: $2x^2+5=7$, откуда $x=1$.

Следовательно, $CK=\sqrt{2}$, $EN=NC=MK=\sqrt{5}$.

Площадь прямоугольной трапеции $MKCE$ равна

$$\frac{1}{2}\cdot CK\cdot\left(MK+EC\right)=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{5}+2\sqrt{5}\right)=\frac{3\sqrt{10}}{2}.$$

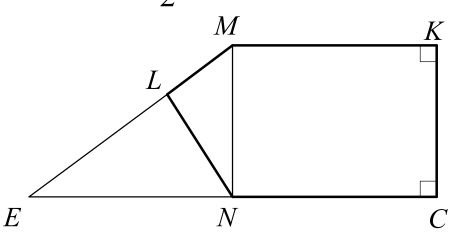


Рис. 2

Треугольники $A_1ML$ и $B_1EL$ подобны, значит, $EL:LM=EB_1:MA_1=2:1$, а площади треугольников $ELN$ и $EMN$ относятся как $2:3$ (рис. 2). Тогда площадь треугольника $ELN$ равна

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=\frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Площадь сечения $MKCNL$ равна разности площадей трапеции $MKCE$ и треугольника $ELN$:

$$\frac{3\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{3}=\frac{7\sqrt{10}}{6}.$$

**Ответ:** б) $\frac{7\sqrt{10}}{6}$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Получен обоснованный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

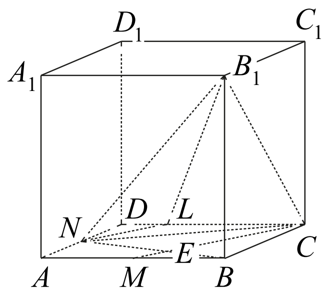
## Задание 14.4

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $M$ и $N$ — середины рёбер $AB$ и $AD$ соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1N$ и $CM$ перпендикулярны.

б) Плоскость $\alpha$ проходит через точки $N$ и $B_1$ параллельно прямой $CM$. Найдите расстояние от точки $C$ до плоскости $\alpha$, если $B_1N = 6$.

**Решение.**




а) Пусть отрезки $NB$ и $MC$ пересекаются в точке $E$. Прямоугольные треугольники $NAB$ и $MBC$ равны по двум катетам, значит,

$$\angle MEB = 180° - (\angle EMB + \angle EBM) =$$
$$= 180° - (\angle EMB + \angle MCB) = 90°.$$

Отрезок $BN$ — проекция отрезка $NB_1$ на плоскость $ABC$. Следовательно, по теореме о трёх перпендикулярах прямые $B_1N$ и $CM$ перпендикулярны.

б) Пусть плоскость $\alpha$ пересекает ребро $CD$ в точке $L$. Прямые $NL$ и $CM$, лежащие в плоскости $ABC$, параллельны, поскольку прямая $NL$ лежит в плоскости $\alpha$, параллельной прямой $CM$. Следовательно, $\angle DLN = \angle DCM = \angle BMC$, а значит, прямоугольные треугольники $DLN$ и $BMC$ подобны по острому углу. Получаем:

$$DL = BM \cdot \frac{DN}{BC} = \frac{AB}{2} \cdot \frac{AD}{2BC} = \frac{CD}{4}.$$

Заметим, что $\angle LNB_1 = 90°$, поскольку прямая $B_1N$ перпендикулярна прямой $NL$, параллельной прямой $CM$. Пусть ребро куба равно $a$. Получаем:

$$36 = B_1N^2 = AN^2 + AB^2 + BB_1^2 = \frac{9a^2}{4},$$

откуда

$$a = 4;\ BB_1 = a = 4,\ DN = 2,\ CL = 3,\ LN = \frac{a\sqrt{5}}{4} = \sqrt{5}.$$

Объём пирамиды $CNLB_1$ равен $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} CL \cdot DN\right) \cdot BB_1 = 4$.

С другой стороны, объём этой пирамиды равен $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} NB_1 \cdot LN\right) \cdot x = x\sqrt{5}$,

где $x$ — расстояние от точки $C$ до плоскости $\alpha$. Из равенства $x\sqrt{5} = 4$ получаем $x = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

**Ответ:** б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

**Задание 14.5**

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона $AB$ основания равна 6, а боковое ребро $AA_1$ равно 3. На рёбрах $AB$ и $B_1C_1$ отмечены точки $K$ и $L$ соответственно, причём $AK = B_1L = 2$. Точка $M$ – середина ребра $A_1C_1$. Плоскость $\gamma$ параллельна прямой $AC$ и содержит точки $K$ и $L$.

а) Докажите, что прямая $BM$ перпендикулярна плоскости $\gamma$.

б) Найдите объём пирамиды, вершина которой – точка $M$, а основание – сечение данной призмы плоскостью $\gamma$.

**Решение.**

а) Проведём через точки $K$ и $L$ прямые, параллельные прямой $AC$. Пусть эти прямые пересекают рёбра $BC$ и $A_1B_1$ в точках $K_1$ и $L_1$ соответственно (рис. 1). Тогда трапеция $KL_1LK_1$ является сечением исходной призмы плоскостью $\gamma$. Рассмотрим плоскость $BB_1M$. Пусть эта плоскость пересекает прямые $AC$, $KK_1$ и $LL_1$ в точках $N$, $E$ и $F$ соответственно. Четырёхугольник $BB_1MN$ – прямоугольник, причём $BB_1 = 3$, $B_1M = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot A_1B_1 = 3\sqrt{3}$.

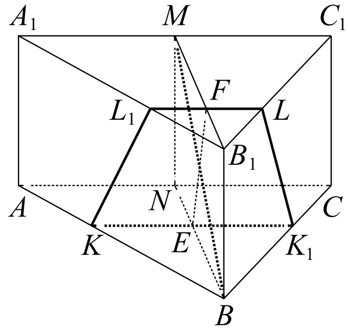


Рис. 1

Кроме того, $NE : EB = AK : KB = 1 : 2$, $B_1F : FM = B_1L : LC_1 = 1 : 2$, откуда $MF = 2\sqrt{3}$, $NE = \sqrt{3}$. Пусть $EH$ – высота трапеции $EFMN$ (рис. 2), тогда $FH = MF - NE = \sqrt{3}$.

Поскольку $\operatorname{tg} \angle MFE = \frac{EH}{FH} = \sqrt{3} = \frac{MB_1}{BB_1} = \operatorname{tg} \angle MBB_1$,

$\angle MFE = \angle MBB_1 = 90° - \angle BMF$,

то есть прямые $EF$ и $BM$ перпендикулярны.

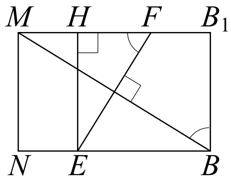


Рис. 2

Прямая $KK_1$ параллельна прямой $AC$, которая перпендикулярна плоскости $BB_1M$. Значит, прямые $KK_1$ и $EF$ перпендикулярны прямой $BM$, поэтому прямая $BM$ перпендикулярна плоскости $\gamma$.

б) Расстояние от точки $M$ до плоскости $\gamma$ равно $MF \cdot \sin \angle MFE$, а площадь трапеции $KL_1LK_1$ равна

$$\frac{KK_1 + LL_1}{2} \cdot EF = \frac{\frac{2}{3}AC + \frac{1}{3}A_1C_1}{2} \cdot \frac{EH}{\sin \angle MFE} = \frac{9}{\sin \angle MFE}.$$

Значит, искомый объём равен $\frac{1}{3} \cdot MF \cdot \sin \angle MFE \cdot \frac{9}{\sin \angle MFE} = 6\sqrt{3}$.

**Ответ:** б) $6\sqrt{3}$.

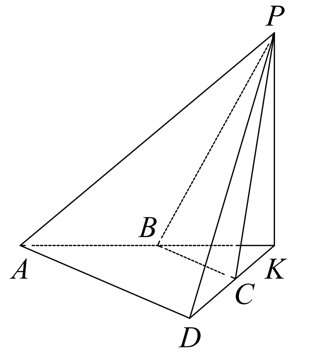
## Задание 14.6

Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является трапеция $ABCD$, причём $\angle BAD + \angle ADC = 90°$. Плоскости $PAB$ и $PCD$ перпендикулярны плоскости основания, $K$ – точка пересечения прямых $AB$ и $CD$.

а) Докажите, что плоскости $PAB$ и $PCD$ перпендикулярны.

б) Найдите объём пирамиды $KBCP$, если $AB = BC = CD = 4$, а высота пирамиды $PABCD$ равна 9.

**Решение.**




а) Заметим, что $\angle AKD = 90°$. Плоскости $PAB$ и $PCD$ перпендикулярны плоскости основания, поэтому они пересекаются по прямой, содержащей высоту пирамиды. Значит, $PK$ – высота пирамиды. Таким образом, угол $\angle AKD$ является линейным углом двугранного угла между плоскостями $PAB$ и $PCD$. Значит, они перпендикулярны.

б) Поскольку $AB = CD$, трапеция $ABCD$ является равнобедренной. Значит,

$$\angle BAD = \angle ADC = \angle KBC = \angle KCB = 45°;$$

$$BK = CK = \frac{\sqrt{2}}{2} BC = 2\sqrt{2}.$$

Таким образом, площадь треугольника $KBC$ равна $S_{KBC} = \frac{BK \cdot CK}{2} = 4$, а объём пирамиды $KBCP$ равен $\frac{PK \cdot S_{KBC}}{3} = 12$.

**Ответ:** б) 12.

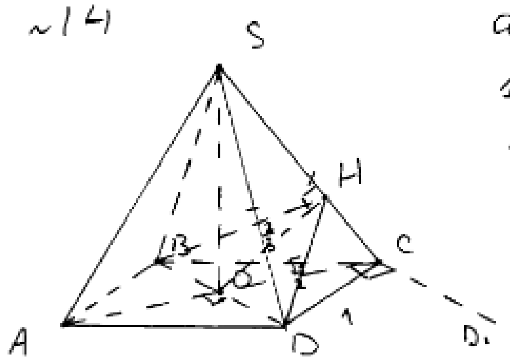
## Примеры оценивания выполнения задания 14

**Пример 14.1.1**

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку $O$ пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру $SC$ провели плоскость $\alpha$.
а) Докажите, что плоскость $\alpha$ проходит через вершины $B$ и $D$.
б) В каком отношении плоскость $\alpha$ делит ребро $SC$, считая от вершины $S$, если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

**Ответ:** б) $8:1$.

№14




а) Док-ть, что $B \in \alpha$, $D \in \alpha$

1) Построим $OH \perp SC$

2) ∢ пл-ть $(ABC)$:

построим $CD_1 \parallel BD$,

$BD \perp AC$ (по св диаг квадрата $ABCD$ т.к. пирамида правильная)

$\Rightarrow D_1C \perp AC$ (по Т о 2ух парных прямых перпендикулярных третьей)

3) ∢ $\Delta SOC$.

$SO$ - пер-р к $(ABC)$ | $CD_1 \subset (ABC)$
$SC$ - наклонная | $CD_1 \cap SC$
$OC$ - проекция | $CD_1 \perp AC$ (по док)

$\Rightarrow CD_1 \perp SC$ (по Т о 3ех пер-х)
$CD_1 \parallel BD$ (по постр)

$\Rightarrow BD \perp SC$

4) Построим пл-ть $(BHD)$:

$OH \subset (BHD)$, ~~OH ⊥~~ $SC \perp OH$ (по постр)
$BD \subset (BHD)$, $SC \perp BD$ (по док)

$\Rightarrow SC \perp (BHD)$ (по приз)

5) Получили, что пл-ть $(BHD)$ проходит через точко $O, B, D$ и пер-на пр. $SC$, ~~O∈~~ $(BHD) \to \alpha$, ~~O∈α~~, $B \in \alpha$, $D \in \alpha$
- ч.т.д.

6) 1) ∢ $ABCD$, $\angle C = 90°$: $BD^2 = BC^2 + DC^2 = 2$, $BD = \sqrt{2}$ (по Т Пифагора)

2) $S_{BHD} = \frac{1}{2} OH \cdot BD = \frac{\sqrt{2}}{3}$ (по усл)

$\frac{1}{2} OH \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $OH = \frac{2}{3}$

3) $BD = AC = \sqrt{2}$ (по св. диаг. квадрата),

$AO = OC = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (по св. диаг квадрата)

4) в $\triangle OHC$, $\angle OHC = 90^\circ$ (по постр.). по Т Пифагора

$OC^2 = OH^2 + HC^2$

$\frac{2}{4} = \frac{4}{9} + HC^2$

$HC^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{9-8}{18} = \frac{1}{18}$

$HC = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

5) в $\triangle SOC$, $\angle O = 90^\circ$:

$OH^2 = HC \cdot SH$ (по сред геометрич)

$\cancel{\frac{4}{9} \div \frac{1}{18}}$

$\frac{4}{9} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot SH$

$SH = \frac{4 \cdot 6}{9\sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}}$

6) $\frac{SH}{HC} = \frac{8 \cdot 6}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{16}{2} = \frac{8}{1}$

Ответ: 8:1

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованный верный ответ в пункте *б*.

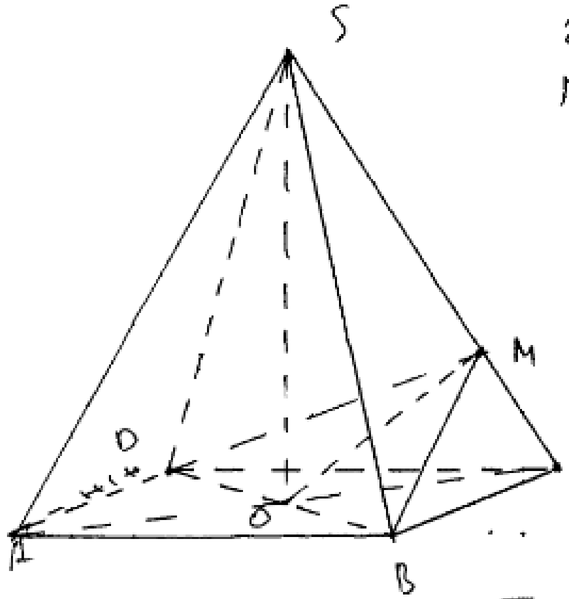
**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 14.1.2**

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку $O$ пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру $SC$ провели плоскость $\alpha$.
а) Докажите, что плоскость $\alpha$ проходит через вершины $B$ и $D$.
б) В каком отношении плоскость $\alpha$ делит ребро $SC$, считая от вершины $S$, если площадь сечения равна $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$?

**Ответ:** б) $8:1$.

№14




а) $\alpha \perp SC \Rightarrow \alpha$ должна содержать две пересекающиеся прямые, перпендикулярные $SC$. $\alpha \cap SC = M$

$OM \perp SC$

По т. о 3-х $\perp$:

$OC$ – ~~перпендикуляр~~ проекция $SC$ на $(ABC)$

$OC \perp DB \Rightarrow SC \perp DB$

C ~~...~~ $\alpha \perp SC$;

~~...~~ $\alpha$ $O \in DB$

значит $DB \subset \alpha$

ч.т.д.

б) пусть $SO = h$, $DB = \sqrt{2}$

тогда $SC = \sqrt{h^2 + OC^2} = \sqrt{h^2 + \frac{1}{2}}$

по т. Пифагора в $\triangle SOC$

$OC = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\triangle SOC$ – прямоугольный $\Rightarrow OM = \frac{SO \cdot OC}{SC} =$

$OM$ – высота

$= \frac{h\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2h^2+1}} = \frac{h}{\sqrt{2h^2+1}}$

$S_{\triangle DMB} = \frac{1}{2} MO \cdot DB = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\sqrt{2h^2+1}} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$

$3h = 2\sqrt{2h^2+1}$

$9h^2 = 4(2h^2+1)$

$9h^2 = 8h^2 + 4$; $h^2 = 4 \Rightarrow h = 2$

$SO = 2$

$OC = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$SC = \sqrt{4 + \frac{1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$OM = \frac{SO \cdot OC}{SC} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{2}{3}$

по т. Пифагора для $\Delta OMC$: $MC = \sqrt{OC^2 - OM^2} = \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4}{9}} = \frac{1}{3}$

по т. Пифагора для $\Delta OMS$: $SM = \sqrt{OS^2 - OM^2} = \sqrt{4 - \frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} =$

$= \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$SM : MC = \frac{4\sqrt{2} \cdot 3}{3 \cdot 1} = 4\sqrt{2} : 1$

Ответ: б) $4\sqrt{2} : 1$

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а* и получен неверный ответ в пункте *б* (не арифметическая ошибка при нахождении длины отрезка $MC$).

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 14.1.3**

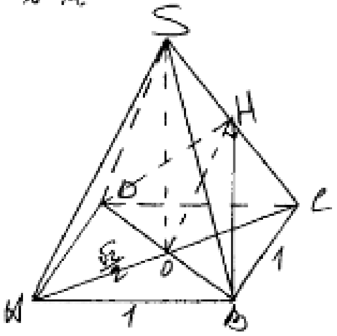
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку $O$ пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру $SC$ провели плоскость $\alpha$.

а) Докажите, что плоскость $\alpha$ проходит через вершины $B$ и $D$.

б) В каком отношении плоскость $\alpha$ делит ребро $SC$, считая от вершины $S$, если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

**Ответ:** б) $8:1$.

№ 14.




Дано: $SABCD$ – прав-ая пирамида, $AB = 1$

$AC \cap BD = O$, $O \in \alpha$, $\alpha \perp SC$

а) Док-ть: $B \in \alpha$, $D \in \alpha$

а) Доказательство

Проведем $OH \perp SC$ $OH \subset (ASC)$ $(O, H \in (ASC))$

$\underbrace{(ASC) \cap (SBD) = SO \; ; \; B, D \in (SBD), O \in BD}$

$\Downarrow$

~~[illegible]~~

$\alpha \cap (SBD) = BD$

т. $B$ и $D$ равноудалены от $H$, $\Rightarrow$ $BDH$ – сечение плоск-ю $\alpha$.

б) Найти: $\frac{SH}{HC}$

$S_{BDH} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ~~= BD~~

$BH = DH$, т.к. $SABCD$ – правильная пирамида ($\triangle BCH = \triangle DCH$ (по 1 пр)
1) $\angle BCH = \angle DCH$
2) $CH$ – общ
3) $BC = CD$)

$OH$ – медиана $\triangle BDH$

$\Downarrow$

$OH$ – высота $\triangle BDH$ (т.к. он равноб-ый)

$\Downarrow$

$S_{BDH} = \frac{BD \cdot OH}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $\qquad BD = a\sqrt{2} = \sqrt{2}$ ← сторона прав-ого четыр-ка

$\frac{\sqrt{2}\,OH}{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$ $\qquad$ Т.к. $OH \perp SC$, по теореме Пифагора

$OH = \frac{2}{3}$ $\qquad CH = \sqrt{OC^2 - OH^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{2}{4} - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{6}$

△ SOS – пр-ый, $OH \perp SC$. Обозначим $HC$ за $x$, тогда

$OH^2 = SH \cdot CH$ $\qquad \frac{4}{9} = SH \cdot \frac{\sqrt{2}}{6}$

$OC^2 = CH \cdot SC$ $\qquad SH = \frac{4 \cdot 6}{9 \cdot \sqrt{2}} = \frac{8}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

(по св-ву высоты в прямоуг-ом тр-ке)

$$\frac{SH}{HC} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{8}{1}$$

Ответ: 8 : 1

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 14.1.4**

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известно, что $AB = 1$. Через точку $O$ пересечения диагоналей основания перпендикулярно ребру $SC$ провели плоскость $\alpha$.

а) Докажите, что плоскость $\alpha$ проходит через вершины $B$ и $D$.

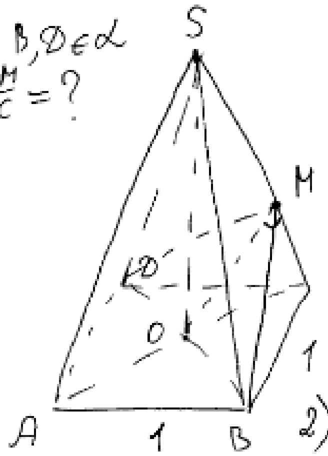
б) В каком отношении плоскость $\alpha$ делит ребро $SC$, считая от вершины $S$, если площадь сечения равна $\frac{\sqrt{2}}{3}$?

**Ответ:** б) $8:1$.

№ 14

а) (!) $B, D \in \alpha$

б) $\frac{SM}{MC} = ?$




① Проведём из точки $O$ прямую $\perp SC$

② $B, M \in (BCS)$

③ $D, M \in (DCS)$

1) $OC$ – проекция
$SC$ – накл.
$OC \perp BD$ } $\Rightarrow BD \perp SC$ (т. о 3 перпенд.)

2) $DB \perp SC$
$OM \perp SC$
$OM \cap BD$ } $\Rightarrow (BDM) \perp SC \Rightarrow$

$\Rightarrow (BDM)$ – искомое сечение $\alpha \Rightarrow B, D \in \alpha$, тогда $\alpha$ проходит через вершины $B$ и $D$. чтд.

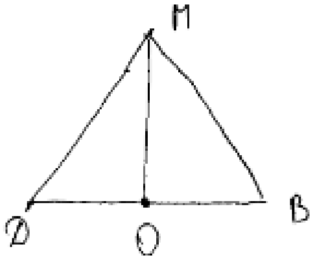
$OC$ – проекция
$OM$ – накл.
$OC \perp BO$ } $\Rightarrow OM \perp BD$ (т. о 3 перп)

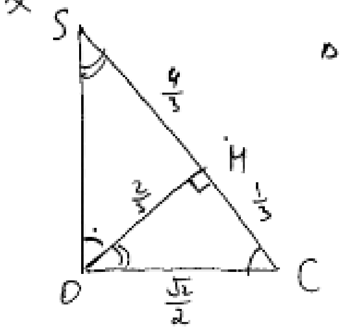
$O$ – сер $DB \Rightarrow OM = m$
$OM \perp DB \Rightarrow OM = h$ } $\Rightarrow \triangle BDM$ – р/б $\Rightarrow S_{BDM} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot DB$

$S_{BDM} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot DB$

$\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{2} \cdot OM \cdot \sqrt{2}$

$OM = \frac{\sqrt{2}}{3} : \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{2}{3}$






$\angle\ \triangle OSC$:

$\triangle SOM \sim \triangle OCM$ (по 2 углам) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{OM}{MC} = \dfrac{MS}{OM} \Rightarrow MS = \dfrac{OM^2}{MC} = \dfrac{4}{9} : \dfrac{1}{3} = \dfrac{4\cdot\cancel{3}}{\cancel{9}_3} = \dfrac{4}{3}$

$\dfrac{SM}{MC} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{3} = \dfrac{4\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}} = \dfrac{4}{1}$

Ответ: б) $\dfrac{SM}{MC} = \dfrac{4}{1}$.

***Комментарий.***

Неверное доказательство утверждения пункта *а* и неверное решение пункта *б*.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 14.2.1**

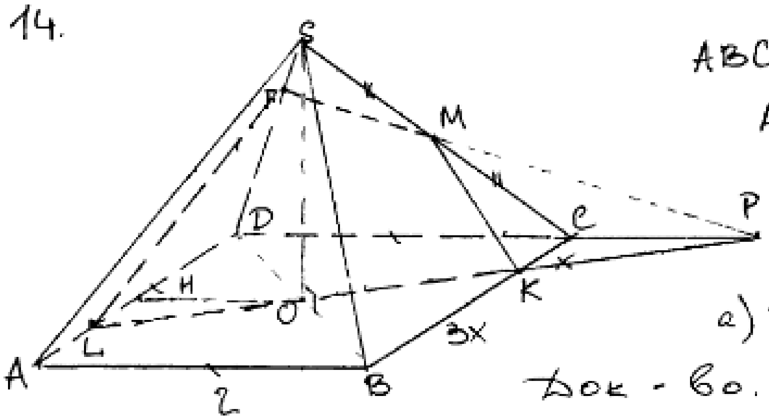
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка $O$ — центр основания пирамиды, точка $M$ — середина ребра $SC$, точка $K$ делит ребро $BC$ в отношении $BK : KC = 3:1$, а $AB = 2$ и $SO = \sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость $OMK$ параллельна прямой $SA$.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость $OMK$ пересекает грань $SAD$.

**Ответ:** б) 3.

√ 14.




ABCD – прав. пирамида

$AB = 2$, $SO = \sqrt{14}$

$BK : KC = 3 : 1$

$MS = CS$

а) Док-ть: $SA \parallel (OMK)$

Док-во.

FLKM – сечение пирамиды SABCD пл-тью OMK.

$SA \in (ASD)$ и $FL \in (ASD)$, причем FL – линия пересечения (OMK) и (ASD). Следовательно, $SA \parallel (OMK)$ если $SA \parallel FL$.

Рассм. пл-ть основания ABCD. [См. лист 4]

Т.к. SABCD – правильн. пирамида, ABCD – квадрат $\Rightarrow \frac{AL}{DL} = \frac{KC}{BK} = \frac{1}{3}$ $AD = AB = 2 \Rightarrow KC = \frac{2}{4}$

$\triangle PDL \sim \triangle PCK$ по 2 углам ($\angle DPK$ - общий;

$AD \parallel BC \Rightarrow \angle DLP = \angle CKP$ соответств. углы)

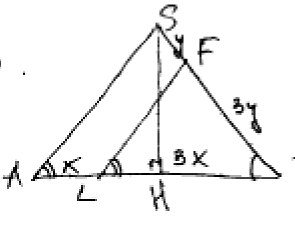
$\frac{CK}{DL} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CP}{DP} = \frac{1}{3}$ тогда

$CP = \frac{1}{3}(2 + CP)$, $CP = 1$.

По т. Менелая для пл-ти $(CSD)$:

$\frac{DF}{FS} \cdot \frac{SM}{CM} \cdot \frac{PC}{PD} = 1$ $\quad \frac{PC}{PD} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DF}{FS} = 3$ $(SM = CM)$

Рассм. грань $SAD$.




$\frac{SF}{FD} = \frac{AL}{LD} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по т. Фалеса

$SA \parallel FL$

что и требовалось док-ть.

б) Найти $FL$.

Доп. постр. $OH \perp AD$ т.к. $ABCD$ - квадрат, $O$-центр

$OH = 1$. $SO \perp ABCD \Rightarrow SO \perp OH$,

по т. Пифагора для $\triangle OSH$: $OH^2 + SO^2 = SH^2$

тогда $SH = \sqrt{14 + 1} = \sqrt{15}$.

$AH = HD = \frac{AD}{2} = 1$, тогда $SA = \sqrt{1 + 15} = 4$

(по т. Пифагора для $\triangle ASH$)

$\triangle ASD \sim \triangle LFD$ по 2 углам,

т.к. $\angle D$ - общ., $\angle SAL = \angle FLD$ - соотв при $SA \parallel FL$ и секущей $AD$.

$\frac{FL}{SA} = \frac{FD}{SD} = \frac{3y}{y + 4y} = \frac{3}{4}$

$FL = \frac{3}{4} SA = \frac{3}{4} \cdot 4 = 3$ $\quad$ Ответ: 3.

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованный верный ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 14.2.2**

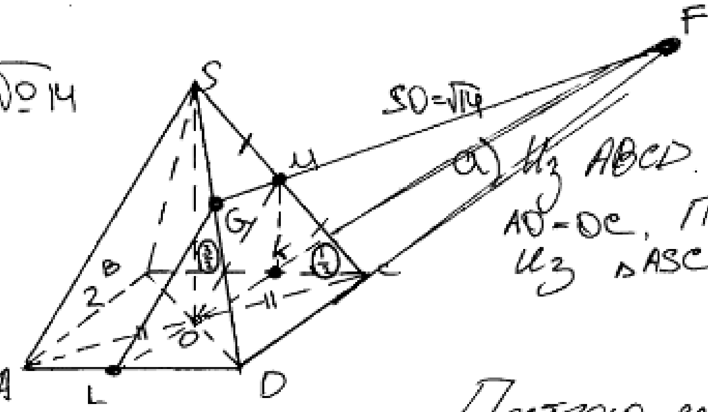
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка $O$ — центр основания пирамиды, точка $M$ — середина ребра $SC$, точка $K$ делит ребро $BC$ в отношении $BK : KC = 3 : 1$, а $AB = 2$ и $SO = \sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость $OMK$ параллельна прямой $SA$.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость $OMK$ пересекает грань $SAD$.

**Ответ:** б) 3.

№14




а) Из ABCD. O - центр квадрата =>
AO=OC, Проведу OM.
Из △ASC. AO=OC, SM=MC } OM - сред. линия
⇓
(I) OM ∥ AS

Построю сечение плоскостью OKM.
Соединю точки K и M, т.к. K ∈ (BSC) и M ∈ (BSC). Соединю точки K и O и продлю прямую OK до пересеч. AD в точке L и до пересеч. с прямой CD в точке F.
F ∈ DC => F ∈ (SDC) => соединим F и M и продлим до пересеч. с SD в точке G. G ∈ SD => G ∈ (ASD) => можно соед. G и L, т.к. L ∈ AD => L ∈ (ASD).
Итак, LGMK - сечение пирамиды SABCD плоскостью OKM.

OM ∥ AS (по доказ. (I)), OM ∈ (OKM) } AS ∥ (OMK) (по признаку парал. прямой и плоскости)
ч.т.д.

б) т.к. ABCD - квадрат, то AB=BC=2, и т.к. BK : KC = 3 : 1, то
BK = 3/2, а KC = 1/2.
Из (ABCD).




Рассмотрим △LOD и △BOK:
∠LDO = ∠OBK (как накрест. леж. при парал. прямых LD и BK и сек. DB)
∠LOD = ∠BOK (как верт.)
DO = OB (т.к. O - центр квадрата ABCD) } ⇓

$\triangle LOD = \triangle BOK$
по стороне и 2 прилеж.
к ней углам.
$\Downarrow$
$LD = BK = \frac{3}{2}$

Рассмотрим $\triangle LDF$ и $\triangle KCF$:

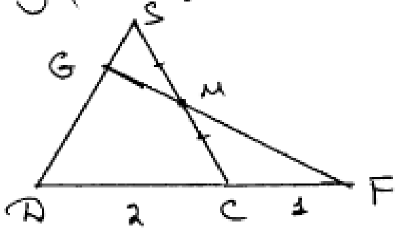
$\left.\begin{array}{l}\angle F \text{ – общий} \\ \angle DLK = \angle CKF \text{ (т.к. } LD \parallel CK)\end{array}\right\} \triangle LDF \sim \triangle KCF$ по 2 углам

$\Downarrow$

$\frac{CF}{DF} = \frac{KC}{LD}$, $DF = DC + CF$

$\frac{CF}{2+CF} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$; $3CF = 2 + CF$
$CF = 1$

Из (DSC):




По т. Менелая для $\triangle SDC$ и сек. $GF$.

$\frac{DG}{GS} \cdot \frac{SM}{MC} \cdot \frac{CF}{DF} = 1$

$\frac{DG}{GS} \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 1$

$\frac{DG}{GS} = 3 \Rightarrow DG = 3GS$

Из $\triangle AOS$: По т. Пифагора: $AS^2 = AO^2 + SO^2$, где $AO = \frac{AC}{2}$,
$AC = AB\sqrt{2}$
(т.к. ABCD – квадрат)

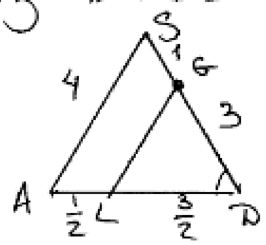
$AS^2 = \left(\frac{2\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{14})^2$

$AS^2 = 2 + 14$

$AS^2 = 16$

$AS = 4$

Из $\triangle ASD$:




$AD = 2$; $LD = \frac{3}{2} \Rightarrow AL = \frac{1}{2}$

$SD = 4$, т.к. пирамида правильная

$\Downarrow$

$\left.\begin{array}{l} DG + SG = 4 \\ DG = 3SG \end{array}\right\}$ $4SG = 4$; $SG = 1 \Rightarrow DG = 3$

Рассмотрим $\triangle ASD$ и $\triangle LGD$:

$$\left.\begin{array}{l}\angle D \text{ - общий} \\ \frac{DG}{DS} = \frac{3}{4} \\ \frac{LD}{AD} = \frac{3}{4}\end{array}\right\} \triangle ASD \sim \triangle LGD \text{ по углу и 2 сходственным сторонам}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{DG}{DS} = \frac{LG}{AS}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{LG}{4} \Rightarrow LG = 3$$

$LG$ - отрезок, по которому плоскость $OMK$ пересек грань $SAD$.

Ответ: 3.

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованный верный ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 14.2.3**

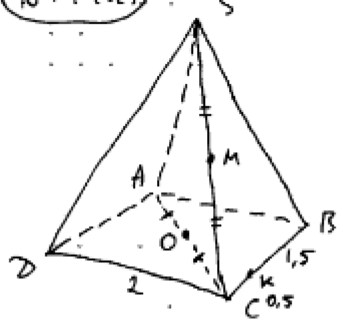
В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка $O$ — центр основания пирамиды, точка $M$ — середина ребра $SC$, точка $K$ делит ребро $BC$ в отношении $BK : KC = 3 : 1$, а $AB = 2$ и $SO = \sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость $OMK$ параллельна прямой $SA$.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость $OMK$ пересекает грань $SAD$.

**Ответ:** б) 3.

№14 (а)




т.д. $(OMK) \parallel (SA)$

т.к $O$ - середина $AC$ из того, что $SABCD$ - прав., то

$OM$ - ср. линия $\triangle SAC \Rightarrow OM \parallel SA$

Тогда в $(OMK)$ лежит прямая $(OM) \parallel (SA)$,

притом $(OMK)$ не совпадает с пл-тью $(SAOM)$,

поэтому $(OMK) \parallel (SA)$ ч.т.д.

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а*. Решение пункта *б* отсутствует.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

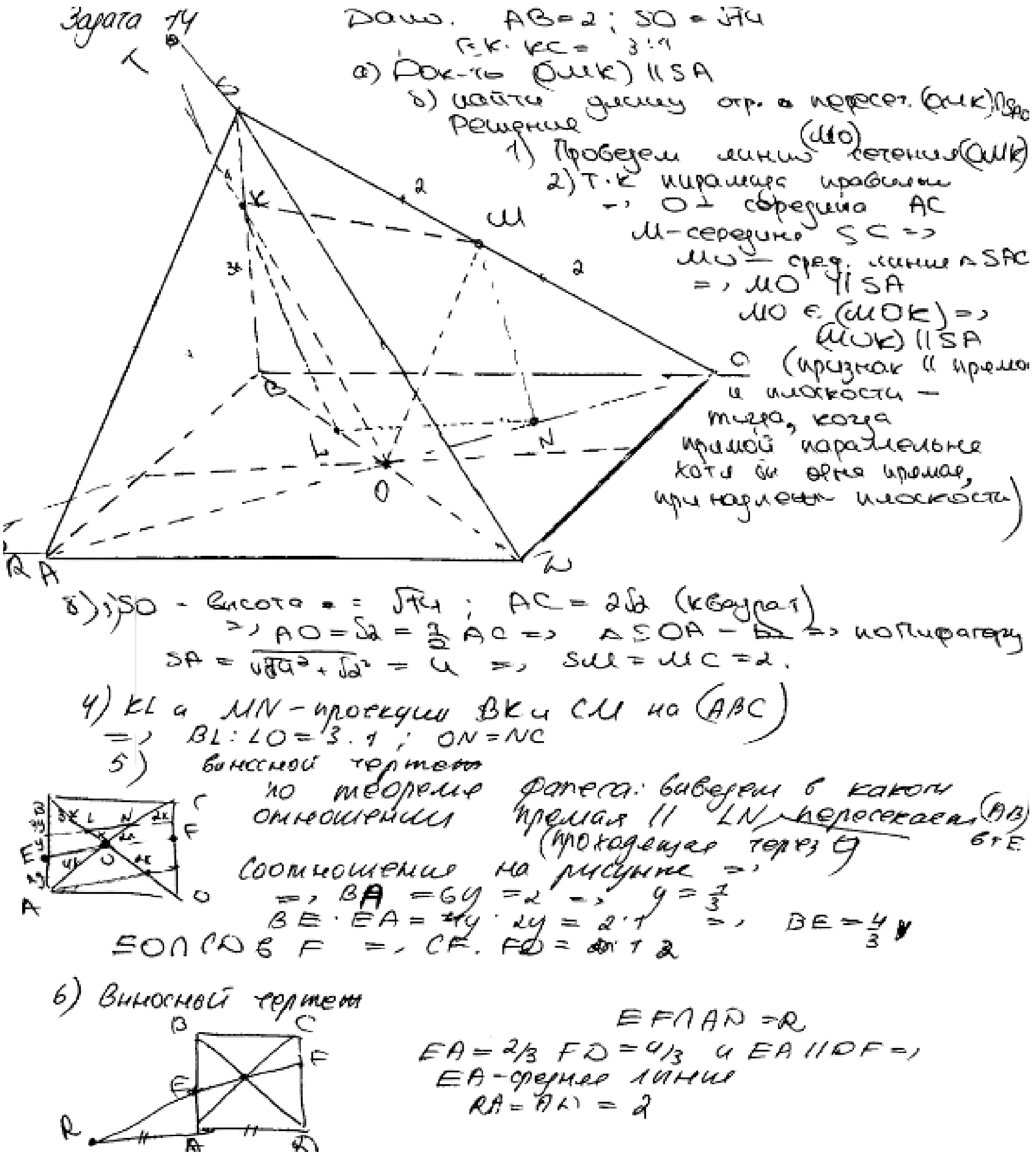
**Пример 14.2.4**

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точка $O$ — центр основания пирамиды, точка $M$ — середина ребра $SC$, точка $K$ делит ребро $BC$ в отношении $BK:KC=3:1$, а $AB=2$ и $SO=\sqrt{14}$.

а) Докажите, что плоскость $OMK$ параллельна прямой $SA$.

б) Найдите длину отрезка, по которому плоскость $OMK$ пересекает грань $SAD$.

**Ответ:** б) 3.




***Комментарий.***

Решалась другая задача: точка $K$ лежит на стороне основания, а не на боковом ребре.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 14.3.1**

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка $M$ делит ребро $A_1D_1$ в отношении $A_1M : MD_1 = 1 : 2$, а точка $K$ — середина ребра $DD_1$.

а) Докажите, что плоскость $MKC$ делит отрезок $BB_1$ пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью $MKC$, если $\angle MKC = 90°$, $\angle ADC = 60°$.

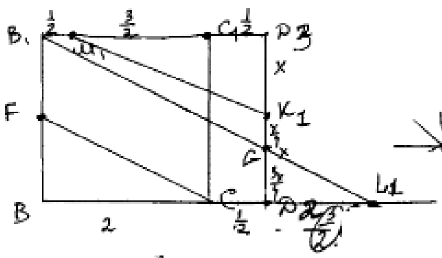
**Ответ:** б) $\dfrac{7\sqrt{10}}{6}$.

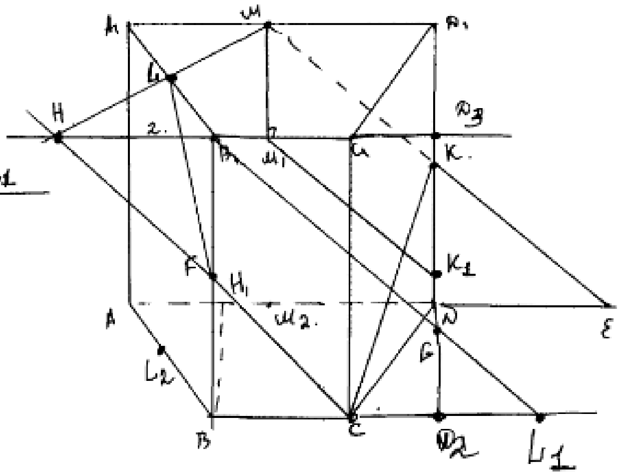
а) Проведем $MM_1 \perp (B_1C_1C)$ $\quad D_2 \perp BC$
$KK_1 \perp (B_1C_1C)$ $\quad D_3 \perp B_1C_1$

$\Rightarrow M_1K_1$ – проекция $MK$ на $(B_1C_1C)$

плоскость пер-ет // грани по // прямые $\quad ((BCC_1) \parallel (AA_1D_1))$

$\Rightarrow MK \parallel CF$ $\quad$ ($F$ – точка пер-я $(MKC)$ с $BB_1$)





$ABCD$ – р/б трапеция $\Rightarrow CD_2 = \dfrac{3-2}{2} = \dfrac{1}{2}$

$B_1M_1 = A_1M - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

Пусть $DD_1 = 2x \Rightarrow D_1K = DK = x$

Проведем $B_1L_1 \parallel M_1K_1$
$B_1L_1 \cap D_2D_3 = G$

$\triangle M_1D_3K_1 \sim \triangle B_1D_3G$ (по 2 $\angle$)

$\dfrac{D_3K_1}{D_3G} = \dfrac{M_1D_3}{B_1D_3} = \dfrac{2}{\frac{5}{2}}$

$D_3G = \dfrac{5x}{4} \Rightarrow GK_1 = \dfrac{x}{4}$
$GD_2 = \dfrac{3x}{4}$

$\triangle B_1GD_3 \sim \triangle L_1GD_2$ (по 2 $\angle$) $\quad \angle D_3 = \angle D_2 = 90°$, $\angle D_3GB_1 = \angle D_2GL_1$ (верт)

$\dfrac{D_2L_1}{D_3B_1} = \dfrac{\frac{3}{4}x}{\frac{5}{4}x} \Rightarrow D_2L_1 = \dfrac{3 \cdot D_3B_1}{5} = \dfrac{3}{\cancel{5}} \cdot \dfrac{\cancel{5}}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\triangle BFC \sim \triangle BB_1L_1$ (по 2 $\angle$) $\Rightarrow \dfrac{BF}{BB_1} = \dfrac{BC}{BL_1} = \dfrac{2}{2+2} = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow F$ – сер $BB_1$

т.е. $(MKC) \cap BB_1 = F$
$F$ – сер $BB_1$ ■

б) Продлим $CF$ до пер-я с $A_1C_1 = H$.

$\triangle HB_1F \sim \triangle CBF$ (по 2 $\angle$)

$\Rightarrow \dfrac{HB_1}{BC} = \dfrac{B_1F}{FB} \Rightarrow HB_1 = BC = 2.$

$HM \cap A_1B_1 = L$

$\triangle A_1LM \sim \triangle B_1LH$ (по 2 $\angle$) $\quad \angle HLB_1 = \angle A_1LM$ (верт), $\angle B_1 = \angle A_1$

$\Rightarrow \dfrac{A_1L}{B_1L} = \dfrac{A_1M}{B_1H} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow A_1L = \dfrac{1}{3}$, $B_1L = \dfrac{2}{3}$

$\angle ADC = 60°$

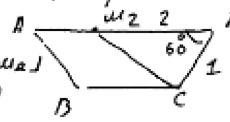
Проведем $BH_1 \perp AD$

$\angle ABH_1 = 30° \Rightarrow AH_1 = \dfrac{1}{2}AB$

$\Rightarrow AB = 2 \cdot \dfrac{1}{2} = 1.$

$\Delta K_1DC$ $KC^2 = KD^2 + CD^2 = x^2 + 1$.
– прямоуг. ($\angle D = 90^\circ$)

$\Delta MD_1K$ – прямоуг. ($\angle D_1 = 90^\circ$) $MK^2 = D_1K^2 + MD_1^2 = x^2 + 4$




пусть $MM_2 \perp AD$

по т. кос. в $\Delta M_2DC$

$M_2C^2 = 4 + 1 - \cancel{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = 3$

$MC^2 = (2x)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4x^2 + 3$

$\angle MDC = 90^\circ \Rightarrow$ $MC^2 = KC^2 + MK^2$

$4x^2 + 3 = x^2 + 4 + x^2 + 1$

$2x^2 = 2$

$x^2 = 1$

$DD_1 = 2x = 2$ $\quad x = 1$.

$MLFCK$ – искомое сечение

$S_{\Delta MKC} = \frac{1}{2} MK \cdot KC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1+4} \cdot \sqrt{1+1} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

по т. кос в $\Delta A_1LM$

$LM^2 = \frac{1}{9} + 1 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{10}{9} - \frac{3}{9} = \frac{7}{9}$ $\quad LM = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\Delta LB_1F$ – прямоуг. ($\angle B_1 = 90^\circ$) $LF = \sqrt{\frac{4}{9} + 1} = \sqrt{\frac{13}{9}} = \frac{\sqrt{13}}{3}$.

$\Delta FBC$ – прямоуг. ($\angle B = 90^\circ$) $FC = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

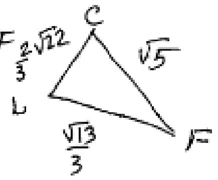
Проведем $LL_2 \perp AB$ $\quad L_2C^2$ по т. кос в $\Delta L_2BC$.

$L_2C^2 = \frac{4}{9} + 4 + \cancel{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot \frac{1}{\cancel{2}} = \frac{4}{9} + 4 + \frac{4}{3} = \frac{52}{9}$

$\Delta LL_2C$ – прямоуг. ($\angle L_2 = 90^\circ$)

$LC = \sqrt{4 + \frac{52}{9}} = \sqrt{\frac{88}{9}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{22}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{22}$.

$\Delta LCF$

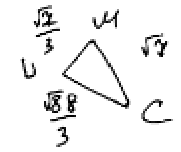



по т. кос

$\cos\angle LCF = \dfrac{\frac{88}{9} + 5 - \frac{13}{9}}{2\sqrt{5} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{22}} = \frac{10}{\sqrt{110}}$ $\quad \sin\angle LCF = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{22}\sqrt{5}}$

$S_{\Delta CLF} = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}\sqrt{22} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{10}}{3\sqrt{22} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

$\Delta LMC$




$\cos\angle LMC = \dfrac{\frac{7}{9} + 7 - \frac{88}{9}}{2\frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}}{3}} = $ [illegible] $= -\frac{3}{7}$

$\sin\angle LMC = \sqrt{\frac{40}{49}} = \frac{2\sqrt{10}}{7}$

$S_{\Delta LMC} = \frac{1}{2} \cdot LM \cdot MC \sin\angle LMC = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{3} \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{10}}{\cancel{7}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$

$S_{LMKCF} = S_{\Delta MKC} + S_{\Delta LMC} + S_{\Delta LFC} = \frac{\sqrt{10}}{2} + \frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{10}}{3} = \frac{7}{6}\sqrt{10}$

Ответ: б) $\frac{7}{6}\sqrt{10}$

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованный верный ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 3 баллаа.**

**Пример 14.3.2**

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка $M$ делит ребро $A_1D_1$ в отношении $A_1M : MD_1 = 1:2$, а точка $K$ — середина ребра $DD_1$.

а) Докажите, что плоскость $MKC$ делит отрезок $BB_1$ пополам.

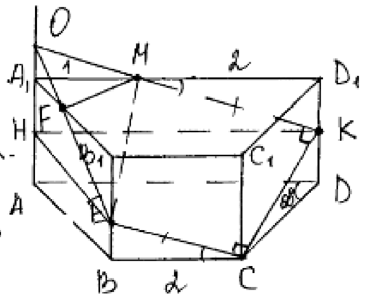
б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью $MKC$, если $\angle MKC = 90°$, $\angle ADC = 60°$.

**Ответ:** б) $\dfrac{7\sqrt{10}}{6}$.

13. а) Построим сечение призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью $(MKC)$:

$(MKC) \cap (ADD_1) = MK$, $(ADD_1) \parallel (BCC_1)$

$\Rightarrow (MKC) \cap (BCC_1)$ по прямой,




которая параллельна $MK$ $\Rightarrow$ построим $CE \parallel MK \Rightarrow E \in (MKC)$

Пусть $MK \cap AA_1 = O \Rightarrow (MKC) \cap (ADD) = OK \Rightarrow$

$O \in (MKC)$, тогда пусть ~~если~~ $OE \cap A_1B_1 = F$.

$\Rightarrow ECKMF$ - искомое сечение

Так как $MK \parallel EC$ и $BC \parallel AD$ (как основания трапеции), то $\angle ECB = \angle KMD_1$

$\triangle MKD_1 \sim \triangle BCE$ (по двум углам $\angle EBC = \angle MD_1K = 90°$ (т.к призма прямая), $\angle ECB = \angle KMD_1$)

$$\Rightarrow \frac{MD_1}{BC} = \frac{D_1K}{BE}$$

$$\frac{\frac{2AD}{3}}{2} = \frac{D_1K}{BE} \Rightarrow 1 = \frac{D_1K}{BE}$$

$$1 = \frac{DD_1}{2BE} = \frac{BB_1}{2BE} = \frac{BE + EB_1}{2BE}$$

$$2BE = BE + EB_1$$

$$BE = EB_1$$

$\Rightarrow$ т.к. $(MKC) \cap BB_1 = E$, $(MKC)$ делит $BB_1$ пополам, что и требовалось доказать

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а*. Решение пункта *б* отсутствует.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

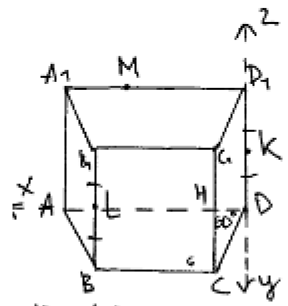
**Пример 14.3.3**

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка $M$ делит ребро $A_1D_1$ в отношении $A_1M : MD_1 = 1:2$, а точка $K$ — середина ребра $DD_1$.

а) Докажите, что плоскость $MKC$ делит отрезок $BB_1$ пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью $MKC$, если $\angle MKC = 90°$, $\angle ADC = 60°$.

**Ответ:** б) $\dfrac{7\sqrt{10}}{6}$.




$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - прям

$\angle ADC = 60°$

$ABCD$ - р/б трап.

$\angle MKC = 90°$

$AD = 3$ $BC = 2$

$\dfrac{A_1M}{MD_1} = \dfrac{1}{2}$

$K$ - сер. $DD_1$

Док-ть:

$L \in MKC$

Система координат:

$D(0;0;0)$ пусть $DD_1 = h$

1) доп. $CH \perp AD$

Р $\triangle CHD$, $\angle H = 90°$

$\angle D = 60°$, $\angle C = 30° \Rightarrow$

$HD = \frac{1}{2}CD$ $HD = \frac{1}{2}$ (т.к. тр. р/б)

$CD = 1$

$HC = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) в $MKC$

$M(2; 0; h)$

$K(0; 0; \frac{h}{2})$

$C(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$

Составим ур-е $MKC$:

$$\begin{cases} 2a + hc + d = 0 \\ \frac{h}{2}c + d = 0 \\ \frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{3}}{2}b + d = 0 \end{cases} \qquad c = -\frac{2d}{h}, \quad a = \frac{d}{2}, \quad b = -\frac{5\sqrt{3}d}{6}$$

$$\frac{d}{2}x - \frac{5\sqrt{3}d}{6}y - \frac{2d}{h}z + d = 0 \;|:d$$

$$\frac{1}{2}x - \frac{5\sqrt{3}}{6}y - \frac{2z}{h} + 1 = 0$$

$L(\frac{5}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{h}{2})$ - координаты середины $BB_1$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2} - \frac{5\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{6\cdot 2} - \frac{2}{h}\cdot\frac{h}{2} + 1 = 0$$

$$\frac{5}{4} - \frac{5}{4} - 1 + 1 = 0$$

$0 = 0 \Rightarrow L \in MKC \Rightarrow$ $MKC \cap BB_1$ в середине ч.т.д.

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а*. Решение пункта *б* отсутствует.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

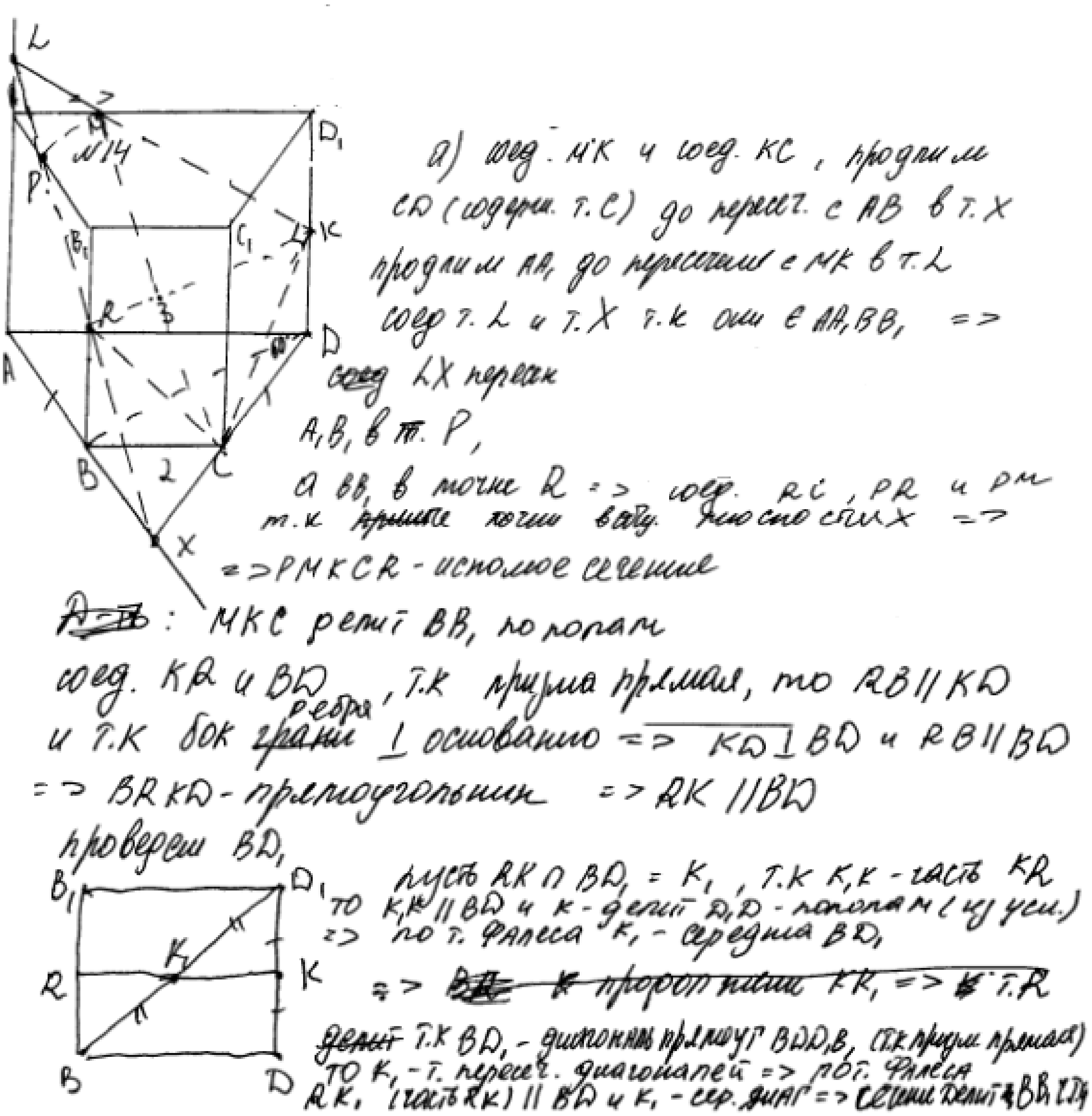
**Пример 14.3.4**

В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 2$. Точка $M$ делит ребро $A_1D_1$ в отношении $A_1M : MD_1 = 1:2$, а точка $K$ — середина ребра $DD_1$.

а) Докажите, что плоскость $MKC$ делит отрезок $BB_1$ пополам.

б) Найдите площадь сечения призмы плоскостью $MKC$, если $\angle MKC = 90°$, $\angle ADC = 60°$.

**Ответ:** б) $\dfrac{7\sqrt{10}}{6}$.



а) соед. MK и соед. KC, продлим CD (содерж. т. C) до пересеч. с AB в т. X
продлим $AA_1$ до пересечения с MK в т. L
соед т. L и т. X т.к они ∈ $AA_1BB_1$ =>
~~соед~~ LX пересек
$A_1B_1$ в т. P,
а $BB_1$ в точке R => соед. RC, PR и PM
т.к принад. точки ... => 
=> PMKCR - искомое сечение
~~Д-ть~~: MKC делит $BB_1$ пополам
соед. KR и $BD$, т.к призма прямая, то RB || KD
и т.к бок ребра ~~грани~~ ⊥ основанию => KD ⊥ BD и RB || BD
=> BRKD - прямоугольник => RK || BD
проверим $BD_1$

пусть $RK \cap BD_1 = K_1$, т.к $K_1K$ - часть KR
то $K_1K$ || BD и K - делит $D_1D$ - пополам (из усл.)
=> по т. Фалеса $K_1$ - середина $BD_1$
=> ~~BD K пропорц...~~ $KK_1$ => т.R
~~делит~~ т.к $BD_1$ - диагональ прямоуг $BDD_1B_1$ (т.к призма прямая)
то $K_1$ - т. пересеч. диагоналей => по т. Фалеса
$RK_1$ (часть RK) || BD и $K_1$ - сер. диаг => сечение делит $BB_1$ пополам

***Комментарий.***

Доказательство утверждения в пункте *а* не обосновано, пункт *б* не выполнен.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 14.4.1**

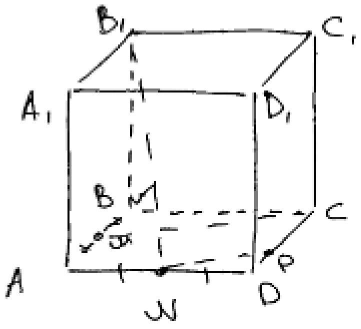
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $M$ и $N$ — середины рёбер $AB$ и $AD$ соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1N$ и $CM$ перпендикулярны.

б) Плоскость $\alpha$ проходит через точки $N$ и $B_1$ параллельно прямой $CM$. Найдите расстояние от точки $C$ до плоскости $\alpha$, если $B_1N = 6$.

**Ответ:** б) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

а)

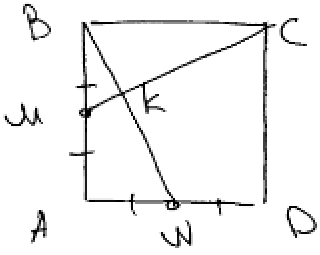



Д-то: $CM \perp B_1N$

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб

$N$ – сер. $AD$

$M$ – сер. $AB$.




$\triangle MBC = \triangle BAN$ ($BC = AB$, $\angle B = \angle A = 90°$, $AN = MB$)

$\Rightarrow \angle BCM = \angle MBN$, $\angle BMC = \angle BNA$, $\angle BCM + \angle BMC = 90°$ $\Rightarrow$

$K = CM \cap BN$

$\Rightarrow \angle BKM = 180° - \angle MBN - \angle CMB = 90°$, ч.т.д.

$BN$ – проек. $B_1N$ на $(ABC)$

$\Rightarrow \angle(B_1N, CM) = 90°$ (по т. о 3х пер.) ч.т.д.

б) $B_1N = 6$.

$AN = x$ $\quad B_1N = \sqrt{4x^2 + 4x^2 + x^2} = 3x = 6$

$AN = x = 2$.

$NP$ | $NP \parallel CM$, $P = NP \cap CD$

$P \in \alpha$, т.к. $NP \parallel CM$.

Введём $OXYZ$, так что начало координат в $A$, $OX$ сон. с $AD$, $Oy$ сон. с $AA_1$, $OZ$ сон. с $AB$.

$\alpha: (B_1NP): ax+by+cz+d=0.$

$B_1(0;4;4)$

$N(2;0;0)$

$P(4;0;1)$

$C(4;0;4)$

$$\begin{cases} 4b+4c+d=0 \\ 2a+d=0 \\ 4a+c+d=0 \end{cases}$$

$d=1,\ a=-\frac{1}{2}.$

$$\begin{cases} -2+c+\cancel{d}=0 \\ 4b+4c+1=0 \end{cases},\quad c=1,\ b=-\frac{5}{4}.$$

$\alpha: -\frac{1}{2}x - \frac{5}{4}y + z + 1 = 0$

$-2x-5y+4z+4=0.$

$$\rho(C;\alpha) = \frac{|-2\cdot4+4\cdot4+4|}{\sqrt{4+25+16}} = \frac{12}{\sqrt{45}} = \frac{12}{3\sqrt5} = \frac{4}{\sqrt5} = \frac{4\sqrt5}{5}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt5}{5}.$

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

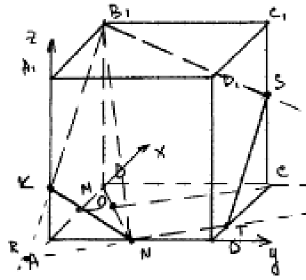
**Пример 14.4.2**

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $M$ и $N$ — середины рёбер $AB$ и $AD$ соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1N$ и $CM$ перпендикулярны.

б) Плоскость $\alpha$ проходит через точки $N$ и $B_1$ параллельно прямой $CM$. Найдите расстояние от точки $C$ до плоскости $\alpha$, если $B_1N = 6$.

**Ответ:** б) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.



Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб, $M$ – серед. $[AB]$

$N$ – серед. $[AD]$

а) Док-ть: $(B_1N) \perp (CM)$

б) Найти: $\rho(C; \alpha)$, если $|B_1N| = 6$,

$N, B_1 \in \alpha$, $\alpha \parallel (CM)$

а) Док-во:

1. $(NT) \parallel (CM)$, $T \in [CD]$ $\Rightarrow |DT| = \frac{1}{4}|DC|$ (т.к. $\triangle CBM \sim \triangle NDT$ по 2ум углам)

2. $\angle((B_1N);(CM)) = \angle((B_1N);(NT))$

3. введём систему координат, $(AB)$ – ось $x$, $(AD)$ – ось $y$, $(AA_1)$ – ось $z$

Пусть $|AB_1| = 4$, тогда $B_1(4;0;4)$, $N(0;2;0)$ $T(1;4;0)$

4. $\overrightarrow{B_1N}\{-4;2;-4\}$ $\overrightarrow{NT}\{1;2;0\}$ $\overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{NT} = -4\cdot1 + 2\cdot2 - 4\cdot0 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{B_1N} \perp \overrightarrow{NT} \Rightarrow (B_1N) \perp (NT) \Rightarrow (B_1N) \perp (CM)$ ч.т.д.

б) Решение:

1. $(NT) \perp (CM)$, $N \in (NT) \Rightarrow T \in \alpha$

$(NT) \cap (BC) = Q$, $(QB_1) \cap (CC_1) = S$, $S \in \alpha$

$(NT) \cap (AB) = R$, $(RB_1) \cap (AA_1) = K$, $K \in \alpha$

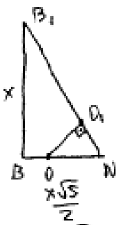
2. $(BN) = \text{пр}_{(ABC)}(B_1N)$, $(B_1N) \perp (NT) \Rightarrow (BN) \perp (NT) \Rightarrow (B_1BN) \perp \alpha$

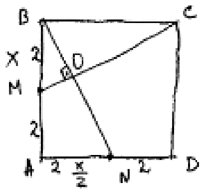
3. т.к. $\alpha \parallel (CM) \Rightarrow \rho$ от любой точки на $(CM)$ до $\alpha$ одинаково

4. $(BN) \cap (CM) = O$, $(B_1NB) \perp \alpha \Rightarrow \rho(C;\alpha) = \rho(O;\alpha) = |OO_1|$,

где $(OO_1) \perp (B_1N)$

5.





$|BN| = \frac{4\sqrt{5}}{2} = 2\sqrt{5}$

$|BN| = \sqrt{|BA|^2 + |AN|^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$

$|B_1N| = \sqrt{|BB_1|^2 + |BN|^2}$

$6 = \sqrt{x^2 + \frac{5x^2}{4}}$ $\quad 6 = \frac{3x}{2}$ $\quad x = 4$

$\triangle ABN \sim \triangle OBM$ ($\angle B$ – общий)

$\frac{|BN|}{|BM|} = \frac{|BO|}{|BA|} \Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{|BO|}{4} \Rightarrow |BO| = \frac{4}{\sqrt{5}}$

$|ON| = 2\sqrt{5} - \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

$\triangle BB_1N \sim \triangle O_1ON$ ($\angle N$ – общий) $\frac{|ON|}{|B_1N|} = \frac{|OO_1|}{|BB_1|} \Rightarrow \frac{\frac{6}{\sqrt{5}}}{6} = \frac{|OO_1|}{4} \Rightarrow |OO_1| = \frac{4}{\sqrt{5}}$

Ответ: $\frac{4}{\sqrt{5}}$

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

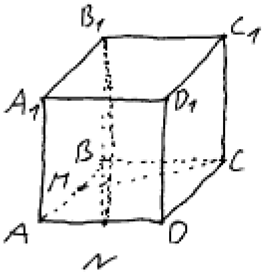
**Пример 14.4.3**

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $M$ и $N$ — середины рёбер $AB$ и $AD$ соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1N$ и $CM$ перпендикулярны.

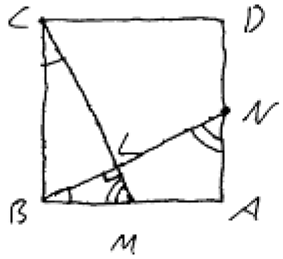
б) Плоскость $\alpha$ проходит через точки $N$ и $B_1$ параллельно прямой $CM$. Найдите расстояние от точки $C$ до плоскости $\alpha$, если $B_1N = 6$.

**Ответ:** б) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.




Решение.

(а) 1) Рассмотрим плоскость основания куба $(ABC)$.




$BN$ — проекция $B_1N$ на эту ~~плоск~~ плоскость т.к. $B_1$ проецируется в точку $B$

2) Рассмотрим $\triangle CMB$ и $\triangle BNA$.

$CB = BA$ как стороны квадрата

$NA = BM = \frac{1}{2}AB$

$\angle BAN = \angle CBM = 90°$

Значит, $\triangle CMB = \triangle BNA$ по двум катетам.

Следовательно, $\angle NBA = \angle BCM$ и $\angle BNA = \angle CMB$

3) Пусть $L$ — точка пересечения $BN$ и $CM$. Рассмотрим $\triangle BLM$. Заметим, что

$\angle LBM + \angle LMB =$

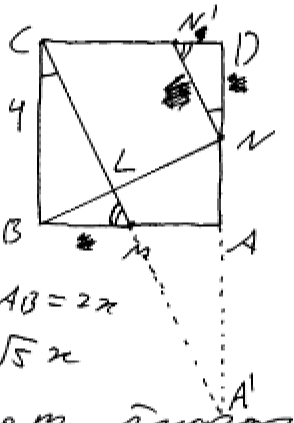
$= \angle BCM + \angle CMB = 90°$

Значит, $\triangle BLM$ — прямоуг. с прямым углом $\angle BLM$. Выходит, $CM \perp BN$

4) По теореме о трёх перпендикулярах

$B_1N \perp CM$ т.к. $CM \perp BN$ ■

(б) 1) Т.к. $\alpha \parallel CM$, то она пересекает $(ABC)$ по прямой, параллельной $CM$. Т.к. $\alpha$ содержит $N$, ~~то~~ и $N \in (ABC)$, то прямая $NN'$ — линия пересечения $\alpha$ и $(ABC)$




2) Рассмотрим $\triangle BNA$.

По т. Пифагора:

$BN^2 = NA^2 + BA^2$

Пусть $NA = x$, тогда $AB = 2x$

$BN = \sqrt{x^2 + 4x^2} = \sqrt{5}x$

3) В $\triangle BB_1N$: по т. Пифагора:

$B_1N^2 = BN^2 + BB_1^2$

$36 = 5x^2 + 4x^2 = 9x^2$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ ($-2$ не подх., т.к. любое расстояние всегда больше нуля)

Значит, ~~что~~ длина стороны куба равна 4

4) Т.к. $BN \perp CM$ и $NN' \parallel CM$, то $BN \perp NN'$

Следовательно, расстояние от $CM$ до $\alpha$ является $LN$

Расстояние от т. $C$ до $\alpha$ будет являться расстояние от любой точки на прямой $CM$ до пл. $\alpha$, т.к. $\alpha \parallel CM$

Значит, $LN$ — искомое расстояние.

5) По т. Менелая для $\triangle BNA$ и секущей LM:

$$\frac{BL}{LN}\cdot\frac{NA'}{A'A}\cdot\frac{AM}{MB}=1$$

6) Рассмотрим $\triangle CDA'$.

$MA = CD\cdot\frac{1}{2}$ и $MA \parallel CD$ (как стороны квадрата)

Значит, $MA$ – ср. линия, $\Rightarrow DA = AA' = 4$

7) Из пункта решения 5) получим:

$$\frac{BL}{LN}\cdot\frac{NA+AA'}{AA'}\cdot\frac{AM}{MB}=1$$

$$\frac{BL}{LN}\cdot\frac{6}{4}\cdot\frac{2}{2}=1$$

$\frac{BL}{LN}=\frac{2}{3}$ т.к. $BN = 2\sqrt{5}$ ($\sqrt{5}x$ где $x=2$)

$LN = \frac{3}{2}BL = \frac{3}{2}BN - \frac{3}{2}LN$

$\frac{5}{2}LN = \frac{3}{2}BN$

$LN = \frac{3}{5}BN$

$LN = \frac{6\sqrt{5}}{5}$

Ответ. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

***Комментарий.***

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, в пункте *б* получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 14.4.4**

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки $M$ и $N$ — середины рёбер $AB$ и $AD$ соответственно.

а) Докажите, что прямые $B_1N$ и $CM$ перпендикулярны.

б) Плоскость $\alpha$ проходит через точки $N$ и $B_1$ параллельно прямой $CM$. Найдите расстояние от точки $C$ до плоскости $\alpha$, если $B_1N = 6$.

**Ответ:** б) $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

Дано:

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб; $M$ – сер. $AB$; $N$ – сер. $AD$

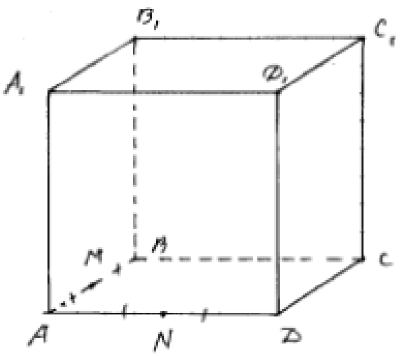
а) Доказать: $B_1N \perp CM$

б) $\{N; B_1\} \in \alpha$ ; $\alpha \parallel CM$

$B_1N = 6$

$\rho(C, \alpha)$ – ?

а)




$$\overrightarrow{B_1N} = \overrightarrow{B_1A_1} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1A} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2}$$

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{BA}}{2}$$

$$\overrightarrow{B_1N} \cdot \overrightarrow{CM} = \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A_1A} + \frac{\overrightarrow{AD}}{2}\right)\left(-\overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{BA}}{2}\right) =$$

$$= -\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{AD} - \frac{AD^2}{2} + \frac{BA^2}{2} + \frac{\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{BA}}{2} + \frac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}}{4}$$

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$, т.к. $BA \perp AD$

$\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$, т.к. $A_1A \perp AD$

$\dfrac{-AD^2 + BA^2}{2} = 0$, т.к. $AD = BA$

$\dfrac{\overrightarrow{A_1A}\cdot\overrightarrow{BA}}{2} = 0$, т.к. $A_1A \perp BA$

$\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AD}}{4} = 0$, т.к. $BA \perp AD$

$\underbrace{\overrightarrow{B_1N}\cdot\overrightarrow{CM} = 0}$

$\Downarrow$

$B_1N \perp CM$

$(\overrightarrow{B_1N} \neq \vec{0}$

$\overrightarrow{CM} \neq \vec{0})$

б) 1) Пусть $a$ — сторона куба, $a>0$

По т. Пифагора в $\triangle B_1BN$, $B_1N^2 = B_1B^2 + BN^2$

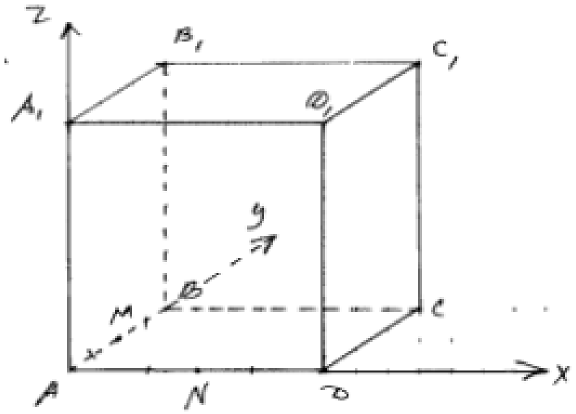
По т. Пифагора в $\triangle BAN$, $BN^2 = BA^2 + AN^2$

$B_1N^2 = B_1B^2 + BA^2 + AN^2$

$36 = a^2 + a^2 + \frac{a^2}{4}$

$36 = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow a = 4$

2)




Введём ортогональную систему координат

$C(4;4;0)$ $B_1(0;4;4)$ $N(2;0;0)$ $M(0,2;0)$

$\overrightarrow{MC}(x_c - x_m; y_c - y_m; z_c - z_m)$ $\overrightarrow{MC}(4;2;0)$

Т.к. $\alpha \parallel MC$, то т. $P(x_N + x_{\overrightarrow{MC}}; y_N + y_{\overrightarrow{MC}}; z_N + z_{\overrightarrow{MC}}) \in \alpha$

$P(6;2;0)$

3) Найдём ур-ие $\alpha$:

$$\begin{cases} a x_{B_1} + b y_{B_1} + c z_{B_1} + d = 0 \\ a x_N + b y_N + c z_N + d = 0 \\ a x_P + b y_P + c z_P + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b + 4c + d = 0 \\ 2a + d = 0 \\ 6a + 2b + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a = -\frac{d}{2} \\ -3d + 2b + d = 0 \\ 4b + 4c + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{d}{2} \\ b = d \\ c = -\frac{5}{4}d \end{cases}$$

$$-\frac{x}{2}+y-\frac{5}{4}z+1=0$$

$2x-4y+5z-4=0$ — ур-ие $\alpha$.

$\vec{n}(2;-4;5)$ — вектор нормали к $\alpha$.

4) Пусть т. $H$ — основание перпендикуляра, опущенного из т. $C$ на $\alpha$.

Тогда, $\overrightarrow{CH}=(x_H-x_C;\ y_H-y_C;\ z_H-z_C)$

$\overrightarrow{CH}=(x_H-4;\ y_H-4;\ z_H)$

Т.к. $CH\perp\alpha$, $\overrightarrow{CH}=k\vec{n}$; $k\in R$

$x_H-4=2k\to x_H=4+2k$

$y_H-4=-4k\to y_H=4-4k$

$z_H=5k$

Т.к. $H\in\alpha$, $2x_H-4y_H+5z_H-4=0$

$2(4+2k)-4(4-4k)+5\cdot5k-4=0$

$8+4k-16+16k+25k-4=0$

$45k=12$

$k=\frac{4}{15}$

5) $\rho(C;\alpha)=|\overrightarrow{CH}|=k|\vec{n}|=\frac{4}{15}\cdot\sqrt{4+16+25}$

$\rho(C;\alpha)=\frac{4}{15}\sqrt{45}=\frac{12\sqrt{15}}{15}=\frac{4}{5}\sqrt{15}$

Ответ: $\cancel{\frac{12\sqrt{15}}{15}}$ $\frac{4\sqrt{15}}{5}$

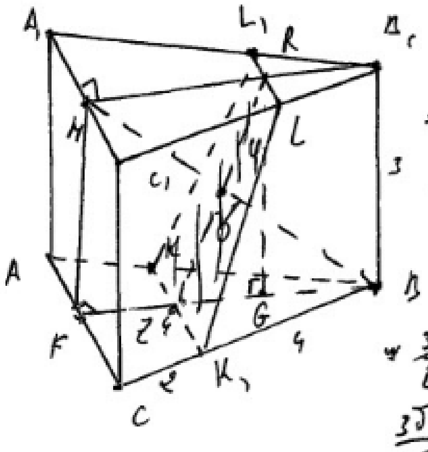
***Комментарий.***

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки.

В предпоследней строке неверно вынесен множитель из-под корня.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 14.5.1**




Решение.

$BF = \sqrt{BC^2 - FC^2} =$
$= \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

$FM \perp AC$, $= B_1B$

$BM = \sqrt{FM^2 + BF^2} =$
$= \sqrt{9+27} = \sqrt{36} = 6$

В $\triangle BZK_1$: $\frac{BF}{BZ} = \frac{CB}{K_1B}$

~~$\frac{3\sqrt{3}}{BZ} = \frac{4}{6}$; $4BZ = 18\sqrt{3}$~~

$\frac{3\sqrt{3}}{BZ} = \frac{6}{4}$; $6BZ = 12\sqrt{3}$

[redacted]

Дано

$ABCA_1B_1C_1$ – прав. треуг. призм.

$AA_1 = 3$, $AB = 6$, $AK = 2$,

$B_1L = 2$. $A_1M = MC_1 = 3$.

$\varphi$ – плоскость $\parallel AC$ и

прох. содержащая $K_1L$.

а) Док-ть $BM \perp \varphi$

б) $V = AKK_1LL_1$

$RG \parallel B_1B$ $RG = B_1B$. $ZG = FB - (FZ + GB)$ $FZ = GB = \sqrt{3} = \frac{1}{3}ZB$

$ZG = 3\sqrt{3} - (\sqrt{3} + \sqrt{3}) = \sqrt{3}$. $RZ = \sqrt{RG^2 + ZG^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

~~$\triangle BFM \sim \triangle BOZ$ по общ $\angle MBF$ и $BO = OM$ т.к. $RB_1 = FZ$~~

$\triangle ZOB = \triangle MOR$ т.к. $\angle MOR = \angle ZOB$ (т.к. они вертикальные),

$ZB = MR = 2\sqrt{3}$, $\angle ZBM = \angle OMR$ т.к. это внутр. накрест. леж. углы

при 2-ух $\parallel$ прям $B_1M$ и $FB$. след. След $RO = OZ$

по теореме пифагор. $ZB = \sqrt{BO^2 + ZO^2}$ ? $2\sqrt{3} = \sqrt{9+3}$ $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ $2\sqrt{3}$

след $\triangle BZO$ – прямоугол.: след $BO \perp ZR$. след $BO \perp \varphi$ след $BM \perp \varphi$.

$V = \frac{1}{3} MO \cdot S_{KK_1LL_1} = \frac{1}{3} \sqrt{3} \cdot 3 \cdot \left(\left(\frac{KK_1 + LL_1}{2}\right) \cdot RZ\right) = 1 \cdot \left(\frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}$

$= 1 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$ ~~Ответ: $12\sqrt{3}$.~~

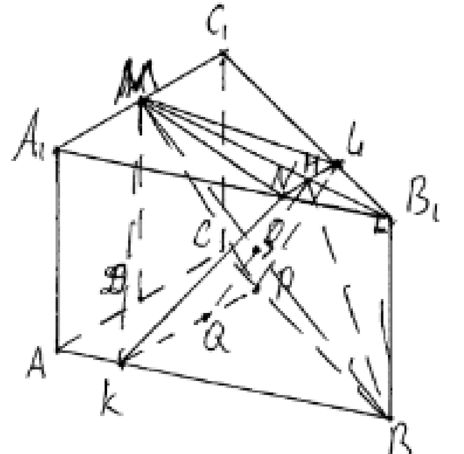
№ 17. Ответ: $6\sqrt{3}$.

***Комментарий.***

Доказательство утверждения в пункте *а* не обосновано. С использованием утверждения пункта *а* верно получен ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 14.5.2**




а) $BM$ перпендикулярна любой прямой, параллельной $AC$ и лежащей в плоскости $(ABC)$ по теореме о 3-х перпендикулярах $\Rightarrow BM \perp PK$

Проведём $QH$ ($QH \perp NL$ и $QH \perp KP$; $QH \cap BM = O$) $\triangle OHM \sim \triangle B_1BM$ по I призн. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MOH = \angle MB_1B = 90°$. Т.к. $BM \perp PK$ и $BM \perp QH \Rightarrow$

$\Rightarrow BM \perp \gamma$. ч.т.д.

б) (·)$O$ делит $BM$ пополам. Из $\triangle BMB_1$ по т. Пифагора $BM = 6 \Rightarrow BO = 3$. Из $\triangle B_1LH$ по т Пифагора $B_1H = \sqrt{3}$. Из $\triangle BHB_1$ по т Пифагора $BH = 2\sqrt{3}$. Из $\triangle BOH$ по т. Пифагора $OH = \sqrt{3}$. (·)$O$ делит $QH$ пополам $\Rightarrow QH = 2OH =$

$= 2\sqrt{3}$

$V_{MKPLN} = \frac{1}{3} \cdot MO\, S_{KPLN} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{2+4}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

($KPLN$ – р/б трапеция)

Ответ: $6\sqrt{3}$

***Комментарий.***

Утверждение в пункте *а* не доказано. В основе решения пункта *б* лежит необоснованное утверждение.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 14.5.3**

3) $\triangle BOK \sim \triangle BCA$ по 2-м углам ($\angle B$-общий, $\angle BKO = \angle BAC$ как соотв.) $k_1 = \frac{2}{3}$ 4) аналогично $\triangle B_1EL \sim \triangle B_1A_1C_1$ $k_2 = \frac{1}{3}$

5) из (3) и (4) $B_1O_1 = \frac{1}{3} B_1M$ $BO = \frac{2}{3} BF$

6) $O_1M = B_1M - B_1O_1 = B_1M - \frac{1}{3} B_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF$

7) $\triangle O_1HM = \triangle BOH$ по 2-м углам и стороне между ними ($\angle MO_1H = \angle HOB$ как нак.леж. $\angle O_1MB = \angle MBO$ как н.л. $O_1M = \frac{2}{3} B_1M = \frac{2}{3} BF = BO$)

Вычисление

а) 1) $B_1M = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 2) $O_1M = \frac{2}{3} \cdot 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

3) $O_1T \perp BF$ в $(BFM)$ 4) $TO = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} = \sqrt{3}$

5) по т. Пиф. $BM = \sqrt{9+27} = 6 \Rightarrow HM = BH = \frac{1}{2} \cdot BM = 3$.

6) $O_1O = \sqrt{9+3} = 2\sqrt{3} \Rightarrow O_1H = HO = \sqrt{3}$.

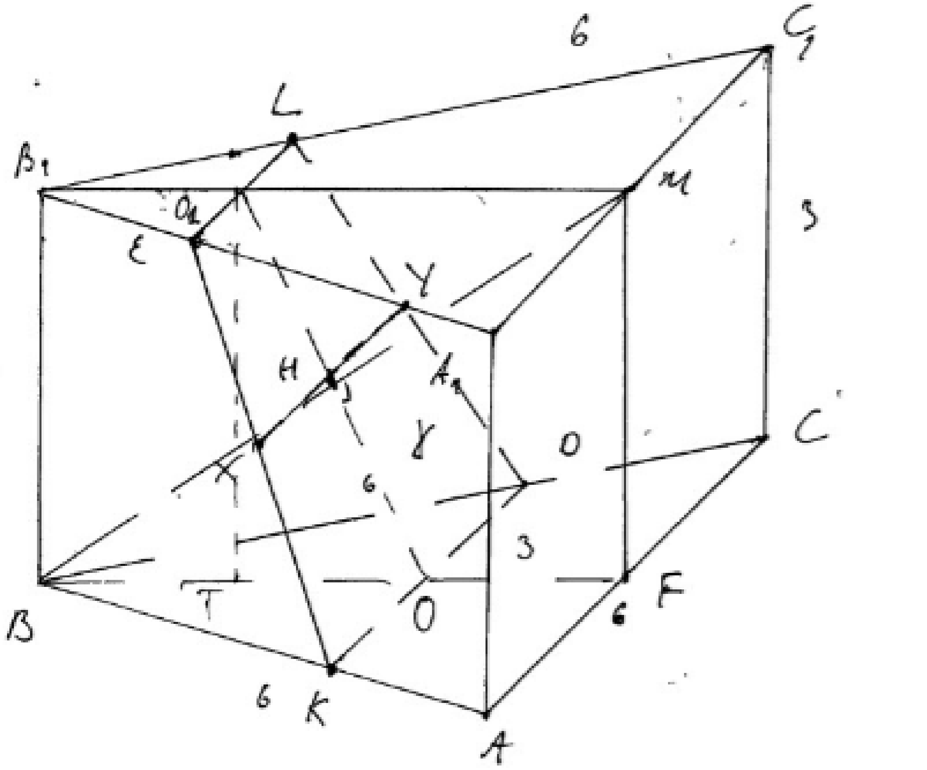
7) по теор. обратной теореме Пифагора т.к.

$O_1M^2 = O_1H^2 + HM^2 = 9 + 3 = 12$, то $\angle O_1HM = 90°$ и $O_1H \perp MH$.

8) $MF \perp AC$ (т.к призма правильная) и $MF \perp KD$ т.к. $KD \parallel AC$

9) т.к. $EL \parallel KD$, то $ELKD$ – трапеция

10) $XY$ – средняя линия тр. $ELKD$ и $O_1H = HO \Rightarrow H \in XY$ в плоскости $(EKD)$ 11) т.к $XY$ ср. линия то $XY \parallel KD$ См. на обороте.




12) ~~XY ∥ KD~~ $MF \perp KD$ и $MF \perp BF$, ~~тогда по т. ТТП~~ ~~KD ⊥ M~~ ~~…⊥~~ ~~$MH \perp KD$~~. тогда по признаку перп. пр. и пл. $KD \perp (BFM) \Rightarrow$ любая прямая в пл. $(BFM)$ перпендикулярна $KD \Rightarrow BM \perp KD$ и $BM \perp XY$

12.1) $(KDL) = \gamma$

13) т. к. $BM \perp XY$ и $BM \perp O_1O$, то по признаку перп. пр. и пл. $BM \perp (KDL)$ ~~ч.т.д.~~ и $BM \perp \gamma$ ч.т.д.

б) 1). $S_{LEKD} = \frac{1}{2}(EL + KD) \cdot O_1O$

2) $EL = A_1C_1 \cdot k_2 = 6 \cdot \frac{1}{3} = 2$

3) $KD = AC \cdot k_1 = 6 \cdot \frac{2}{3} = 4$

4) $S_{LEKD} = \frac{1}{2}(2+4) \cdot 2\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

5) $V_{MLEKD} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot h = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot MH = 6\sqrt{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot 3 = 6\sqrt{3}$

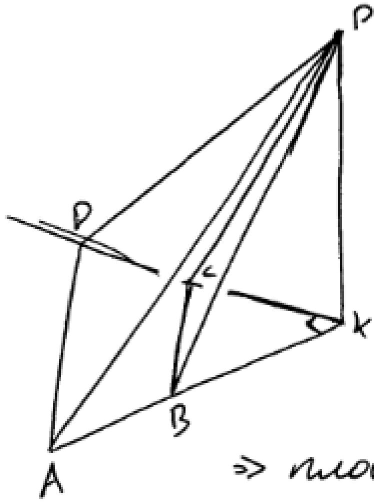
Ответ: $6\sqrt{3}$. куб.ед.

***Комментарий.***

Доказательство утверждения в пункте *а* содержит неточности. В решении пункта *б* обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 3 балла**.

**Пример 14.6.1**




а) $\angle BAD + \angle AD\cancel{K}C = 90^\circ \Rightarrow \angle DKB = 90^\circ$.

$\left.\begin{array}{l} \text{плоск.}(DKP) \perp \text{плоск}(ADK) \\ AK \perp DK \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow AK \perp \cancel{DP}K.\ \text{пл.}(DPK) \Rightarrow$

$AK \subset \text{пл.}(AKP) \Rightarrow \text{пл.}(AKP) \perp \text{пл.}(DPK) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ плоскости $PAB \perp$ пл-ти $PCD$.

б) $AB = BC = CD = 4$.

$AB = CD \Rightarrow$ трапеция - равн.бедр. $\Rightarrow \angle KAD = \angle ADK \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KBC = \angle BCK \Rightarrow BK = CK = \frac{CB}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

$AK \perp \text{пл.}(DPK) \Rightarrow AK \perp PK$.

$\left.\begin{array}{l} \text{пл.}(AKP) \perp \text{пл.}(ADK) \\ AK \perp DK \end{array}\right\} \Rightarrow DK \perp \text{пл.}(APK) \Rightarrow DK \perp PK$

$\left.\begin{array}{l} AK \perp PK \\ DK \perp PK \end{array}\right\} \Rightarrow PK \perp \text{пл.}(ADK). \Rightarrow PK$ - высота.

$V(KBCP) = \frac{1}{3} \cdot PK \cdot \frac{1}{2} \cdot CK \cdot BK = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} =$

$= 3 \cdot 4 = 12$.

Ответ: $V_{KBCP} = 12$.

***Комментарий.***

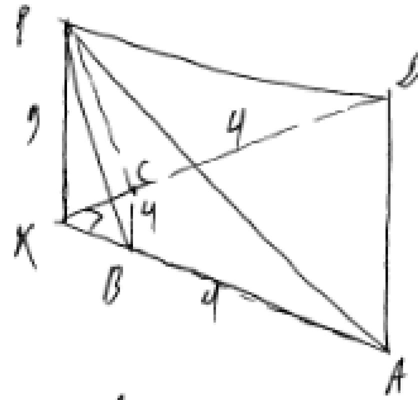
Утверждение в пункте *а* не доказано. В решении пункта *б* обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 14.6.2**

Дано:
$PABCD$ – 4уг. пирамида
$ABCD$ – трапеция ($AD \parallel BC$)
$\angle BAD + \angle ADC = 90°$
$AB \cap CD = K$

а) Док-ть: $PAB \perp PCD$
б) Найти: $V_{KBPC}$, если $AB = BC = CD = 4$, $PK = 9$




а) $PK$ – высота пирамиды
$\angle DKA = 180° - (\angle BAD + \angle ADC) = 90°$
Заметим, что $\angle DKA$ – линейный угол двугранного угла между плоскостями $PAB$ и $PCD$, т.к. $DK \perp PK$ и $AK \perp PK$.
$\angle DKA = 90° \Rightarrow PAB \perp PCD$, ч.т.д.

б) $AB = BC = CD = 4 \Rightarrow AD = 8$;
$S_{ABCD} = \frac{4+8}{2}\sqrt{12} = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$
$BC = \frac{AD}{2} \Rightarrow \Delta KCB \overset{\frac{1}{2}}{\sim} \Delta KDA \Rightarrow S_{KCB} = \frac{S_{AKD}}{4} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{KCB} = \frac{12\sqrt{3} + S_{KCB}}{4} \Leftrightarrow \frac{3S_{KCB}}{4} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S_{KCB} = 4\sqrt{3}$
$V_{PKCB} = \frac{1}{3} PK \cdot S_{KCB} = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4\sqrt{3} = 3 \cdot 4\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.

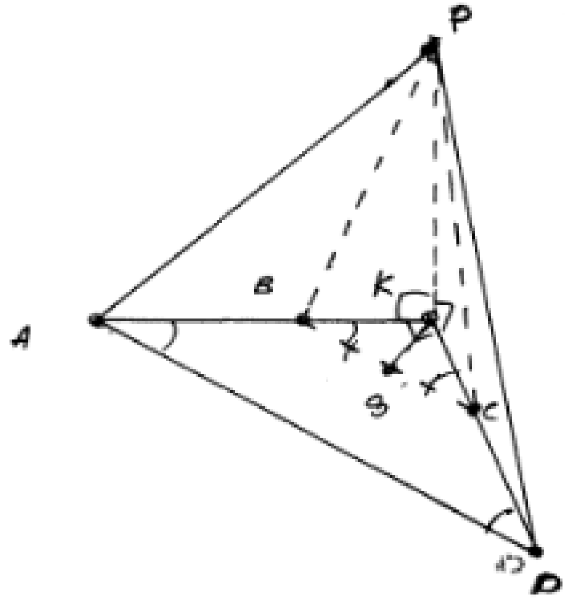
Ответ: $12\sqrt{3}$

***Комментарий.***

Утверждение в пункте *а* не доказано. В решении пункта *б* есть ошибочное утверждение, что привело к неверному ответу.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 14.6.3**




Дано:
$\angle BAD + \angle ADC = 90^\circ$
$(PAB) \perp (ADK)$
$(PCD) \perp (ADK)$
$ABCD$ – трапеция
$K = AB \cap CD$

а) Док-ть: $PAB \perp PCD$

б) $V_{KBCP} = ?$, если:

$AB = BC = CD = 4$
$PK = 9$

а) $BC \parallel AD$ (т.к $ABCD$ – трапеция) $\Rightarrow \begin{cases} \angle KBC = \angle KAD \\ \angle KCB = \angle KDA \end{cases}$

(как ~~внутр. одностор. и внутр.~~ ~~внешн~~ одностор внешн. и внутр. при секущей $AK$ и $KD$)

$\Rightarrow \angle KBC + \angle KCB = 90^\circ$ (по условию $\angle BAD + \angle ABC = 90^\circ$)

$\Rightarrow \angle BKC = 90^\circ$ $(180^\circ - \angle KBC - \angle KCB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ)$

Т.к ~~[illegible]~~ $PAB \perp ADK$ и $PKD \perp ADK$, то

$\angle AKP = \angle DKP = 90^\circ \Rightarrow AK \perp PK$ и $AK \perp DK \Rightarrow$

$\Rightarrow PAK \perp PKD$ ч.т.д.

б) $AB = CD \Rightarrow ABCD$ – равнобокая трапеция.
$\angle BAD + \angle CDA = 90^\circ$
$\angle BAD = \angle CDA$ (как углы при основании равнобок. трап.)
$\Rightarrow \angle KBC = \angle KCB = 45^\circ$

$\Rightarrow \Delta KBC$ – равнобедр. прямоугольный треуг.
Опустим из $K$ перпендикуляр на $BC$; $KS \perp BC$; $BS = BC$
(медиана = высоте в равнобедр $\Delta$) $\Rightarrow BS = 2$

$KB = \frac{BS}{\cos 45^\circ} = \frac{2}{\cos 45} = 2\sqrt{2} = KC \Rightarrow S_{\Delta BKC} = \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^2 = 4$

$V_{KBCP} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta BKC} \cdot KP = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 4 = 12$ Ответ: 12.

***Комментарий.***

Утверждение в пункте *а* не доказано. В решении пункта *б* обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

## 3. Критерии проверки и оценка решений задания 15

Задание № 15 — это неравенство: дробно-рациональное, логарифмическое или показательное.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением/ включением граничных точек,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

В первом случае выставления 1 балла допускаются только ошибки в строгости неравенства: «$<$» вместо «$\leq$» или наоборот. **Если в ответ включено значение переменной, при котором одна из частей неравенства не имеет смысла, то следует выставлять оценку «0 баллов».**

## Задача 15 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

Решите неравенство $\dfrac{\log_2(2-x)-\log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2+\log_2 x^4+1}\ge 0.$

**Решение.**

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{\log_2(2-x)-\log_2(x+1)}{\log_2^2 x^2+2\log_2 x^2+1}\ge 0;\ \frac{\log_2(2-x)-\log_2(x+1)}{\left(\log_2 x^2+1\right)^2}\ge 0.$$

Значение знаменателя $\left(\log_2 x^2+1\right)^2$ не определено при $x=0$, равно нулю при $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и при $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ и положительно при других значениях $x$.

При $x\ne-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x\ne 0$ и $x\ne\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ неравенство принимает вид:

$$\log_2(2-x)-\log_2(x+1)\ge 0;\ \log_2(x+1)\le\log_2(2-x);\ 0<x+1\le 2-x,$$

откуда $-1<x\le\dfrac{1}{2}$. Учитывая условия $x\ne-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $x\ne 0$ и $x\ne\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, получаем: $-1<x<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<x<0$; $0<x\le\dfrac{1}{2}$.

**Ответ:** $\left(-1;-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$; $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $\dfrac{1}{2}$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

**ИЛИ**

Решите неравенство $\dfrac{27^x-9^{x+1}+3^{x+3}-27}{50x^2-110x+60{,}5}\ge 0.$

**Решение.**

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{3^{3x}-3\cdot 3^{2x}\cdot 3+3\cdot 3^x\cdot 3^2-3^3}{0{,}5\left(100x^2-220x+121\right)}\ge 0;\ \frac{\left(3^x-3\right)^3}{(10x-11)^2}\ge 0.$$

Значение знаменателя $(10x-11)^2$ равно нулю при $x=1{,}1$ и положительно при других значениях $x$. При $x \neq 1{,}1$ неравенство принимает вид:

$$\left(3^x-3\right)^3 \geq 0;\ 3^x \geq 3,$$

откуда $x \geq 1$. Учитывая ограничение $x \neq 1{,}1$, получаем: $1 \leq x < 1{,}1$; $x > 1{,}1$.

**Ответ:** $[1; 1{,}1)$; $(1{,}1; +\infty)$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 15.1

Решите неравенство $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\ge 0.$

**Решение.**
Запишем исходное неравенство в виде:

$$\frac{(x+1)\left(x^2-1\right)}{\left(2^{x^2}-4\right)^2}\ge 0;\ \frac{(x+1)^2(x-1)}{\left(2^{x^2}-4\right)^2}\ge 0.$$

Значение знаменателя $\left(2^{x^2}-4\right)^2$ равно нулю при $x=-\sqrt{2}$ и при $x=\sqrt{2}$ и положительно при других значениях $x$. При $x\ne-\sqrt{2}$ и $x\ne\sqrt{2}$ неравенство принимает вид

$$(x+1)^2(x-1)\ge 0,$$

откуда $x=-1$; $x\ge 1$. Учитывая ограничение $x\ne\sqrt{2}$, получаем: $x=-1$; $1\le x<\sqrt{2}$; $x>\sqrt{2}$.

**Ответ:** $-1$; $\left[1;\sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек –1 и/или 1,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 15.2

Решите неравенство $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\ge\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}.$

**Решение.**
Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{t+9}{t-9}+\frac{t-9}{t+9}\ge\frac{12t+144}{t^2-81};\ \frac{t^2+18t+81}{(t-9)(t+9)}+\frac{t^2-18t+81}{(t-9)(t+9)}-\frac{12t+144}{(t-9)(t+9)}\ge 0;$$

$$\frac{2t^2-12t+18}{(t-9)(t+9)}\ge 0;\ \frac{2(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\ge 0,$$

откуда $t<-9$; $t=3$; $t>9$.

При $t<-9$ получим: $3^x<-9$, решений нет.

При $t=3$ получим: $3^x=3$, откуда $x=1$.

При $t>9$ получим: $3^x>9$, откуда $x>2$.
Решение исходного неравенства:

$$x=1;\ x>2.$$

**Ответ:** 1; $(2;+\infty)$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

### Задание 15.3

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\geq\log_2\left(x^2-1\right)-5.$

**Решение.**

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_8(x-1)^3\geq\log_2\left(x^2-1\right)-5;\ \log_2(x-1)\geq\log_2(x-1)+\log_2(x+1)-5.$$

Левая часть неравенства определена при $x>1$.

При $x>1$ неравенство принимает вид:

$$\log_2(x+1)\leq5;\ 0<x+1\leq32,$$

откуда $-1<x\leq31$. Учитывая ограничение $x>1$, получаем: $1<x\leq31$.

**Ответ:** $(1;31]$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 31,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

### Задание 15.4

Решите неравенство $\dfrac{4}{3^x-27} \ge \dfrac{1}{3^x-9}$.

**Решение.**
Пусть $t=3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$\frac{4}{t-27} \ge \frac{1}{t-9};\ \frac{3t-9}{(t-9)(t-27)} \ge 0;\ \frac{3(t-3)}{(t-9)(t-27)} \ge 0,$$

откуда $3 \le t < 9$; $t > 27$.

При $3 \le t < 9$ получим: $3 \le 3^x < 9$, откуда $1 \le x < 2$.

При $t > 27$ получим: $3^x > 27$, откуда $x > 3$.

Решение исходного неравенства: $1 \le x < 2$; $x > 3$.

**Ответ:** $[1; 2)$; $(3; +\infty)$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | 2 |

### Задание 15.5

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12} \le \dfrac{1}{2^x-4}$.

**Решение.**
Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t-6-\frac{9t-37}{t^2-7t+12} \le \frac{1}{t-4};\ t-6-\frac{9t-37}{(t-3)(t-4)}-\frac{t-3}{(t-3)(t-4)} \le 0;$$

$$t-6-\frac{10}{t-3} \le 0,\ \text{где } t \ne 4;\ \frac{(t-1)(t-8)}{t-3} \le 0,\ \text{где } t \ne 4,$$

откуда $t \le 1$; $3 < t < 4$; $4 < t \le 8$.

При $t \le 1$ получим: $2^x \le 1$, откуда $x \le 0$.

При $3 < t < 4$ получим: $3 < 2^x < 4$, откуда $\log_2 3 < x < 2$.

При $4 < t \le 8$ получим: $4 < 2^x \le 8$, откуда $2 < x \le 3$.

Решение исходного неравенства:

$$x \le 0;\ \log_2 3 < x < 2;\ 2 < x \le 3.$$

**Ответ:** $(-\infty; 0]$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек 0 и/или 3,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

### Задание 15.6

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3\left(x^2-3x+2\right)-\log_3(x+4)$.

**Решение.**

Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_3\left(5(1-x)\right) \geq \log_3\left((2-x)(1-x)\right)-\log_3(x+4);$$

$$\log_3 5+\log_3(1-x) \geq \log_3(2-x)+\log_3(1-x)-\log_3(x+4).$$

Неравенство определено при $-4<x<1$, поэтому при $-4<x<1$ неравенство принимает вид:

$$5 \geq \frac{2-x}{x+4};\ \frac{6x+18}{x+4} \geq 0,$$

откуда $x<-4$; $x \geq -3$. Учитывая ограничение $-4<x<1$, получаем: $-3 \leq x<1$.

**Ответ:** $[-3;1)$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки $-3$,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Примеры оценивания решений задания 15

**Пример 15.1.1**

Решите неравенство $\frac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\ge 0.$

**Ответ:** $-1$; $\left[1;\sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

№ 15

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\ge 0 \Rightarrow \frac{x^2(x+1)-(x+1)}{2^{2x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\ge 0$$

$$\frac{(x+1)(x^2-1)}{(2^{x^2}-4)^2}\ge 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2(x-1)}{(2^{x^2}-2^2)^2}\ge 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(x+1)^2(x-1)}{((2-1)(x^2-2))^2}\ge 0 \Rightarrow \frac{(x+1)^2(x-1)}{(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2}\ge 0$$


$$\left[\begin{array}{l} 1\le x<\sqrt{2} \\ x>\sqrt{2} \\ x=-1 \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1\}\cup[1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.1.2**

Решите неравенство $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\ge 0.$

**Ответ:** $-1$; $\left[1;\sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\geqslant 0$$

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{\left(2^{x^2}-4\right)^2}\geqslant 0$$

заметим, что $\left(2^{x^2}-4\right)^2\geqslant 0$ – всегда, тогда, т.к. $\left(2^{x^2}-4\right)^2$ стоит в знаменателе, то оно не должно быть равно 0 $\Rightarrow 2^{x^2}-4\neq 0 \Rightarrow 2^{x^2}\neq 4 \Rightarrow 2^{x^2}\neq 2^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow x^2\neq 2 \Rightarrow x\neq\pm\sqrt{2}$. Тогда решим не-во, с учетом, что $\left(2^{x^2}-4\right)^2\neq 0$ и $>0$:

$$x^3+x^2-x-1\geqslant 0$$
$$(x-1)(x^2+2x+1)\geqslant 0$$
$$(x-1)(x+1)^2\geqslant 0$$


$x\in\{-1\}\cup[1;+\infty)$

с учетом того, что знаменатель $\neq\pm\sqrt{2}$:


$x\in\{-1\}\cup[1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$

Отв: $x\in\{-1\}\cup[1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.1.3**

Решите неравенство $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\ge 0.$

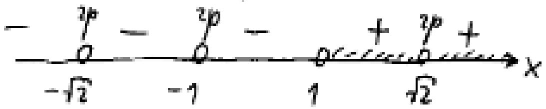
**Ответ:** $-1$; $\left[1;\sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

15) $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\,2^{x^2}+16}>0$ (*) $x\ne\pm\sqrt{2}$

$\dfrac{x^2(x+1)-(x+1)}{\left(2^{x^2}-4\right)^2}>0$

$\dfrac{(x^2-1)(x+1)}{(x^2-2)^2}>0$

$\dfrac{(x-1)(x+1)^2}{(x-\sqrt{2})^2(x+\sqrt{2})^2}>0$




Ответ: $(1;\sqrt{2})\cup(\sqrt{2};+\infty)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точек –1 и 1.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 15.1.4**

Решите неравенство $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\geq 0.$

**Ответ:** $-1$; $\left[1;\sqrt{2}\right)$; $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$.

№15

$$\frac{x^3+x^2-x-1}{4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16}\geqslant 0$$

$$\frac{x^2(x+1)-(x+1)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\geqslant 0$$

$$\frac{(x^2-1)(x+1)}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\geqslant 0$$

$$\frac{(x-1)(x+1)^2}{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})}\geqslant 0$$

$4^{x^2}-8\cdot 2^{x^2}+16=0$

$2^{x^2}=t,\ t>0$

$t^2-8t+16=0$

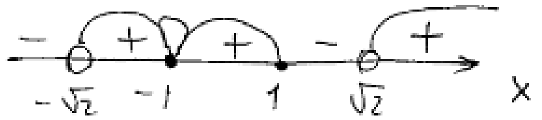
$(t-4)^2=0$

$t=4$

$2^{x^2}=4$

$x^2=2$

$\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{2}\\ x=-\sqrt{2}\end{array}\right.$




Ответ: $(-\sqrt{2};1]\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

***Комментарий.***

Нарушена равносильность при переходе ко второму неравенству.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 15.2.1**

Решите неравенство $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\ge\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$.

**Ответ:** $1;\ \left(2;+\infty\right)$.

№15.

$$\frac{3^x+9}{3^x-9}+\frac{3^x-9}{3^x+9}\ge\frac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$$

$t=3^x \quad t>0$

$$\frac{t+9}{t-9}+\frac{t-9}{t+9}-\frac{12t+144}{(t-9)(t+9)}\ge 0$$

$$\frac{t^2+18t+81+t^2-18t+81-(12t+144)}{(t-9)(t+9)}\ge 0$$

$$\frac{t^2-6t+9}{(t-9)(t+9)}\ge 0$$

$$\frac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\ge 0$$

$-9 \quad 0 \quad - \quad 3 \quad - \quad 9 \quad + \quad t$

$3^x>9 \qquad 3^x=3$

$x>2 \qquad x=1$

Ответ: $x=1$; $x\in(2;+\infty)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.2.2**

Решите неравенство $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\geq\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$.

**Ответ:** $1;\ (2;+\infty)$.

15) $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\geqslant\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}\Leftrightarrow\dfrac{(3^x+9)^2+(3^x-9)^2}{(3^x+9)(3^x-9)}-\dfrac{12\cdot 3^x+144}{(3^x+9)(3^x-9)}\geqslant 0\Leftrightarrow$ $t=3^x$, $t\in(0;+\infty)$

$\dfrac{t^2+\cancel{18t}+81+t^2-\cancel{18t}+81-12t-144}{(t+9)(t-9)}\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{2t^2-12t+18}{(t+9)(t-9)}\geqslant 0\Leftrightarrow$

$\dfrac{t^2-2\cdot 3t+3^2}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0\Leftrightarrow\dfrac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\geqslant 0$

$\left[\begin{array}{l}t>9\\ t=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3^x>9\\ 3^x=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\ x=1\end{array}\right.$

Ответ: $\{1\}\cup(2;+\infty)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.2.3**

Решите неравенство $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\ge\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$.

**Ответ:** $1;\ (2;+\infty)$.

$\boxed{\text{Задание 15}}$

$$\frac{3^x+9}{3^x-9}+\frac{3^x-9}{3^x+9}\geqslant\frac{4\cdot3^{x+1}+144}{9^x-81}$$

ОДЗ: $\begin{cases}3^x-9\neq0\\3^x+9\neq0\\9^x-81\neq0\end{cases}$

$\boxed{3^x=t}$ ← Замена

$t\geqslant0$

$9^x=3^{2x}=3^x\cdot3^x$

$3^{x+1}=3^x\cdot3$

$\Rightarrow\begin{cases}3^x\neq9\\3^x\neq-9\\9^x\neq81\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq2\\x\neq2\end{cases}$

$$\frac{(t+9)}{(t-9)}+\frac{(t-9)}{(t+9)}\geqslant\frac{4\cdot3\cdot t+144}{t^2-81}$$

$$\frac{(t+9)^2+(t-9)^2-12t-144}{t^2-81}\geqslant0$$

$$\frac{t^2+18t+81+t^2-18t+81-12t-144}{(t-9)(t+9)}\geqslant0$$

$$\frac{2t^2-12t+18}{(t-9)(t+9)}\geqslant0\qquad |:2$$

$$\frac{t^2-6t+9}{(t-9)(t+9)}\geqslant0$$

$$\frac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\geqslant0$$


$\Rightarrow t>9$

Обратная замена

$3^x>9$

$3^x>3^2$ или $3^x>9$

$x>2$ $=$ $\log_3 9<x$

$2<x$

$\boxed{\text{Ответ: } x\in(2;+\infty)}$

***Комментарий.***

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 1.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 15.2.4**

Решите неравенство $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\geq\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$.

**Ответ:** 1; $(2;+\infty)$.

№15. $\dfrac{3^x+9}{3^x-9}+\dfrac{3^x-9}{3^x+9}\geq\dfrac{4\cdot 3^{x+1}+144}{9^x-81}$

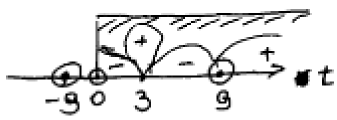
$\exists\ t=3^x$, тогда $t^2=9^x$, причём $t>0$:

$\dfrac{t+9}{t-9}+\dfrac{t-9}{t+9}\geq\dfrac{12t+144}{t^2-81}$

$\dfrac{t^2+81+18t+t^2-18t+81-12t-144}{(t-9)(t+9)}\geq 0$

$\dfrac{2t^2-12t+162-144}{(t-9)(t+9)}\geq 0 \quad \Big|:2$

$\dfrac{t^2-6t+9}{(t-9)(t+9)}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}\geq 0$



$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t>9 \\ t=3 \end{array}\right.$

обр. замена: $\left[\begin{array}{l} 3^x=3 \\ 3^x>9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x>2 \end{array}\right. \Rightarrow x\in\{1\}\cup(2;+\infty)$.

Ответ: $x\in\{1\}\cup(2;+\infty)$.

***Комментарий.***

В работе допущена ошибка при решении дробно-рационального неравенства относительно $t$: на координатной прямой в точке $t=3$ (в «петле» стоит знак «+» – очевидно, попытка объяснить чередование знаков), то есть участник экзамена утверждает, что дробное выражение $\dfrac{(t-3)^2}{(t-9)(t+9)}$ принимает положительное значение.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 15.3.1**

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\geq \log_2\left(x^2-1\right)-5.$

**Ответ:** $(1;31]$.

$\log_8(x^3-3x^2+3x-1)\geq\log_2(x^2-1)-5$

По формуле куба разности:

$x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$

$\log_8(x-1)^3\geq\log_2(x^2-1)-5$

$\frac{1}{3}\log_2(x-1)^3-\log_2(x^2-1)\geq-5$

$\log_2(x-1)-\log_2(x^2-1)\geq-5$

$\log_2\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)\geq-5\cdot\log_2 2$

$\log_2\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)\geq\log_2\frac{1}{32}$

$\frac{x-1}{x^2-1}\geq\frac{1}{32}$

$\frac{x-1}{x^2-1}^{\backslash 32}-\frac{1}{32}^{\backslash x^2-1}\geq0$

$\frac{32(x-1)-(x^2-1)}{32(x^2-1)}\geq0$

$\frac{32(x-1)-(x-1)(x+1)}{32(x^2-1)}\geq0$

$\frac{(x-1)(32-x-1)}{32(x^2-1)}\geq0$

$\frac{(x-1)(31-x)}{32(x^2-1)}\geq0$

$\frac{(x-1)(31-x)}{32(x^2-1)}=0$

$(x-1)(31-x)=0$

$x-1=0 \qquad 31-x=0$

$x=1 \qquad x=31$

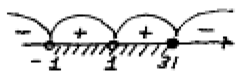
$32(x^2-1)=0$

$x^2-1=0$

$(x-1)(x+1)=0$

$x-1=0 \qquad x+1=0$

$x=1 \qquad x=-1$



$x\in(-1;1)\cup(1;31]$

Совмещаем ответ с ОДЗ:

$x\in(1;31]$

Ответ. $x\in(1;31]$

ОДЗ. 1) $x^3-3x^2+3x-1>0$

$(x-1)(x^2-2x+1)>0$

$(x-1)(x^2-2x+1)=0$

$x-1=0 \qquad x^2-2x+1=0$

$x=1 \qquad D=4-4=0$

$x_{1,2}=\frac{2}{2}=1$

$x\in(1;+\infty)$

2) $x^2-1>0$

$(x-1)(x+1)>0$

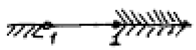
$(x-1)(x+1)=0$

$x-1=0 \qquad x+1=0$

$x=1 \qquad x=-1$

$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Совмещаем ОДЗ:



$x\in(1;+\infty)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.3.2**

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\ge\log_2\left(x^2-1\right)-5.$

**Ответ:** $(1;31]$.

$$\log_8(x^3-3x^2+3x-1)\geqslant\log_2(x^2-1)-5$$

$$\log_{2^3}(x-1)^3\geqslant\log_2(x^2-1)-\log_2 2^5$$

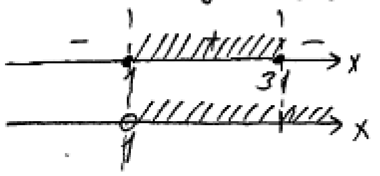
$$\log_2(x-1)\geqslant\log_2\frac{(x+1)(x-1)}{32}$$

$$x-1\geqslant\frac{(x+1)(x-1)}{32}\qquad x-1-\frac{(x+1)(x-1)}{32}\geqslant 0$$

$$\frac{32(x-1)-(x+1)(x-1)}{32}\geqslant 0\qquad\frac{(x-1)(32-x-1)}{32}\geqslant 0$$

$$(x-1)(31-x)\geqslant 0$$

Учитывая ОДЗ:




$x\in(1;31]$

О: $x\in(1;31]$

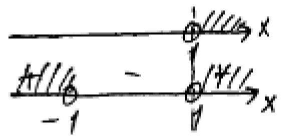
ОДЗ: $\begin{cases}x^3-3x^2+3x-1>0\\x^2-1>0\end{cases}$

$\begin{cases}(x-1)(x^2-2x+1)>0\\(x+1)(x-1)>0\end{cases}$

$\begin{cases}(x-1)(x-1)^2>0\\(x+1)(x-1)>0\end{cases}$

$\begin{cases}(x-1)^3>0\\(x+1)(x-1)>0\end{cases}$

$\begin{cases}x>1\\(x+1)(x-1)>0\end{cases}$




$x\in(1;+\infty)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.3.3**

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\ge\log_2\left(x^2-1\right)-5.$

**Ответ:** $(1;31]$.

№15

$\log_8(x^3-3x^2+3x-1)\geqslant\log_2(x^2-1)-5$

$\log_{2^3}(x-1)^3-\log_2(x^2-1)+5\geqslant0$

$\frac{1}{3}\log_2(x-1)^3-\log_2(x^2-1)+5\geqslant0$

$\log_2\sqrt[3]{(x-1)^3}-\log_2(x^2-1)+\log_2 32\geqslant0$

$\log_2(x-1)-\log_2(x^2-1)+\log_2 32\geqslant0$

$\log_2\frac{(x-1)\cdot32}{(x^2-1)}\geqslant0$

используем метод рационализации:

$(2-1)\left(\frac{(x-1)\cdot32}{x^2-1}-1\right)\geqslant0$

$1\cdot\frac{32x-32-x^2+1}{x^2-1}\geqslant0\;\Big|\cdot(-1)$

$\frac{x^2-32x+31}{(x-1)(x+1)}\leqslant0$

решим отдельно числитель:

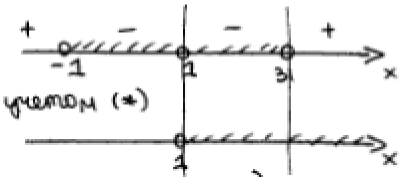
$x^2-32x+31=0$

по т. Виета:

$\begin{cases}x_1\cdot x_2=31\\x_1+x_2=32\end{cases}$

отсюда: $x_1=31$, $x_2=1$

$\frac{(x-31)(x-1)}{(x-1)(x+1)}\leqslant0$



$x\in(1;31)$

Ответ: $x\in(1;31)$

$*\begin{cases}① & x^2-1>0\\② & x^3-3x^2+3x-1>0\end{cases}$

① $x^2-1>0$

$(x-1)(x+1)>0$

$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

② $x^3-3x^2+3x-1>0$

$$\begin{array}{r|l} x^3-3x^2+3x-1 & x-1\\ \hline x^3-x^2 & x^2-2x+1\\ -2x^2+3x & \\ -2x^2+2x & \\ x-1 & \\ x-1 & \\ 0 & \end{array}$$

$(x-1)(x^2-2x+1)>0$

$(x-1)(x-1)^2>0$

$(x-1)^3>0$

$x\in(1;+\infty)$

Отсюда: $*\;x\in(1;+\infty)$

объединив оба неравенства получаем:

***Комментарий.***

Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 31.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 15.3.4**

Решите неравенство $\log_8\left(x^3-3x^2+3x-1\right)\geq\log_2\left(x^2-1\right)-5$.

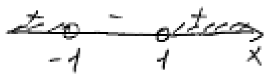
**Ответ:** $(1;31]$.

$$\log_8(x^3-3x^2+3x-1)\geqslant\log_2(x^2-1)-5$$

$$\log_8(x-1)^3\geqslant\log_2(x^2-1)-5$$

О.Д.З.

$$\begin{cases}(x-1)^3>0\\(x^2-1)>0\end{cases}\qquad\begin{cases}x>1\\x^2>1\end{cases}$$



$$\begin{cases}x>1\\x<-1\end{cases}$$

$$\log_{2^3}(x-1)^3\geqslant\log_2(x^2-1)-\log_2 32$$

$$\frac{3}{3}\log_2(x-1)\geqslant\log_2(x^2-1)-\log_2 32$$

$$\log_2(x-1)+\log_2 32\geqslant\log_2(x^2-1)$$

$$\log_2((x-1)\cdot 32)\geqslant\log_2(x^2-1)$$

$2>1\Rightarrow$ знак неравенства не меняется

$$(x-1)\cdot 32\geqslant x^2-1$$

$$32x-32\geqslant x^2-1$$

$$-x^2+32x-32+1\geqslant 0$$

$$-x^2+32x-31\geqslant 0\quad|\cdot(-1)$$

$$x^2-32x+31\leqslant 0$$

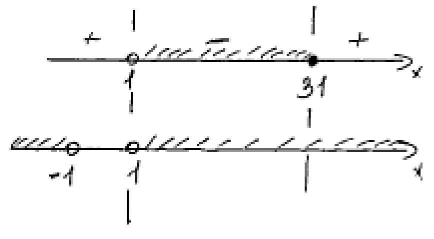
$$x^2-32x+31=0$$

По теореме Виета: $x_1\cdot x_2=31$

$x_1+x_2=32$

$x_1=31$

$x_2=1$



Ответ: $(1;31]$

***Комментарий.***

Неверно решена система неравенств, названная О.Д.З.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 15.4.1**

Решите неравенство $\dfrac{4}{3^x-27} \ge \dfrac{1}{3^x-9}$.

**Ответ:** $[1;2)$; $(3;+\infty)$.

$$\frac{4}{3^x-27} \geqslant \frac{1}{3^x-9}$$

Неравенство определено, если $x \neq 3$ и $x \neq 2$

Пусть $3^x = t$, запишем:

$$\frac{4}{t-27} \geqslant \frac{1}{t-9}$$

$$\frac{4}{t-27} - \frac{1}{t-9} \geqslant 0$$

$$\frac{4t-36-t+27}{(t-27)(t-9)} \geqslant 0$$

$$\frac{3t-9}{(t-27)(t-9)} \geqslant 0$$

$t = 3$ $\quad t \neq 27$ $\quad t \neq 9$


$3 \le t \le 9$ $\qquad t \geqslant 27$

$3 \le 3^x \le 9$ $\qquad 3^x \geqslant 27$

$1 \le x \le 2$ $\qquad x \geqslant 3$

Так как $x \neq 3$ и $x \neq 2$, получим: $x \in [1;2) \cup (3;+\infty)$.

Ответ: $[1;2) \cup (3;+\infty)$.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.4.2**

Решите неравенство $\dfrac{4}{3^x-27} \geq \dfrac{1}{3^x-9}$.

**Ответ:** $[1;2)$; $(3;+\infty)$.

$$\frac{4}{3^x-27} \geq \frac{1}{3^x-9}$$

$3^x-27 \neq 0$, $x=3$

$3^x-9 \neq 0$, $x \neq 2$

Замена

$3^x = t$

$$\frac{4}{t-27} \geq \frac{1}{t-9}$$

$$\frac{4t-36-t+27}{(t-27)(t-9)} \geq 0$$

$$\frac{3t-9}{(t-27)(t-9)} \geq 0$$

$$\frac{t-3}{(t-27)(t-9)} \geq 0$$

$$\begin{cases} x=1 \\ \left[\begin{array}{l} x \neq 3 \\ x \neq 2 \end{array}\right. \end{cases}$$

Возврат к замене

| | | |
|---|---|---|
| $t=3$ | $t=27$ | $t=9$ |
| $3^x=3$ | $3^x=27$ | $3^x=9$ |
| $x=1$ | $x=3$ | $x=2$ |


Ответ: $[1;2) \cup (3;+\infty)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.4.3**

Решите неравенство $\dfrac{4}{3^x-27} \geq \dfrac{1}{3^x-9}$.

**Ответ:** $[1;2)$; $(3;+\infty)$.

15) $\dfrac{4}{3^x-27} \geqslant \dfrac{1}{3^x-9}$

$\begin{cases} 3^x-27 \neq 0 \\ 3^x-9 \neq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \neq 3 \\ x \neq 2 \end{cases}$

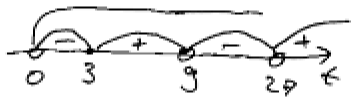
$3^x = t$, $t > 0$

$\dfrac{4}{t-27} \geqslant \dfrac{1}{t-9}$ $\begin{cases} t \neq 27 \\ t \neq 9 \end{cases}$

$\dfrac{4}{t-27} - \dfrac{1}{t-9} \geqslant 0$

$\dfrac{4t-36-t+27}{(t-27)(t-9)} \geqslant 0$

$\dfrac{3(t-3)}{(t-9)(t-27)} \geqslant 0$




$3 \leq t < 9$ $27 < t$

$3 \leq 3^x < 9$ $27 < 3^x$

$1 \leq x < 2$ $3>1 \Rightarrow$ ф-я $3^x$ возр-т $x > 3$ $3>1 \Rightarrow$ ф-я $3^x$ возр-т

$x \in [1;2) \cup (3;+\infty)$

Ответ: $x \in [1;2) \cup (3;+\infty)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.4.4**

Решите неравенство $\dfrac{4}{3^x-27} \ge \dfrac{1}{3^x-9}$.

**Ответ:** $[1;2)$; $(3;+\infty)$.

$\dfrac{4}{3^x-24} \ge \dfrac{1}{3^x-9}$   О.Д.З. $x \ne 3$, $x \ne 2$

Замена $3^x=t$

$\dfrac{4^{\backslash t-9}}{t-24} \ge \dfrac{1^{\backslash t-24}}{t-9}$

$\dfrac{4t-36-t+24}{(t-24)(t-9)} \ge 0$

$\dfrac{3t-9}{(t-24)(t-9} \ge 0$   О.Д.З. $t \ne 24$, $t \ne 9$

$3t-9 \ge 0$

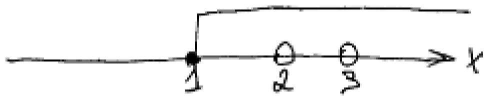
$3t \ge 9$

$t \ge 3$


Обр. з.   С учётом О.Д.З.

$3^x \ge 3$

$x \ge 1$




$x \in [1;2) \cup (2;3) \cup (3;+\infty)$

Ответ $x \in [1;2) \cup (2;3) \cup (3;+\infty)$

***Комментарий.***

Неверно решено дробно-рациональное неравенство относительно новой переменной.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 15.5.1**

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

**Ответ:** $(-\infty;0]$; $(\log_2 3;2)$; $(2;3]$.

$2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4};$

ОДЗ: $x\ne 2$
$x\ne\log_2 3$
$4^x-7\cdot 2^x+12\ne 0$
$(2^x-3)(2^x-4)\ne 0$
$t>0;$

$2^x=t;$

$t-6-\dfrac{9t-37}{t^2-7t+12}\le\dfrac{1}{t-4};$

$t-6-\dfrac{9t-37}{(t-3)(t-4)}\le\dfrac{1}{t-4};$

$t-6-\dfrac{9t-37+t-3}{(t-3)(t-4)}\le 0;$

$t-6-\dfrac{10(t-4)}{(t-3)(t-4)}\le 0;$

$\dfrac{(t-4)((t-6)(t-3)-10)}{(t-3)(t-4)}\le 0;$

$\dfrac{(t-4)(t^2-9t+8)}{(t-3)(t-4)}\le 0;$

$\dfrac{(t-4)(t-1)(t-8)}{(t-3)(t-4)}\le 0;$


$0<2^x\le 1$ $\quad 3<2^x<4$ $\quad 4<2^x\le 8$

$x\le 0;$ $\quad\begin{cases}x>\log_2 3;\\ x<2;\end{cases}$ $\quad\begin{cases}x>2;\\ x\le 3;\end{cases}$

Ответ: $(-\infty;0]\cup(\log_2 3;2)\cup(2;3]$.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.5.2**

Решите неравенство $2^x - 6 - \dfrac{9\cdot 2^x - 37}{4^x - 7\cdot 2^x + 12} \le \dfrac{1}{2^x - 4}$.

**Ответ:** $(-\infty; 0]$; $(\log_2 3; 2)$; $(2; 3]$.

$$2^x - 6 - \frac{9\cdot 2^x - 37}{4^x - 7\cdot 2^x + 12} \le \frac{1}{2^x - 4}$$

Пусть $2^x = t$ Тогда

$$t - 6 - \frac{9t - 37}{(t-4)(t-3)} \le \frac{1}{t-4}$$

ОДЗ $\begin{cases} t \ne 4 \\ t \ne 3 \end{cases}$ $\begin{cases} 2^x \ne 4 \\ 2^x \ne 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x \ne 2 \\ x \ne \log_2 3 \end{cases}$

$$\frac{t^3 - 13t^2 + 54t - 72 - 9t + 37 - t + 3}{(t-4)(t-3)} \le 0$$

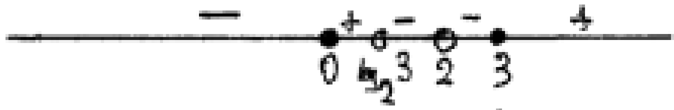
$$\frac{t^3 - 13t^2 + 44t - 32}{(t-4)(t-3)} \le 0$$

$$\frac{(t-4)(t^2 - 9t + 8)}{(t-4)(t-3)} \le 0$$

$$\frac{(t-1)(t-8)}{t-3} \le 0$$

Обратно

$$\frac{(2^x-1)(2^x-8)}{2^x-3} \le 0$$




Ответ: $(-\infty; 0] \cup (\log_2 3; 2) \cup (2; 3)$

***Комментарий.***

В решении содержится запись «ОДЗ», которая может трактоваться по-разному. Получен неверный ответ, но он отличается от верного только исключением точки 3.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 15.5.3**

Решите неравенство $2^x-6-\dfrac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\dfrac{1}{2^x-4}$.

**Ответ:** $(-\infty;0]$; $(\log_2 3;2)$; $(2;3]$.

$$2^x-6-\frac{9\cdot 2^x-37}{4^x-7\cdot 2^x+12}\le\frac{1}{2^x-4}$$

Пусть $2^x=t$, то $t-6-\dfrac{9t-37}{t^2-7t+12}-\dfrac{1}{t-4}\le 0$

$t^2-7t+12=0$ $\quad (t-3)(t-4)$ $\quad t-3$

$D=49-4\cdot 12=1$ $\quad t-6-\dfrac{9t-37}{(t-3)(t-4)}-\dfrac{1}{t-4}\le 0$

$t_1=\dfrac{7-1}{2}=3$

$t_2=\dfrac{7+1}{2}=4$ $\quad \dfrac{(t^2-7t+12)(t-6)-(9t-37)-(t-3)}{(t-3)(t-4)}\le 0$

$(t-3)(t-4)=t^2-7t+12$

$(t^3-7t^2+12t-6t^2+42t-72)-(9t-37)-(t-3)\le 0$

$t^3-13t^2+54t-72-9t+37-t+3\le 0$

$t^3-13t^2+44t-32\le 0$

Схема Горнера: Пусть $t_1=1$, то

$1-13+44-32=45-45=0$ – подходит

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 1 | −13 | 44 | −32 |
| 1 | 1 | −12 | 32 | 0 |

$(t-1)(t^2-12t+32)\le 0$

$t^2-12t+32=0$

$D=144-4\cdot 32=144-128=16$

$t_2=\dfrac{12-4}{2}=4$ $\quad t_3=\dfrac{12+4}{2}=8$

$t_1=1$ $\quad t_2=4$ $\quad t_3=8$

$2^x=1$ $\quad 2^x=4$ $\quad 2^x=8$

$x_1=0$ $\quad x_2=2$ $\quad x_3=3$

$x\in(-\infty;0]\cup[2;3]$


Ответ: $(-\infty;0]\cup[2;3]$

***Комментарий.***

В решении неравенства допущена ошибка – неравносильный переход.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 15.6.1**

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$.

**Ответ:** $[-3;1)$.

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$$

ОДЗ:

$5(1-x)>0$

$x^2-3x+2>0 \Rightarrow (x-2)(x-1)>0$

$x>-4$

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3\frac{x^2-3x+2}{x+4}$$

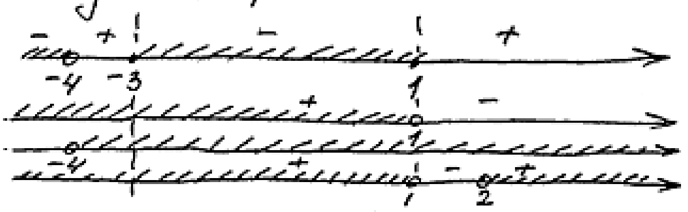
$3>1 \Rightarrow$ функция монотонно возрастает $\Rightarrow$

$$\Rightarrow 5-5x \geq \frac{x^2-3x+2}{x+4} \Rightarrow \frac{(5-5x)(x+4)-x^2+3x-2}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{5x+20-5x^2-20x-x^2+3x-2}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{-6x^2-12x+18}{x+4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-3}{x+4} \leq 0 \Rightarrow \frac{(x+3)(x-1)}{x+4} \leq 0$$

~~метод интервалов~~




$\Rightarrow x \in [-3;1)$

Ответ: $[-3;1)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 15.6.2**

Решите неравенство $\log_3(5-5x) \ge \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$.

**Ответ:** $[-3;1)$.

$\log_3(5-5x) \geqslant \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$

ОДЗ. $\begin{cases} 5-5x>0 \\ x^2-3x+2>0 \\ x+4>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<1 \\ x<1;\ x>2 \\ x>-4. \end{cases}$

$\Rightarrow x \in (-4;1);\ (2;+\infty)$

$\log_3(5-5x) + \log_3(x+4) \geqslant \log_3(x^2-3x+2)$

$\log_3(5-5x)\cdot(x+4) \geqslant \log_3(x^2-3x+2)$

$\log_3$ – монотонно возрастающая функция $\Rightarrow$ знак неравенства не меняем.

$(5-5x)\cdot(x+4) \geqslant x^2-3x+2$

$-6x^2-12x+18 \geqslant 0 \quad |:-6$

$x^2+2x-3 \leqslant 0 \Rightarrow (x-1)(x+3) \leqslant 0$


$\begin{cases} x \in [-3;1]. \\ x \in (-4;1);\ (2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-3;1)$

Ответ; $[-3;1)$

***Комментарий.***

Система неравенств в ОДЗ решена неверно (не вычислительная ошибка). Также неверно решено логарифмическое неравенство.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

# 4. Критерии проверки и оценка решений задания 16

Задание № 16 — это текстовая задача с экономическим содержанием.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

Подробнее: 1 балл можно выставлять в тех случаях, когда сюжетное условие задачи верно сведено к решению математической (арифметической, алгебраической, функциональной, геометрической) задачи, но именно к решению, а не к отдельному равенству, набору уравнений, уравнению, задающему функцию, и т.п. Предъявленный текст должен включать описание того, как построена модель.

Следует подчеркнуть, что один и тот же сюжет может быть успешно сведён к различным математическим моделям и доведён до верного ответа. По этой причине в критериях оценивания нет жёсткого упоминания какой-либо конкретной (арифметической, алгебраической, геометрической, функциональной) модели.

### Задача 16 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на $r$ % по сравнению с концом предыдущего года ($r$ — целое число);

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2030 года долг должен составить 200 тыс. рублей;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1480 тыс. рублей. Найдите $r$.

**Решение.** По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$800;\ 680;\ 560;\ 440;\ 320;\ 200;\ 160;\ 120;\ 80;\ 40;\ 0.$$

Пусть $k=1+\dfrac{r}{100}$. Тогда последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$$800k;\ 680k;\ 560k;\ 440k;\ 320k;\ 200k;\ 160k;\ 120k;\ 80k;\ 40k.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$800k-680;\ 680k-560;\ 560k-440;\ 440k-320;\ 320k-200;$$
$$200k-160;\ 160k-120;\ 120k-80;\ 80k-40;\ 40k.$$

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5(560k-440)+5(120k-80)=3400k-2600.$$

Получаем: $3400k-2600=1480$, откуда $k=1,2$ и $r=20$.

**Ответ:** 20.

**ИЛИ**

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму $A$ млн рублей на 24 месяца. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 3 % по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2028 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно $A$, если общая сумма платежей в 2028 году составит 17 925 тыс. рублей?

**Решение.**

По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться на $\dfrac{1000A}{24}=\dfrac{125A}{3}$ тыс. рублей, следовательно, по состоянию на 15 декабря 2027 года и на 15-е число каждого месяца 2028 года долг (в тыс. рублей) должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$500A;\ \frac{1375A}{3};\ \frac{1250A}{3};\ \ldots;\ \frac{250A}{3};\ \frac{125A}{3};\ 0.$$

Первого числа каждого месяца 2028 года долг возрастает на 3 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$1{,}03\cdot 500A;\ 1{,}03\cdot\frac{1375A}{3};\ \ldots;\ 1{,}03\cdot\frac{250A}{3};\ 1{,}03\cdot\frac{125A}{3}.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$\frac{125A}{3}+15A;\ \frac{125A}{3}+13{,}75A;\ \ldots;\ \frac{125A}{3}+2{,}5A;\ \frac{125A}{3}+1{,}25A.$$

Всего следует выплатить в 2028 году

$$12\cdot\frac{170A+128{,}75A}{2\cdot 3}=597{,}5A \text{ тыс. рублей,}$$

откуда $597{,}5A=17\,925$; $A=30$.

**Ответ:** 30.

## Задание 16.1

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно $r$, если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

**Решение.**

По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться на $\frac{9000}{36} = 250$ тыс. рублей, следовательно, по состоянию на 15 декабря 2026 года и на 15-е число каждого месяца 2027 года долг (в тыс. рублей) должен уменьшаться до 6000 тыс. рублей следующим образом:

$$9000;\ 8750;\ 8500;\ \ldots;\ 6500;\ 6250;\ 6000.$$

Первого числа каждого месяца 2027 года долг возрастает на $r\,\%$, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на 1-е число такова:

$$(1+0{,}01r)\cdot 9000;\ \left(1+0{,}01r\right)\cdot 8750;\ \ldots;\ \left(1+0{,}01r\right)\cdot 6500;\ \left(1+0{,}01r\right)\cdot 6250.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$250+90r;\ 250+87{,}5r;\ \ldots;\ 250+65r;\ 250+62{,}5r.$$

Всего следует выплатить в 2027 году (в тыс. рублей)

$$12\cdot\frac{250+90r+250+62{,}5r}{2} = 915r+3000,$$

откуда $915r+3000 = 4830$; $915r = 1830$; $r = 2$.

**Ответ:** 2.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 16.2

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

**Решение.**

Пусть сумма кредита составляет $S$ рублей, а ежегодные выплаты $X$ рублей. По условию, долг перед банком (в рублях) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$S\,,\ \frac{6}{5}\cdot S-X\,,\ \left(\frac{6}{5}\right)^2 S-\frac{6}{5}\cdot X-X\,,\ \left(\frac{6}{5}\right)^3 S-\left(\frac{6}{5}\right)^2 X-\frac{6}{5}\cdot X-X=0\,,$$

откуда

$$X=\frac{\left(\frac{6}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{6}{5}-1\right)}{\left(\frac{6}{5}\right)^3-1}\cdot S=\frac{216}{455}\cdot S\,;\ 3X-S=\frac{193}{455}\cdot S=77\,200\,.$$

Получаем $S=182\,000$ рублей.

**Ответ:** 182 000.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 16.3

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;
— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

**Решение.**
Пусть долг в июле 2030 года составит $B$ тыс. рублей.
По условию долг (в тыс. рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться следующим образом:

$$1300;\ 1040+0,2B;\ 780+0,4B;\ 520+0,6B;\ 260+0,8B;$$

$$B;\ 0,8B;\ 0,6B;\ 0,4B;\ 0,2B;\ 0.$$

В январе каждого года долг возрастает на 20 %, значит, последовательность размеров долга (в тыс. рублей) по состоянию на январь такова:

$$1560;\ 1248+0,24B;\ 936+0,48B;\ 624+0,72B;\ 312+0,96B;$$

$$1,2B;\ 0,96B;\ 0,72B;\ 0,48B;\ 0,24B.$$

Следовательно, платежи (в тыс. рублей) должны быть следующими:

$$520-0,2B;\ 468-0,16B;\ 416-0,12B;\ 364-0,08B;\ 312-0,04B;$$

$$0,4B;\ 0,36B;\ 0,32B;\ 0,28B;\ 0,24B.$$

Значит, сумма всех платежей (в тыс. рублей) будет составлять:

$$5(416-0,12B)+5\cdot 0,32B=2080+B.$$

Получаем: $2080+B=2580$, откуда $B=500$.
Долг в июле 2030 года составит 500 тыс. рублей.

**Ответ:** 500 тыс. рублей.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
| --- | --- |
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 16.4

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

**Решение.**
Пусть платежи в 2027 и 2028 годах составят по $x$ тыс. рублей.
В январе 2027 года долг (в тыс. рублей) будет равен 960, а в июле равен $960-x$. В январе 2028 года долг будет равен $1152-1,2x$, а в июле равен $1152-2,2x$. В январе 2029 года долг будет равен $1382,4-2,64x$. По условию, к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью, значит, платёж в 2029 году должен быть равен $(1382,4-2,64x)$ тыс. рублей, а сумма всех платежей будет составлять $(1382,4-0,64x)$ тыс. рублей. Получаем:

$$1382,4-0,64x=1254,4;\ 0,64x=128,$$

откуда $x=200$.
Платёж в 2027 году должен быть равен 200 тыс. рублей.

**Ответ:** 200 тыс. рублей.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Задание 16.5

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где $r$ – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Долг (в млн руб.) | 1 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0 |

Найдите наименьшее значение $r$, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

**Решение.**
По условию, долг перед банком (в млн руб.) на 15-е число каждого месяца должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$1;\ 0{,}9;\ 0{,}8;\ 0{,}7;\ 0{,}6;\ 0{,}5;\ 0.$$

Пусть $k = 1 + \frac{r}{100}$, тогда долг на 1-е число каждого месяца равен:

$$k;\ 0{,}9k;\ 0{,}8k;\ 0{,}7k;\ 0{,}6k;\ 0{,}5k.$$

Следовательно, выплаты со 2-го по 14-е число каждого месяца составляют:

$$k-0{,}9;\ 0{,}9k-0{,}8;\ 0{,}8k-0{,}7;\ 0{,}7k-0{,}6;\ 0{,}6k-0{,}5;\ 0{,}5k.$$

Общая сумма выплат составляет:

$$k\left(1+0{,}9+0{,}8+0{,}7+0{,}6+0{,}5\right)-\left(0{,}9+0{,}8+0{,}7+0{,}6+0{,}5\right)=$$
$$=\left(k-1\right)\left(1+0{,}9+0{,}8+0{,}7+0{,}6+0{,}5\right)+1=4{,}5\left(k-1\right)+1.$$

По условию, общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб., значит,

$$4{,}5\left(k-1\right)+1>1{,}2;\ 4{,}5\cdot\frac{r}{100}+1>1{,}2;\ r>4\frac{4}{9}.$$

Наименьшее целое решение этого неравенства – число 5.
Значит, искомое число процентов – 5.

**Ответ:** 5.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

### Задание 16.6

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите $r$.
(Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

**Решение.**
Пусть сумма кредита равна $S$. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{38S}{39},\ \ldots,\ \frac{2S}{39},\ \frac{S}{39},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-е число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{38kS}{39},\ \ldots,\ \frac{2kS}{39},\ \frac{kS}{39}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{39},\ \frac{38(k-1)S+S}{39},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{39},\ \frac{(k-1)S+S}{39}.$$

Всего следует выплатить $S+S(k-1)\left(1+\frac{38}{39}+\ldots+\frac{2}{39}+\frac{1}{39}\right)=S\left(1+20(k-1)\right)$.

Общая сумма выплат на 20% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$20(k-1)=0{,}2;\ k=1{,}01;\ r=1.$$

**Ответ:** 1.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 2 |
| Верно построена математическая модель | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *2* |

## Примеры оценивания решений задания 16

**Пример 16.1.1**

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно $r$, если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

**Ответ:** 2.

№16

Пусть 7-е число – день платежа

$(1+\frac{r}{100})=b$

| Дата | Сумма долга |
|---|---|
| 15 дек 2026 г | 9 млн |
| 1 ч, 7 ч, 15 ч — янв 2027, 1 мес | $9b$ ⇒ вся выплата $9b-\frac{35}{4}=\frac{36b-35}{4}$; $9-\frac{9}{36}=9-\frac{1}{4}=\frac{36-1}{4}=\frac{35}{4}$ |
| 1 ч, 7 ч, 15 ч — фев 2027, 2 мес | $\frac{35}{4}b$ ⇒ о.в. $\frac{35b-34}{4}$; $\frac{34}{4}$ $9-2\cdot\frac{9}{36}=9-\frac{2}{4}=\frac{36-2}{4}=\frac{34}{4}$ |
| 1 ч, 7 ч, 15 ч — март 2027, 3 мес | $\frac{34}{4}b$ ⇒ о.в. $\frac{34b-33}{4}$; $\frac{33}{4}$ |
| .. | |
| ~~1, 7, 15 — дек 2027~~ | |
| 15 ноя 2027 (11 мес) | $\frac{25}{4}$ |
| 1 ч, 7 ч, 15 ч — дек 2027, 12 мес | $\frac{25}{4}b$ ⇒ о.в. $\frac{25b-24}{4}$; $\frac{24}{4}$ |
| .. | |
| 15 число 35 мес. | $\frac{1}{4}$ |
| 1 ч, 7 ч, 15 ч — 36 мес | $\frac{1}{4}b$ ⇒ о.в. $\frac{1}{4}b$; 0 |

Выплаты образуют арифметическую прогрессию. Воспользуемся формулой:

$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

Общая сумма выплат в 2027 году = $= 4830$ тыс. $= 4{,}83$ млн

О. С. В в 2027 г. =

$=\dfrac{\frac{36b-35}{4}+\frac{25b-24}{4}}{2}\cdot 12=4{,}83 \quad |\cdot 2$

$\left(\frac{36b-35}{4}+\frac{25b-24}{4}\right)\cdot 12=9{,}66$

$\left(\frac{61b-59}{4}\right)\cdot 12=9{,}66$

$(61b-59)\cdot 3=9{,}66 \quad |:3$

$61b-59=3{,}22$

$61b=\frac{322}{100}+\frac{5900}{100}$

$61b=\frac{6222}{100} \quad |:61$

$b=\frac{6222}{6100}=1\frac{122}{6100}$

$(1+\frac{r}{100})=b$

$1+\frac{r}{100}=1\frac{122}{6100}$

$\frac{r}{100}=\frac{122}{6100} \quad |\cdot 100$

$r=\frac{122}{61}=2$

Ответ: 2

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.1.2**

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно $r$, если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

**Ответ:** 2.

№16

Пусть $S$ – сумма, которую взяли в кредит (9000 тыс.)

$\frac{r}{100}$ – возрастание долга каждый месяц.

| месяц. | долг | начисление % | выплата | итог месяца |
|---|---|---|---|---|
| 1. | $S$ | $\frac{r}{100}S$ | $\frac{r}{100}S+\frac{S}{36}$ | $\frac{35S}{36}$ |
| 2. | $\frac{35S}{36}$ | $\frac{r}{100}\cdot\frac{35}{36}S$ | $\frac{r}{100}\cdot\frac{35}{36}S+\frac{S}{36}$ | $\frac{34S}{36}$ |
| 3. | $\frac{34S}{36}$ | $\frac{r}{100}\cdot\frac{34}{36}S$ | $\frac{r}{100}\cdot\frac{34}{36}S+\frac{S}{36}$ | $\frac{33S}{36}$ |
| | | . . . | арифметическая прогрессия | |
| 12. | $\frac{25S}{36}$ | $\frac{r}{100}\cdot\frac{25S}{36}$ | $\frac{r}{100}\cdot\frac{25S}{36}+\frac{S}{36}$ | $\frac{24S}{36}$ |

2027г. сумма выплат = 4830 тыс. $\Rightarrow$ это первые 12 выплат

$$\frac{r}{100}S+\frac{S}{36}+\frac{r\cdot 35S}{100\cdot 36}+\frac{S}{36}+\ldots\frac{r}{100}\cdot\frac{25}{36}S+\frac{S}{36}=4830$$

$$\frac{12S}{36}+\frac{r}{100}\left(\frac{S+\frac{25}{36}S}{2}\cdot 12\right)=4830$$

$$\frac{S}{3}+\frac{r}{100}\left(\frac{61\cdot S\cdot 6}{36}\right)=4830$$

$$3000+\frac{r}{100}\left(\frac{9000\cdot 61\cdot 6}{36}\right)=4830$$

$$90r\cdot 61\cdot 6=1830\cdot 36$$

$$r=\frac{1830\cdot 36}{90\cdot 61\cdot 6}=\frac{183\cdot 36}{9\cdot 61\cdot 6}=\frac{3\cdot 36}{9\cdot 6}=\frac{36}{18}=2$$

Ответ: 2

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.1.3**

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно $r$, если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

**Ответ:** 2.

№ 16

| | Долг с % (млн руб) | Платеж (млн руб) | Остаток (млн руб) |
|---|---|---|---|
| 0 | — | — | $9 - x$ |
| 1 | $9k$ | $9k - \frac{35}{4}$ | $9 - \cancel{1}x = 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4}$ |
| 2 | $\frac{35}{4}k$ | $\frac{35}{4}k - \frac{34}{4}$ | $\cancel{9-3}\ 9 - 2x = \frac{34}{4}$ |
| ⋮ 34 | ⋮ | ⋮ | ⋮ $9 - 34x = \frac{2}{4}$ |
| 35 | $\frac{2}{4}k$ | $\frac{2}{4}k - \frac{1}{4}$ | $9 - 35x = \frac{1}{4}$ |
| 36 | $\frac{1}{4}k$ | $\frac{1}{4}k$ | $9 - 36x = 0$ |

$x = \frac{1}{4}$

$r$ – процентная ставка

$k = 1 + \frac{r}{100}$ – коэффициент

$x$ – величина, на которую уменьшается долг со 2-ое по 14-ое число

~~Платежи с 1ого по 36-ый (12) месяц составляют убывающую геометрическую прогрессию~~

~~$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ $S_{36} = \frac{\left(9k - \frac{35}{4} + \frac{1}{4}k\right)36}{2}$~~

| | | | |
|---|---|---|---|
| 9 | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 11 | $\frac{26}{4}k$ | $\frac{26}{4}k - \frac{25}{4}$ | $9 - 11x = \frac{25}{4}$ |
| 12 | $\frac{25}{4}k$ | $\frac{25}{4}k - \frac{24}{4}$ | $9 - 12x = \frac{24}{4}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |

Платежи с 1ого по 12-ый составляют убывающую арифметическую прогрессию.

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ $S_{12} = \frac{\left(9k - \frac{35}{4} + \frac{25k}{4} - \frac{24}{4}\right)12}{2} = 4{,}83$

$\left(\frac{61}{4}k - \frac{59}{4}\right)6 = 4{,}83$

$15{,}25k - 14{,}75 = 0{,}805$

$15{,}25k = 15{,}555$

$k = 1{,}2 = 1\frac{1}{5}$ ⇒ $\frac{r}{100} = 1\frac{1}{5} - 1 = \frac{1}{5}$

$r = \frac{100}{5} = 20$

Ответ. 20

***Комментарий.***

Верно построена математическая модель. Ошибка допущена при делении 15,555 на 15,25.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 16.1.4**

15 декабря 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 9 млн рублей на 36 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на *r* процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо одним платежом оплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;

– к 15 декабря 2029 года кредит должен быть полностью погашен.

Чему равно *r*, если общая сумма платежей в 2027 году составит 4830 тыс. рублей?

**Ответ:** 2.

$S = 9$ млн руб. $= 9000$ тыс. руб.

$n = 36$ мес.

$r$ = процент $\Rightarrow m = 1 + \frac{r}{100}$

$\Delta = \frac{S}{n} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{35}, x_{36}$ - выпл.

$9 \to 9 - \frac{1}{4} = \frac{35}{4} \to \frac{34}{4} \to \frac{33}{4} \to \ldots \to \frac{2}{4} \to \frac{1}{4} \to 0$

2027:

1) $9m - x_1 = \frac{35}{4} \Rightarrow x_1 = \cancel{\frac{35}{4}}\ 9m - \frac{35}{4}$

2) $\frac{35}{4}m - x_2 = \frac{34}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{35}{4}m - \frac{34}{4}$

3) $\frac{34}{4}m - x_3 = \frac{33}{4} \Rightarrow x_3 = \frac{34}{4}m - \frac{33}{4}$

...

11) $\frac{26}{4}m - x_{11} = \frac{23}{4} \Rightarrow x_{11} = \frac{26}{4}m - \frac{25}{4}$

12) $\frac{25}{4}m - x_{12} = \frac{24}{4} \Rightarrow x_{12} = \frac{25}{4}m - \frac{24}{4}$

2028:

13) $\frac{24}{4}m - x_{13} = \frac{23}{4}m \Rightarrow x_{13} = \frac{24}{4}m - \frac{23}{4}$

14) $\frac{23}{4}m - x_{14} = \frac{22}{4}\cancel{m} \Rightarrow x_{14} = \frac{23}{4}m - \frac{22}{4}$

...

24) $\frac{13}{4}m - x_{24} = \frac{12}{4} \Rightarrow x_{24} = \frac{13}{4}m - \frac{12}{4}$

...

Заметим, что $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{11} + x_{12} = 4830$, тогда

$\frac{9m - \frac{35}{4} + \frac{25}{4}m - \frac{24}{4}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{24}^{\cancel{12}\,4} = \cancel{4830}^{1610} \Rightarrow$

***Комментарий.***

Неверно построена математическая модель. Платежи вычислены в млн рублей, а сумма платежей в 2027 году приравнена к 4830 тыс. рублей.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 16.2.1**

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

**Ответ:** 182 000.

| №16 | Долг после % | Выплата | Долг до % |
|---|---|---|---|
| 0) | | | $S$ |
| 1) | $r\cdot S$ | $x$ | $r\cdot S-x$ |
| 2) | $(r\cdot S-x)\cdot r$ | $x$ | $(r\cdot S-x)\cdot r-x$ |
| 3) | $((r\cdot S-x\cdot r)-x)\cdot r$ | $x$ | $0$ |

Пусть S-сумма в кредит

$r=1,2$

x-ежегодн. выплата

$$3x=S+77200$$

$$S=3x-77200$$

$$((r\cdot S-x)r\cancel{S}-x)r-x=0$$

$$((1,2S-x)\cdot 1,2-x)\cdot 1,2-x=0$$

$$(1,44S-2,2x)1,2-x=0$$

$$1,728S-3,64x=0$$

$$1,728(3x-77200)-3,64x=0$$

$$5,184x-3,64x-133401,6=0$$

$$1,544x=133401,6$$

$$x=86400 \text{ руб.}$$

$$S=\cancel{\ldots}\ 86400\cdot 3-77200=182000 \text{ руб.}$$

Ответ: 182000 руб.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.2.2**

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

**Ответ:** 182 000.

Задача №16 Пусть $S$ - сумма, взятая в кредит; $r = 1{,}2$ ; $A$ - сумма выплаты

| БАНК | ВЫПЛАТА | ДОЛГ |
|---|---|---|
| — | — | $S$ |
| $Sr$ | $A$ | $Sr-A$ |
| $(Sr-A)r$ | $A$ | $(Sr-A)r-A$ |
| $((Sr-A)r-A)r$ | $A$ | $0$ |

$$Sr^3 - Ar^2 - Ar - A = 0$$

$$3Ar^3 - 77200r^3 - Ar^2 - Ar - A = 0$$

$$A(3r^3 - r^2 - r - 1) = 77200r^3$$

$$A = \frac{77200r^3}{3r^3 - r^2 - r - 1} = \frac{77200 \times 1{,}728}{1{,}544} = 86400$$

$3A - 77200 = S$

$$S = 3 \times 86400 - 77200 = 182000$$

Ответ: 182000 рублей

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.2.3**

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

**Ответ:** 182 000.

16) $S$ – сумма, взятая в кредит

$m$ – одна из трёх равных выплат

| | долг | долг с % | выпл. |
|---|---|---|---|
| I | $S$ | $1,2\cdot S$ | $m$ |
| II | $1,2\cdot S-m$ | $1,2\cdot(1,2S-m)$ | $m$ |
| III | $1,2\cdot(1,2\cdot S-m)-m$ | $1,2\cdot(1,2\cdot(1,2\cdot S-m)-m)$ | $m$ |

$$1,2\cdot(1,2\cdot(1,2\cdot S-m)-m)=m$$

$$1,44\cdot(1,2\cdot S-m)=2,2m$$

$$1,728\cdot S=3,64m$$

Из услов. известно; $3m=S+77200$

$$m=\frac{S+77200}{3}$$

$$1,728\cdot S=\frac{3,64\cdot(S+77200)}{3}\quad|\cdot 3$$

$$5,184\cdot S=3,64S+364\cdot 772$$

$$1,544S=364\cdot 772$$

$$S=\frac{\cancel{364}^{157}\cdot\cancel{772}\cdot 1000}{\cancel{1544}_{2}}=157000 \text{ руб.}$$

Ответ: 157 000 руб.

***Комментарий.***

Верно построена математическая модель. Ошибка допущена при делении 364 на 2.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 16.2.4**

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма платежей после полного погашения кредита должна быть на 77 200 рублей больше суммы, взятой в кредит?

**Ответ:** 182 000.

№16

Пусть кредит был взят на сумму $S$ тыс. руб ($S>0$) и каждый из трёх равных платежей равен $X$ тыс. руб. ($X>0$).

Когда долг увеличивается на 20%, он увеличивается в $1+\frac{20}{100}=$

$=1{,}2$ раза

Составим мат. модель долга

долг на июль 2023

$$\underbrace{\Big(\underbrace{(1{,}2S-x)}_{\text{долг на июль 2022}}\cdot 1{,}2-x\Big)\cdot 1{,}2-x}_{\text{долг на июль 2024}}=0$$

$$1{,}2^3S-1{,}2^2x-1{,}2x-x=0$$

$$1{,}728S=x(1{,}44+1{,}2+1)$$

$$1{,}728S=3{,}64x\Rightarrow x=\frac{1{,}728S}{3{,}64}=\frac{172{,}8}{364}S=\frac{43{,}2}{91}S=\frac{3{,}4}{7}S=\frac{34}{70}S$$

Общая сумма платежей равна $3x=\frac{3\cdot34}{70}S=\left(\frac{102}{70}S\right)$ тыс. руб и она на 77,2 тыс. руб больше суммы изначального кредита ($S$ тыс. руб) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{102}{70}S=S+77{,}2\Rightarrow\frac{32}{70}S=77{,}2\Rightarrow S=\frac{77{,}2\cdot7}{32}=\frac{386\cdot7}{16}=\frac{193\cdot7}{8}=$$

$=\frac{1351}{8}=168{,}875$ тыс. $\Rightarrow$ сумма кредита равна 168,875 тыс. руб $=168\,825$ руб

Ответ 168875 руб

***Комментарий.***

Неверно построена математическая модель. Ошибка допущена до записи уравнения, связывающего сумму платежей и сумму кредита, при сокращении дроби $\frac{43{,}2}{91}$.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 16.3.1**

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

**Ответ:** 500 тыс. рублей.

Все вычисления в тыс. рублей; x – величина уменьш. долга с 2026 по 2030г; y – величина уменьш. долга с 2031 по 2035г.

$B = 1300 - 5x$

| | нач. долг | нач. % | платеж | кон. долг |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $1300$ | $0{,}2 \cdot 1300 = 260$ | $260 + x$ | $1300 - x$ |
| 2 | $1300 - x$ | $0{,}2(1300 - x) = 260 - 0{,}2x$ | $260 + 0{,}8x$ | $1300 - 2x$ |
| 3 | $1300 - 2x$ | $0{,}2(1300 - 2x) = 260 - 0{,}4x$ | $260 + 0{,}6x$ | $1300 - 3x$ |
| 4 | $1300 - 3x$ | $0{,}2(1300 - 3x) = 260 - 0{,}6x$ | $260 + 0{,}4x$ | $1300 - 4x$ |
| 5 | $1300 - 4x$ | $0{,}2(1300 - 4x) = 260 - 0{,}8x$ | $260 + 0{,}2x$ | $1300 - 5x$ |
| 6 | $B$ | $0{,}2B$ | $0{,}2B + y$ | $B - y$ |
| 7 | $B - y$ | $0{,}2(B - y) = 0{,}2B - 0{,}2y$ | $0{,}2B + 0{,}8y$ | $B - 2y$ |
| 8 | $B - 2y$ | $0{,}2(B - 2y) = 0{,}2B - 0{,}4y$ | $0{,}2B + 0{,}6y$ | $B - 3y$ |
| 9 | $B - 3y$ | $0{,}2(B - 3y) = 0{,}2B - 0{,}6y$ | $0{,}2B + 0{,}4y$ | $B - 4y$ |
| 10 | $B - 4y$ | $0{,}2(B - 4y) = 0{,}2B - 0{,}8y$ | $0{,}2B + 0{,}2y$ | $B - 5y$ |

Сумма всех платежей: $260 \cdot 5 + 3x + 5 \cdot 0{,}2B + 3y = 1300 + 3x + B + 3y = 1300 + 3x + 1300 - 5x + 3y = 2600 - 2x + 3y = 2580$

$$\begin{cases} 2600 - 2x + 3y = 2580 \\ B - 5y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 20 \\ 1300 - 5x - 5y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 20 \\ 5(x + y) = 1300 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 20 \\ x + y = 260 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 260 - x$

$2x - 3(260 - x) = 20$

$2x - 780 + 3x = 20$

$5x = 800 \Rightarrow x = 160$

Долг в июле 2030г: $1300 - 5x = 1300 - 5 \cdot 160 = 500$

Ответ: 500 000 рублей

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.3.2**

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

**Ответ:** 500 тыс. рублей.

$S_0 = 1300$ тыс. рублей – первоначальная сумма кредита

$r = 20\%$ – процент по кредиту $\quad k = (1 + \frac{r}{100})$

$S_x = 2580$ тыс. руб – сумма всех платежей

$S_{x_1}$ – сумма платежей за 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годы

$S_{x_2}$ – сумма платежей за 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годы

A – величина, на которую уменьшается долг в 2026, 2027, 2028, 2029, 2030 годах

B – величина, на которую уменьшается долг в 2031, 2032, 2033, 2034, 2035 годах

$x_1, x_2, x_3 \ldots$ – выплаты

| год | январь | июль | выплата |
|---|---|---|---|
| 2025 | – | $S_0$ | – |
| 2026 | $kS_0$ | $kS_0 - x_1 = S_1 = S_0 - A$ | $\Rightarrow x_1 = (k-1)S_0 + A$ |
| 2027 | $kS_1$ | $kS_1 - x_2 = S_2 = S_0 - 2A$ | $\Rightarrow x_2 = (k-1)S_0 + (2-k)A$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 2030 | $kS_4$ | $kS_4 - x_5 = S_5 = S_0 - 5A$ | $\Rightarrow x_5 = (k-1)S_0 + (5-4k)A$ |
| 2031 | $kS_5$ | $kS_5 - x_6 = S_6 = S_0 - 5A - B$ | $\Rightarrow x_6 = (k-1)S_0 + (5-5k)A + B$ |
| 2032 | $kS_6$ | $kS_6 - x_7 = S_7 = S_0 - 5A - 2B$ | $\Rightarrow x_7 = (k-1)S_0 + (5-5k)A + (2-k)B$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| 2035 | $kS_9$ | $kS_9 - x_{10} = S_{10} = S_0 - 5A - 5B$ | $\Rightarrow x_{10} = (k-1)S_0 + (5-5k)A + (5-4k)B$ |

$S_0 = 5A + 5B \qquad k = 1 + \frac{r}{100}$

$B = \frac{S_0 - 5A}{5} \qquad k = 1 + \frac{20}{100}$

$S_x = S_{x_1} + S_{x_2} \qquad k = 1,2$

$S_{x_1} = \frac{x_1 + x_5}{2} \cdot 5$

$S_{x_1} = \frac{(k-1)S_0 + A + (k-1)S_0 + (5-4k)A}{2} \cdot 5$

$S_{x_1} = \frac{2(k-1)S_0 + (6-4k)A}{2} \cdot 5$

$S_{x_1} = 5(k-1)S_0 + \frac{5}{2}(6-4k)A$

$S_{x_2} = \frac{x_6 + x_{10}}{2} \cdot 5$

$S_{x_2} = \frac{(k-1)S_0 + (5-5k)A + B + (k-1)S_0 + (5-5k)A + (5-4k)B}{2} \cdot 5$

$S_{x_2} = \frac{2(k-1)S_0 + 2(5-5k)A + (6-4k)B}{2} \cdot 5$

$S_{x_2} = 5(k-1)S_0 + 5(5-5k)A + \frac{5}{2}(6-4k)B$

$S_x = 5(k-1)S_0 + \frac{5}{2}(6-4k)A + 5(k-1)S_0 + 5(5-5k)A + \frac{5}{2}(6-4k)B$

$S_x = 10(k-1)S_0 + (15-10k)A + (25-25k)A + (15-10k)B$

$S_x = 10(k-1)S_0 + (40-35k)A + (15-10k)B$

$S_x = 10(k-1)S_0 + (40-35k)A + (15-10k)\left(\frac{S_0 - 5A}{5}\right)$

$2580 = 10(1,2-1)1300 + (40-35\cdot 1,2)A + (15-10\cdot 1,2)\left(\frac{1300}{5} - A\right)$

$2580 = 2600 - 2A + 780 - 3A$

$5A = 800$

$A = \frac{800}{5}$

$A = 160$ тыс. рублей

долг в июле 2030 это $S_5$

$S_5 = S_0 - 5A$

$S_5 = 1300 - 5\cdot 160$

$S_5 = 1300 - 800$

$S_5 = 500$ тыс. рублей

Ответ: $S_5 = 500$ тыс. рублей

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.3.3**

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

**Ответ:** 500 тыс. рублей.

№16. $S = 1300$ тыс. руб – сумма кредита; Сумма всех платежей $= 2580$ тыс. руб.

$r = 20\%$ – процентная ставка; $b = 1 + 0{,}01r = 1{,}2$

$X$ – часть, на которую уменьшается долг в 2026–2030 г.

$y$ – часть, на которую уменьшается долг в 2031 – 2035

| год | Долг с % | Выплаты | Долг после выплат |
|---|---|---|---|
| 2025 | | | $S$ |
| 2026 | $Sb$ | $Sb - S + x$ | $S - x$ |
| 2027 | $Sb - xb$ | $Sb - xb - S + 2x$ | $S - 2x$ |
| 2028 | $Sb - 2xb$ | $Sb - 2xb - S + 3x$ | $S - 3x$ |
| 2029 | $Sb - 3xb$ | $Sb - 3xb - S + 4x$ | $S - 4x$ |
| 2030 | $Sb - 4xb$ | $Sb - 4xb - S + 5x$ | $S - 5x$ |
| 2031 | $Sb - 5xb$ | $Sb - 5xb - S + 5x + y$ | $S - 5x - y$ |
| 2032 | $Sb - 5xb - yb$ | $Sb - 5xb - yb - S + 5x + 2y$ | $S - 5x - 2y$ |
| 2033 | $Sb - 5xb - 2yb$ | $Sb - 5xb - 2yb - S + 5x + 3y$ | $S - 5x - 3y$ |
| 2034 | $Sb - 5xb - 3yb$ | $Sb - 5xb - 3yb - S + 5x + 4y$ | $S - 5x - 4y$ |
| 2035 | $Sb - 5xb - 4yb$ | $Sb - 5xb - 4yb$ | $0 = S - 5x - 5y$ |

Сумарные выплата: $10Sb - 35xb - 10yb - 9S + 35x + 10y = 2580$

$$\begin{cases} 10\cdot 1300\cdot 1{,}2 - 35\cdot 1{,}2\cdot x - 10\cdot 1{,}2\cdot y - 9\cdot 1300 + 35x + 10y = 2580 \quad (1) \\ 1300 - 5x - 5y = 0 \quad (2) \end{cases}$$ тыс. руб.

(1) $y = 260 - x$

2) $15600 - 42x - 12y - 11700 + 35x + 10y = 2580$

$3900 - 7x - 2y = 2580$

$7x + 2y = 1310$

$7x = 1310 - 2y$

$\cancel{x = \frac{1310 - 2y}{7}}$

$7x = 1310 - 2(260 - x)$

$5x = 790$

$x = 158$ — тыс. руб.

Долг в июле 2030 составит:

$S - 5x = 1300 - 5\cdot 158 = 510$ тыс. руб.

Ответ: 510 тыс. руб.

***Комментарий.***

Математическая модель построена верно. Ошибка допущена при решении уравнения: вместо уравнения $7x + 2y = 1310$ должно быть уравнение $7x + 2y = 1320$.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 16.3.4**

В июле 2025 года планируется взять кредит на десять лет в размере 1300 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо оплатить одним платежом часть долга;

— в июле 2026, 2027, 2028, 2029 и 2030 годов долг должен быть на какую-то одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— в июле 2031, 2032, 2033, 2034 и 2035 годов долг должен быть на другую одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

— к июлю 2035 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 2580 тыс. рублей. Сколько рублей составит долг в июле 2030 года?

**Ответ:** 500 тыс. рублей.

Пусть март - месяц платежа

x - ~~платежи~~ долг меньше за 26, 27, 28, 29, 30 года

m - ~~платеж~~ долг меньше за 31, 32, 33, 34 и 35 года

| Дата | Сумма долга |
|---|---|
| и 25 | $1300$ |
| я<br>м 26<br>и | $1300 \cdot 1,2$<br>была выплата $\Rightarrow 1300 \cdot 1,2 - 1300 + x$<br>$1300 - x$ |
| я<br>м 27<br>и | $(1300 - x) \cdot 1,2$<br>$=$бв $(1300 - x) \cdot 1,2 - 1300 + 2x$<br>$1300 - 2x$ |
| я<br>м 28<br>и | $(1300 - 2x) \cdot 1,2$<br>бв $(1300 - 2x) \cdot 1,2 - 1300 + 3x$<br>$1300 - 3x$ |
| я<br>м 29<br>и | $(1300 - 3x) \cdot 1,2$<br>бв $(1300 - 3x) \cdot 1,2 - 1300 + 4x$<br>$1300 - 4x$ |
| я<br>м 30<br>и | $(1300 - 4x) \cdot 1,2$<br>бв $(1300 - 4x) \cdot 1,2 - 1300 + 5x$<br>$1300 - 5x$ |
| я<br>м 31<br>и | $(1300 - 5x) \cdot 1,2$<br>бв $(1300 - 5x) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + m$<br>$1300 - 5x - m$ |
| я<br>м 32<br>и | $(1300 - 5x - m) \cdot 1,2$<br>бв $(1300 - 5x - m) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + 2m$<br>$1300 - 5x - 2m$ |
| я<br>м 33<br>и | $(1300 - 5x - 2m) \cdot 1,2$<br>бв $(1300 - 5x - 2m) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + 3m$<br>$1300 - 5x - 3m$ |
| я<br>м 34<br>и | $(1300 - 5x - 3m) \cdot 1,2$<br>бв $(1300 - 5x - 3m) \cdot 1,2 - 1300 + 5x + 4m$<br>$1300 - 5x - 4m$ |
| я<br>м 35<br>и | $(1300 - 5x - 4m) \cdot 1,2$<br>бв $(1300 - 5x - 4m) \cdot 1,2$<br>$0$ |

Выплаты за ~~26, 27, 28, 29, 30~~ все года увеличиваются ~~все года~~

Воспользуемся формулой ариф прогрессии

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Для периода с 26 – 30 г.

$$\frac{1300 \cdot 1,2 - 1300 + x + (1300 - 4x) \cdot 1,2 - 1300 + 5x}{2} \cdot 5$$

Для периода с 31 по 35.

$$\frac{(1300 - 5x) \cdot 1,2 - 1300 + \cancel{5x + m} + (1300 - 5x - 4m) \cdot 1,2}{2} \cdot 5$$

Тогда $\Rightarrow$

воспользуемся формулой и сложим

$$\frac{1300\cdot 1{,}2-1300+x+(1300-4x)\cdot 1{,}2-1300+5x}{2}\cdot 5+\frac{(1300-5x)\cdot 1{,}2-1300+5x+m+}{2}$$

$$\frac{+(1300-5x-4m)\cdot 1{,}2}{}\cdot 5=2580 \text{ тг.}$$

***Комментарий.***

Математическая модель не построена. Не получено ещё уравнение.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 16.4.1**

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

**Ответ:** 200 тыс. рублей.

№16 Начальный долг – 800 тыс

Каждый год долг возр в 1,2 раза от текущего долга

Пусть платежи в 2027 и 2028 годы составили x тыс р

а в 2029 – y тыс рублей. Тогда согласно условию задачи: $x+x+y=1254,4 \Rightarrow y=1254,4-2x$

Далее рассмотрим таблицу долга и выплат:

| | Долг | выплата | остаток |
|---|---|---|---|
| 2027 | $1,2\cdot 800=960$ | $x$ | $960-x$ |
| 2028 | $1,2(960-x)$ | $x$ | $1,2(960-x)-x$ |
| 2029 | $1,2(1,2(960-x)-x)$ | $y$ | $0$ |

Тогда, согласно данной таблице, долг и выплата в последний год равны, тогда

$1,2(1,2(960-x)-x)-y=0$, т.к $y=1254,4-2x$, то

$1,2(1152-2,2x)-1254,4+2x=0$

$1382,4-2,64x-1254,4+2x=0$

$0,64x=128$

$x=200$, значит платеж в 2027 и 2028 года составит 200 тыс. р, что и требовалось найти

Ответ: 200 тыс. р

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.4.2**

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

**Ответ:** 200 тыс. рублей.

$\boxed{№16}$

Т.к. деньги ~~кладут~~ берут в июле 2026 г., что в 2026 году никаких платежей не делают и долг на конец 2026г равен 800 тыс руб,

Тогда в январе 2027 долг возрастёт на 20%, т.е в $\left(1+\frac{20}{100}\right)=1,2$ раз,
т.е. долг будет равен $800\cdot 1,2 = 960$ тыс руб
С февраля по июнь вносится некоторый платеж, пусть он равен X тыс. руб. Тогда в декабре 2027 долг равен $960-x$ (тыс.руб)
Тогда в январе 2028г долг возр. в 1,2 раза: $(960-x)\cdot 1,2 = 1152-1,2x$ (тыс. руб)
С февр. по июнь 2028г вносится платеж, равный платежу в 2027 г, т.е X (тыс.руб). Тогда в декабре 2028г долг составил
$1152-1,2x-x = 1152-2,2x$ (тыс руб).
Тогда в январе 2029г долг возрост. в 1,2 раза: $(1152-2,2x)\cdot 1,2 =$
$= 1382,4-2,64x$ (тыс.руб.)

с ~~февр.~~ по июнь 2029 г ~~Авг. 2029~~ вносится платёж, и т.к. ~~кредит и~~ долг погашается полностью, то платёж равен оставш. ~~суммы~~ долга, т.е. $1382{,}4-2{,}64x$ (тыс. руб.).

Известно, что сумма всех платежей равна 1254,4 тыс. руб т.е.

$$x+x+1382{,}4-2{,}64x=1254{,}4$$

$$0{,}64x=128$$

$$x=\frac{128}{0{,}64}=\frac{128\cdot 100}{64}=200 \quad \text{(тыс. руб.)}$$

Т.е. платёж 2027 г. составл. 200 тыс. руб. = 200.000 руб.

Ответ: 200 тыс. руб. (или же 200.000 руб)

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.4.3**

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

**Ответ:** 200 тыс. рублей.

Пусть $S = 800$ тыс руб – сумма кредита, процент $p = 20$,
платежи 2027 и 2028 г по $x$ тыс руб кождый, $y$ - платеж 2029 г
Каждый январь долг возрастает в $1 + \frac{p}{100} = 1{,}2$ раза
Тогда получим систему уравнений:

$$\begin{cases} ((S \cdot 1{,}2 - x) \cdot 1{,}2 - x) \cdot 1{,}2 - y = 0 \\ 2x + y = 1254{,}4 \end{cases}$$

$1{,}728S - 2{,}64x - y = 0$

$y = 1{,}728S - 2{,}64x$

$2x + 1{,}728S - 2{,}64x = 1254{,}4$

$0{,}64x = 1{,}728S - 1254{,}4$

$0{,}64x = 128$

$64x = 12800$

$x = 100$

Ответ: 100 тыс. руб.

***Комментарий.***

Верно построена математическая модель. Линейное уравнение решено неверно.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 16.4.4**

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года в размере 800 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;

— платежи в 2027 и 2028 годах должны быть равными;

— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.

Известно, что сумма всех платежей после полного погашения кредита будет равна 1254,4 тыс. рублей. Сколько рублей составит платёж 2027 года?

**Ответ:** 200 тыс. рублей.

Пусть март – месяц платежа

Пуст $x$ – выплата в 2027 г. ~~...~~ = выплате в 2028 г.

Тогда $y$ – выплата в 2029 г.

| Дата | Долг |
|---|---|
| июль 2026 | 800 |
| янв (2027) | $0{,}2\cdot 800 = 160$ |
| март (2027) | $\Rightarrow$ была выплата $= x$ |
| июль (2027) | $160 - x$ |
| янв (2028) | $0{,}2(160-x) = 32 - 0{,}2x$ |
| март (2028) | $\Rightarrow$ была выпл. $= x$ |
| июль (2028) | $32 - 0{,}2x - x = 32 - 1{,}2x$ |
| янв (2029) | $0{,}2(32-1{,}2x) = 6{,}4 - 0{,}24x$ |
| март (2029) | $\Rightarrow$ была выпл. $= y$ |
| июль (2029) | $6{,}4 - 0{,}24x - y$ |

$$\begin{cases} 6{,}4 - 0{,}24x - y = 0 \\ 2x + y = 1254{,}4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 1254{,}4 - 2x \\ 6{,}4 - 0{,}24x - 1254{,}4 + 2x = 0 \end{cases}$$

$$1{,}76x - 1248 = 0$$

$$x = \frac{1248}{1{,}76}$$

$$x = \frac{7800}{11} \approx 709 \text{ тыс. р.}$$

Ответ: 709 тыс. р.

***Комментарий.***

Неверно построена математическая модель.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

## Пример 16.5.1

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где $r$ – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Долг (в млн руб.) | 1 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0 |

Найдите наименьшее значение $r$, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

**Ответ:** 5.

Всего было 6 выплат: $P_1, P_2, P_3\ P_4, P_5, P_6$.

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 > 1{,}2$

$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = S$

$P_1 = (1 + \frac{r}{100}) - 0{,}9$

$P_2 = 0{,}9(1+\frac{r}{100}) - 0{,}8$

$P_3 = 0{,}8(1+\frac{r}{100}) - 0{,}7$

$P_4 = 0{,}7(1+\frac{r}{100}) - 0{,}6$

$P_5 = 0{,}6(1+\frac{r}{100}) - 0{,}5$

$P = 0{,}5(1+\frac{r}{100})$

| $r$ | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | $P_4$ | $P_5$ | $P_6$ | $S$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 0,17 | 0,163 | 0,156 | 0,149 | 0,142 | 0,535 | 1,315 |
| 5 | 0,15 | 0,145 | 0,14 | 0,135 | 0,13 | 0,525 | 1,225 |
| 4 | 0,14 | 0,136 | 0,132 | 0,128 | 0,124 | 0,52 | 1,18 |

Наименьшим числом $r$, при котором $S > 1{,}2$ является 5. При $r = 4$, $S < 1{,}2$.

Ответ: 5

***Комментарий.***

Математическая модель построена верно. Усложняет проверку отсутствие вычислений. В таблице все результаты вычислений по формулам, записанным справа, верные. Логика решения верна.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.5.2**

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, причём $r$ – **целое** число;

– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Долг (в млн руб.) | 1 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0 |

Найдите наименьшее значение $r$, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

**Ответ:** 5.

Дано:

$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 > 1{,}2$ млн , где $x$ – выплата

$N = 1$ – сумма кредита

$r_{min}$ – ? , где $r$ – % $\quad r \in \mathbb{Z}$

$X_1 = N + \frac{rN}{100} - 0{,}9$ ; $X_2 = 0{,}9 + \frac{r \cdot 0{,}9}{100} - 0{,}8$ ; $X_3 = 0{,}8 + \frac{r \cdot 0{,}8}{100} - 0{,}7$ ;

$X_4 = 0{,}7 + \frac{r \cdot 0{,}7}{100} - 0{,}6$ ; $X_5 = 0{,}6 + \frac{r \cdot 0{,}6}{100} - 0{,}5$ ; $X_6 = 0{,}5 + \frac{r \cdot 0{,}5}{100}$

$1 + \frac{r}{100} - 0{,}9 + 0{,}9 + \frac{r \cdot 0{,}9}{100} - 0{,}8 + 0{,}8 + \frac{r \cdot 0{,}8}{100} - 0{,}7 + 0{,}7 + \frac{r \cdot 0{,}7}{100} - 0{,}6 + 0{,}6 +$
$+ \frac{r \cdot 0{,}6}{100} - 0{,}5 + 0{,}5 + \frac{r \cdot 0{,}5}{100} > 1{,}2$

$1 + \frac{3{,}5r}{100} > 1{,}2$ $\qquad r > \frac{20}{3{,}5}$ $\qquad$ Ответ: $r = 5\%$

$\frac{3{,}5r}{100} > 0{,}2$ $\qquad r_{min} = 5\%$

***Комментарий.***

Математическая модель построена верно. Допущены ошибки: $1+\frac{4,5r}{100}>1,2$, а не $1+\frac{3,5r}{100}>1,2$; $\frac{20}{3,5}>5,7$, т.е. должно быть $r=6$.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 16.5.3**

15 января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн руб. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r$ процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где $r$ – **целое** число;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Долг(в млн руб.) | 1 | 0,9 | 0,8 | 0,7 | 0,6 | 0,5 | 0 |

Найдите наименьшее значение $r$, при котором общая сумма выплат будет больше 1,2 млн руб.

**Ответ:** 5.

| месяц | сумма долга 1-го числа (млн р) | сумма долга (млн) 15-го числа | сумма выплат |
|---|---|---|---|
| 1 | | 1 млн | |
| 2 | $1+1\cdot r$ | 0,9 | $1+1r-0,9$ |
| 3 | $0,9+0,9\cdot r$ | 0,8 | $0,9+0,9-0,8$ |
| 4 | $0,8+0,8r$ | 0,7 | $0,8+0,8r-0,7$ |
| 5 | $0,7+0,7\cdot r$ | 0,6 | $0,7+0,7r-0,6$ |
| 6 | $0,6+0,6r$ | 0,5 | $0,6+0,6r-0,5$ |
| 7 | $0,5+0,5r$ | 0 | $0,5+0,5r$ |

тогда общая сумма выплат:

$$1+1\cdot r-\cancel{0,9}+\cancel{0,9}+0,9r-\cancel{0,8}+\cancel{0,8}+0,8r-\cancel{0,7}+\cancel{0,7}+0,7r-$$
$$-\cancel{0,6}+\cancel{0,6}+0,6r-\cancel{0,5}+\cancel{0,5}+0,5r=$$
$$=1+r+0,9r+0,8r+0,7r+0,6r+0,5r=1+4,5r$$

Общая сумма выплат должна быть больше 1,2 млн =>

$$=>\ 1+4,5r>1,2$$
$$4,5r>0,2$$
$$r>2,25$$

т.к. $r$-целое число, то наименьшее $r=3$.

Ответ: $r$ наименьшее $=3$

***Комментарий.***

Математическая модель построена неверно. Если подставить в таблицу число 3 вместо $r$, то сумма долга уже на 1-е число второго месяца должна составить 4 млн руб. Кроме того, ещё и неравенство решено неверно.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 16.6.1**

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите $r$.

**Ответ:** 1.

S – сумма, которую взяли в кредит

x – сумма, на которую каждый раз уменьшается долг.

$\frac{r\%}{100} = n$, где ~~на~~ на $r\%$ ~~-на~~ возрастает долг.

| | банк | выплаты |
|---|---|---|
| 1. | $S + Sn$ | $Sn + x$ |
| 2. | $S - x + (S-x)n$ | $(S-x)n + x$ |
| ⋮ | | |
| 39. | $S - 38x + (S-38x)n$ | $(S-38x)n + x \Rightarrow S - 38x + (S-38x)n = (S-38x)n + x \Rightarrow$ |
| 40. | $0$ | $\Rightarrow S = 39x$ |

Z – сумма выплат

По условию: $Z - S = 0{,}2S$

$Z = Sn + x + (S-x)n + x + \ldots + (S-38x)n + x = 39x + n(39S - (x + 2x + \ldots + 38x)) = 39x + n\left(39S - x\left(\frac{1+38}{2} \cdot 38\right)\right) = 39x + n \cdot 39S - nx \cdot 39 \cdot 19 = 39x + n \cdot 39 \cdot 39x - n \cdot 39 \cdot 19x = 39x + 39 \cdot 20nx \Rightarrow$

$\Rightarrow 39x + 39 \cdot 20nx - 39x = 0{,}2 \cdot 39x \Rightarrow 39 \cdot 20nx = 0{,}2 \cdot 39x \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \frac{0{,}2}{20} = \frac{1}{100}$; $r = n \cdot 100 \Rightarrow r = 1\%$

Ответ: 1%.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 16.6.2**

15 января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца;
– со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
– 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите $r$.

**Ответ:** 1.

Всего 39 месяцев. Пусть сумма, взятая в кредит – $S$. Пусть $k = \frac{r}{100}$ – коэффициент начисления процентов. ~~Тогда~~. Выплаты каждый месяц будут состоять: из части долга $\frac{S}{39}$ + проценты за месяц.
Проценты за месяц, вычисляются по формуле:

1 месяц. 2 м. 3 м 39 м.

$$S\cdot k + \frac{38S\cdot k}{39} + \frac{37S\cdot k}{39} \dots \frac{S\cdot k}{39}.$$

Применим формулу арифметической прогрессии

$$N = \left(\frac{x_1 + x_n}{2}\right)\cdot n$$

$$\text{Проценты} = \left(\frac{S\cdot k + \frac{S\cdot k}{39}}{2}\right)\cdot 39 = \frac{39S\cdot k + S\cdot k}{2} = \frac{40S\cdot k}{2} = 20Sk.$$

Часть долга:

1 м 2 м 39 м

$$\frac{S}{39} + \frac{S}{39} + \dots + \frac{S}{39} = S.$$

Общие выплаты: $k = \frac{r}{100}$

$S + 20\cdot S\cdot k = 1{,}2\cdot S$ $\quad 0{,}01\cdot 100 = r \Rightarrow r = 1\%$

$20k = 0{,}2.$ $\quad$ Ответ: 1%

$k = 0{,}01$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

# 5. Критерии проверки и оценка решений задания 17

Задание № 17 — это планиметрическая задача. В пункте *а* нужно **доказать** геометрический факт, в пункте *б* – найти (вычислить) геометрическую величину.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

**Задача 17 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)**

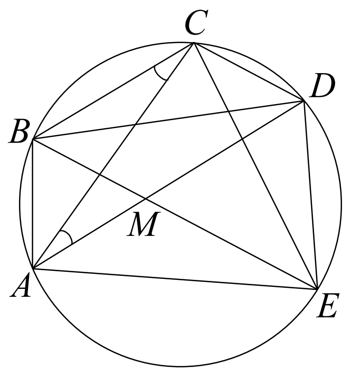
Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали $BE$, если $AD = 6$.

**Решение.**

а) В четырёхугольнике $ABCD$ острые углы $ACB$ и $CAD$ опираются на равные хорды $AB$ и $CD$. Следовательно, $\angle ACB = \angle CAD$, а значит, прямые $BC$ и $AD$ параллельны. Аналогично прямые $CD$ и $BE$ параллельны.




Значит, четырёхугольники $ABCD$ и $BCDE$ являются равнобедренными трапециями. Следовательно, $AC = BD = CE$.

б) Обозначим точку пересечения диагоналей $AD$ и $BE$ через $M$. Четырёхугольник $BCDM$ является параллелограммом, поскольку его противоположные стороны параллельны. Значит: $BM = CD = AB = 3$, $DM = BC = DE = 4$. Следовательно, треугольники $ABM$ и $MDE$ равнобедренные, причём $\angle BAM = \angle AMB = \angle DME = \angle DEM$. Значит, эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $\frac{DE}{AB} = \frac{4}{3}$, откуда получаем:

$$ME = \frac{DE}{AB} \cdot AM = \frac{DE}{AB} \cdot \left( AD - DM \right) = \frac{8}{3};$$

$$BE = BM + ME = \frac{17}{3}.$$

**Ответ:** б) $\frac{17}{3}$.

**ИЛИ**

В параллелограмме $ABCD$ с острым углом $BAD$ из вершины $B$ проведены высоты $BP$ и $BQ$, причём точка $P$ лежит на стороне $AD$, а точка $Q$ — на стороне $CD$. На стороне $AD$ отмечена точка $M$. Известно, что $AM = BP$, $AB = BQ$.

а) Докажите, что $BM = PQ$.

б) Найдите площадь треугольника $APQ$, если $AM = BP = 8$, $AB = BQ = 10$.

**Решение.**

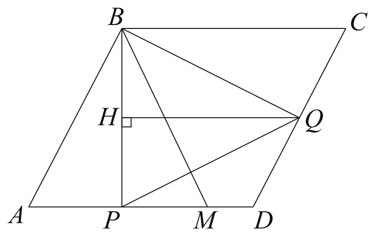
а) Заметим, что:

$$\angle ABC = 180° - \angle BAD,\ \angle ABP = 90° - \angle BAD,\ \angle CBQ = 90° - \angle BCD = 90° - \angle BAD.$$

Таким образом,

$$\angle PBQ = \angle ABC - \angle ABP - \angle CBQ = \angle BAD.$$

Значит, треугольники $MAB$ и $PBQ$ равны, поскольку $AM = BP$, $AB = BQ$ и $\angle MAB = \angle PBQ$. Следовательно, $BM = PQ$.




б) В треугольнике $ABP$, по теореме Пифагора, получаем: $AP = \sqrt{AB^2 - BP^2} = 6.$
Пусть $QH$ — высота треугольника $BQP$. Тогда треугольники $ABP$ и $BQH$ равны, поскольку $AB = BQ$, $\angle BAP = \angle QBH$ и $\angle APB = \angle BHQ = 90°$. Следовательно, $BH = AP = 6$. Значит, $PH = BP - BH = 2$.
Площади треугольников $APQ$ и $APH$ равны, поскольку прямые $AP$ и $QH$ параллельны.
Площадь треугольника $APH$ равна

$$\frac{AP \cdot PH}{2} = \frac{6 \cdot 2}{2} = 6.$$

Следовательно, площадь треугольника $APQ$ равна 6.
**Ответ:** б) 6.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

### Задание 17.1

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром $O$. Эта окружность касается стороны $MN$ в точке $A$. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle NKL = \angle KLM = 120°$.

а) Докажите, что точка $A$ лежит на прямой $LO$.

б) Найдите длину стороны $MN$, если $LA = 1$.

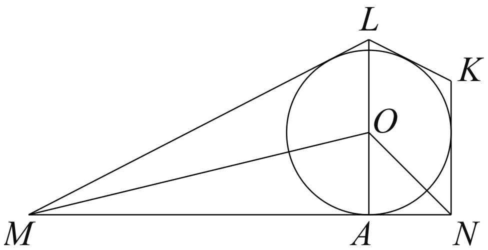
**Решение.**

а) Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе этого угла. Следовательно, $LO$ — биссектриса угла $KLM$, а значит,

$$\angle KLO = \frac{\angle KLM}{2} = 60°.$$

Прямые $LO$ и $KN$ параллельны, поскольку $\angle NKL + \angle KLO = 180°$. Следовательно, прямая $LO$ перпендикулярна прямой $MN$, так как $\angle MNK = 90°$.

Отрезок $OA$ перпендикулярен прямой $MN$ как радиус окружности, касающейся этой прямой. Через точку $O$ проходит единственная прямая, перпендикулярная прямой $MN$. Значит, точки $L$, $O$ и $A$ лежат на одной прямой, то есть точка $A$ лежит на прямой $LO$.




б) В прямоугольном треугольнике $LAM$ угол $MLA$ равен $60°$. Значит:

$$MA = LA \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}, \ \ ML = 2LA = 2,$$

откуда, учитывая, что $MO$ — биссектриса угла $LMA$, получаем:

$$OA = \frac{MA}{MA + ML} \cdot LA = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2} = 2\sqrt{3} - 3.$$

В прямоугольном треугольнике $NAO$ угол $ANO$ равен 45°, поскольку $NO$ — биссектриса угла $KNA$. Значит, $AN = OA = 2\sqrt{3} - 3$. Следовательно,

$$MN = MA + AN = 3\sqrt{3} - 3.$$

**Ответ:** б) $3\sqrt{3} - 3$.

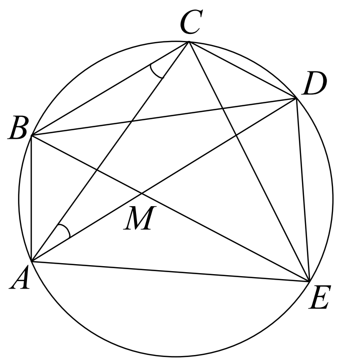
**Задание 17.2**

Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали $BE$, если $AD = 6$.

**Решение.**




а) В четырёхугольнике $ABCD$ острые углы $ACB$ и $CAD$ опираются на равные хорды $AB$ и $CD$. Следовательно, $\angle ACB = \angle CAD$, а значит, прямые $BC$ и $AD$ параллельны. Аналогично прямые $CD$ и $BE$ параллельны.

Значит, четырёхугольники $ABCD$ и $BCDE$ являются равнобедренными трапециями. Следовательно, $AC = BD = CE$.

б) Обозначим точку пересечения диагоналей $AD$ и $BE$ через $M$. Четырёхугольник $BCDM$ является параллелограммом, поскольку его противоположные стороны параллельны. Значит: $BM = CD = AB = 3$, $DM = BC = DE = 4$. Следовательно, треугольники $ABM$ и $MDE$ равнобедренные, причём $\angle BAM = \angle AMB = \angle DME = \angle DEM$. Значит, эти треугольники подобны с коэффициентом подобия $\frac{DE}{AB} = \frac{4}{3}$, откуда получаем:

$$ME = \frac{DE}{AB} \cdot AM = \frac{DE}{AB} \cdot \left( AD - DM \right) = \frac{8}{3};$$

$$BE = BM + ME = \frac{17}{3}.$$

**Ответ:** б) $\frac{17}{3}$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

### Задание 17.3

Биссектрисы углов $BAD$ и $BCD$ равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Через точку $O$ провели прямую, параллельную основаниям $BC$ и $AD$.
а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.
б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону $AB$ в отношении $AM : MB = 1:2$.

**Решение.**

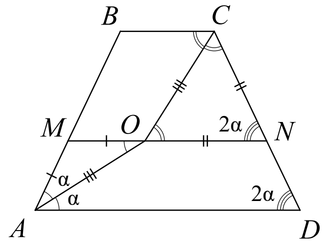


Рис. 1

а) Прямые $MO$ и $AD$ параллельны, значит, $\angle MOA = \angle OAD$ (рис. 1). Следовательно, треугольник $AMO$ равнобедренный и $AM = MO$. Аналогично $CN = NO$.
Поскольку $MB = CN$, получаем:

$$AB = AM + CN = MO + ON = MN.$$

б) Пусть $\angle OAD = \angle OAM = \alpha$. Тогда

$$\angle CNO = \angle CDA = \angle BAD = 2\alpha.$$

Пусть $MO = AM = a$. Тогда

$$MB = CN = ON = 2a.$$

По теореме косинусов для треугольников $AMO$ и $CNO$ имеем:

$$AO^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \cos(180° - 2\alpha),$$

$$OC^2 = 4a^2 + 4a^2 - 8a^2 \cdot \cos 2\alpha,$$

откуда получаем:

$$2a^2 + 2a^2 \cdot \cos 2\alpha = 8a^2 - 8a^2 \cdot \cos 2\alpha;\ \cos 2\alpha = \frac{3}{5}.$$

Проведём высоты $M_1M_2$ и $N_1N_2$ через точки $M$ и $N$ соответственно (рис. 2) и найдём длины оснований трапеции:

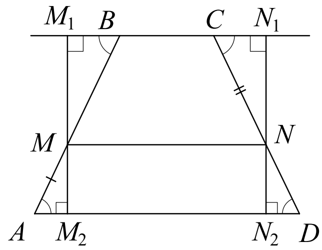


Рис. 2

$$AD = AM_2 + M_2N_2 + N_2D =$$
$$= MN + 2AM \cdot \cos 2\alpha =$$
$$= 3a + \frac{6}{5}a = \frac{21}{5}a,$$
$$BC = M_1N_1 - M_1B - CN_1 = MN - 2BM \cdot \cos 2\alpha =$$
$$= 3a - \frac{12}{5}a = \frac{3}{5}a.$$

Таким образом, $BC : AD = 1:7$.

**Ответ:** б) $1:7$.

## Задание 17.4

В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB$ перпендикулярна основаниям. Из точки $A$ на сторону $CD$ опустили перпендикуляр $AH$. На стороне $AB$ отмечена точка $E$ так, что прямые $CD$ и $CE$ перпендикулярны.
а) Докажите, что прямые $BH$ и $ED$ параллельны.
б) Найдите отношение $BH$ к $ED$, если $\angle BCD = 120°$.

**Решение.**
а) Поскольку

$$\angle ABC = \angle AHC = \angle ECD = \angle EAD = 90°,$$

около четырёхугольников $ABCH$ и $AECD$ можно описать окружности (рис. 1).

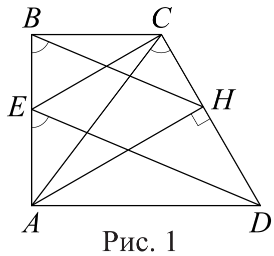


Рис. 1

Значит,

$$\angle ABH = \angle ACH = \angle ACD = \angle AED,$$

то есть прямые $BH$ и $ED$ параллельны.
б) Опустим из точки $B$ перпендикуляр $BK$ на прямую $CD$ (рис. 2). Стороны $KH$ и $CD$ треугольников $BKH$ и $ECD$ лежат на одной прямой, а стороны $BK$ и $EC$, $BH$ и $ED$ попарно параллельны. Значит, треугольники $BKH$ и $ECD$ подобны.

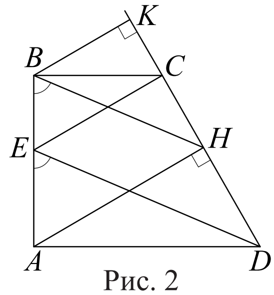


Рис. 2

Поскольку

$$BK = BC \cdot \sin \angle BCK = EC \cdot \cos \angle ECB \cdot \sin \angle BCK =$$

$$= EC \cdot \cos 30° \cdot \sin 60° = \frac{3}{4} EC,$$

коэффициент подобия равен $\frac{3}{4}$. Значит,

$$BH : ED = 3 : 4.$$

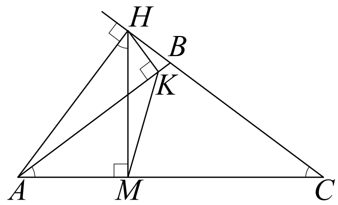
**Ответ:** б) $3:4$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

## Задание 17.5

В равнобедренном тупоугольном треугольнике $ABC$ на продолжение боковой стороны $BC$ опущена высота $AH$. Из точки $H$ на сторону $AB$ и основание $AC$ опущены перпендикуляры $HK$ и $HM$ соответственно.
а) Докажите, что отрезки $AM$ и $MK$ равны.
б) Найдите $MK$, если $AB = 5$, $AC = 8$.

**Решение.**




а) Поскольку $\angle AMH = \angle AKH = 90°$, около четырёхугольника $AMKH$ можно описать окружность с диаметром $AH$. Получаем:

$$\angle BAC = \angle BCA = 90° - \angle HAC = \angle AHM,$$

поэтому $AM = MK$ как хорды, стягивающие равные дуги.

б) В прямоугольных треугольниках $AHM$ и $ACH$ имеем:

$$AM = AH \cdot \cos\angle HAM = AC \cdot \cos^2\angle HAM = AC \cdot \left(1 - \cos^2\angle ACB\right).$$

Поскольку $\cos\angle ACB = \dfrac{AC}{2BC} = \dfrac{4}{5}$, получаем:

$$MK = AM = \frac{72}{25}.$$

**Ответ:** б) $\dfrac{72}{25}$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

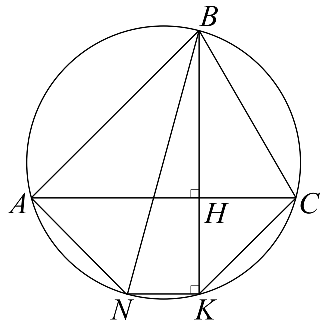
## Задание 17.6

В остроугольном треугольнике $ABC$ все стороны различны. Прямая, содержащая высоту $BH$ треугольника $ABC$, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке $K$. Отрезок $BN$ – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите $NK$, если радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности равен 16, $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 85°$.

**Решение.**




а) Поскольку $BN$ – диаметр описанной около треугольника $ABC$ окружности, получаем

$$\angle ABN = 90° - \angle ANB = 90° - \angle ACB =$$
$$= 90° - \angle HCB = \angle CBH = \angle CBK.$$

Следовательно, хорды $AN$ и $CK$ стягивают равные дуги, а значит, они равны.

б) Пусть $R = 16$ – радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$. Имеем:

$$\angle ABN = \angle CBH = 90° - \angle HCB = 5°,$$
$$\angle ABC = 180° - \angle BAC - \angle ACB = 55°;$$
$$\angle KBN = \angle ABC - \angle ABN - \angle CBK = 45°.$$

Следовательно, по теореме синусов

$$NK = 2R \cdot \sin \angle KBN = 2R \cdot \sin 45° = 16\sqrt{2}.$$

**Ответ:** б) $16\sqrt{2}$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б* | 3 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки | 2 |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *3* |

## Примеры оценивания решений задания 17

**Пример 17.1.1**

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром $O$. Эта окружность касается стороны $MN$ в точке $A$. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle NKL = \angle KLM = 120°$.

а) Докажите, что точка $A$ лежит на прямой $LO$.

б) Найдите длину стороны $MN$, если $LA = 1$.

**Ответ:** б) $3\sqrt{3} - 3$.

№17

Дано:

KLMN-опис.

O-центр

$A \in MN$

A-т. касания

$\angle MNK = 90°$

$\angle NKL = \angle KLM = 120°$

а) Д-ть:

$A \in LO$

б) $MN$-?

$LA = 1$

Решение:

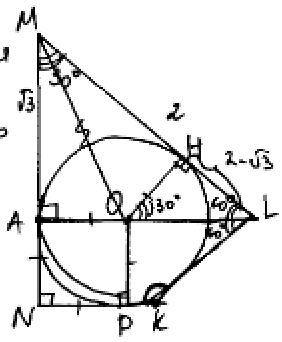
а) 1) центр. впис. окружн. лежит в т. пересечения бис-с =>

LO-бис-са $\angle MLK$

$\Rightarrow \angle MLO = \angle OLK = \frac{1}{2}\angle MLK = 60°$

$\angle LKN = 120°$ (по усл.)

Т.о. $\angle OLK + \angle LKN = 60° + 120° = 180°$ - одностор. углы




$\Rightarrow LO \parallel KN$,

т.к. $\angle KNM = 90° \Rightarrow LO \perp MN$

т.к. A-точка кас.; $A \in MN \Rightarrow OA \perp MN$ радиус, пров. в точку кас.

$\Rightarrow OA \parallel KN \Rightarrow A \in LO$ чтд

$O \in LO$

$LO \parallel KN$

б) $MN$-? ; $LA = 1$

1) Рассм. $\triangle MAL$ - прям. уг. ($\angle MAL = 90°$)

$\angle MLA = 60° \Rightarrow \angle AML = 90° - 60° = 30° \Rightarrow$

по св-ву: $ML = 2 \cdot AL = 2 \cdot 1 = 2$

кат. противолежащий углу 30°

2) По Т. Пиф. для $\triangle AML$: $ML^2 = AM^2 + AL^2 \Rightarrow AM = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

3) Проведём OP и OH - радиусы в т. касания ($P \in NK$, $H \in ML$)

$OP \perp NK$; $OH \perp ML$

Рассм. $\triangle MHO$: проведём MO. $\triangle MHO = \triangle MAO$ по катету и гипот.

($AO = OH = R$ - рад.)

MO-общ.

тогда $AM = MH = \sqrt{3} \Rightarrow HL = ML - MH = 2 - \sqrt{3}$

4) Рассм. $\triangle OHL$: прям. уг., OL-гип.; $\angle HOL = 90° - \angle MLO = 90° - 60° = 30°$

$\Rightarrow$ по св-ву: $OL = 2HL = 2 \cdot (2-\sqrt{3}) = 4 - 2\sqrt{3}$

тогда $R = OH = \sqrt{OL^2 - HL^2} = \sqrt{(4-2\sqrt{3})^2 - (2-\sqrt{3})^2} = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2 \cdot 3} = (2-\sqrt{3}) \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3 = OA$

5) Рассм. NAOP: $AO \parallel NP$, $AO \perp AN$, $AO = OP$ $\Rightarrow$ NAOP- квадр. $\Rightarrow NA = AO = R = 2\sqrt{3} - 3$

6) Т.о. $MN = MA + AN = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} - 3$ Ответ: б) $3\sqrt{3} - 3$

***Комментарий.***

$y = 4x \cdot \cos\alpha = 2x \cdot \sin\alpha$

$\Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = 2$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

1) $\angle KBC = \angle KCB = \angle KMN = \angle KNM =$

$= \angle BAD = \angle CDA \Rightarrow$

$\triangle AKD \sim \triangle KMN \sim \triangle KBC$

$\Rightarrow \quad \frac{BC}{KB} = \frac{AD}{BK+3x}$

$\triangle KMN$

$\angle BKC = 4\alpha - 180°$

$$\frac{MN}{\sin(4\alpha - 180°)} = \frac{3x}{-\sin 4\alpha} = \frac{BK + 2x}{\cancel{\sin(90°}\ \sin(180° - 2\alpha)}$$

$$BK + 2x = 3x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{-\sin 4\alpha} = \frac{3x}{-2\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{3x}{-2 \cdot (1 - 2\sin^2\alpha)} = \frac{3x}{2 \cdot \cancel{25}\ \cancel{\frac{40-25}{25}}\ \frac{4}{5}} = \frac{5x}{2}$$

$BK = 0{,}5x$

$\frac{BC}{AD} = \frac{BK}{BK+3x} = \frac{0{,}5x}{3{,}5x} = \frac{1}{7}$

Ответ: $AD : BC = 7 : 1$

Приведено верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 17.1.2**

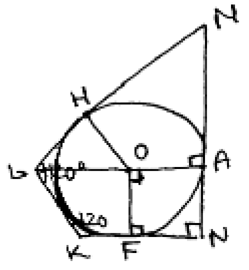
В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром $O$. Эта окружность касается стороны $MN$ в точке $A$. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle NKL = \angle KLM = 120°$.

а) Докажите, что точка $A$ лежит на прямой $LO$.

б) Найдите длину стороны $MN$, если $LA = 1$.

**Ответ:** б) $3\sqrt{3} - 3$.

517




Дано: MNKL – впис. четырёхуг.

$\angle MNK = 90°$, $\angle LKN = \angle KLM = 120°$

а) Д-ть: (·)A лежит на LO

б) MN-? если LA = 1

б) т.к $\angle MNK = 90°$, $\angle LKN = \angle KLM$ ⇒ $\angle LMN = 360 - 120 - 120 - 90 = 30°$ ⇒ Рассм $\triangle LAM$:

$\angle LMA = 30°$, $LA = 1$, $LA \perp AM$ (радиус ⊥ в кас.) ⇒ $LM = 2LA = 2$

по т П: $MA = \sqrt{LM^2 - LA^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}$

$HM = MA$ (т.к исходят от (·) M) ⇒ $HM = MA = \sqrt{3}$ ⇒

⇒ $LH = LM - HM = 2 - \sqrt{3}$

Рассм LHOF:

$\angle LHO = \angle OFL = 90°$ (радиусы в т. кас ⊥), $\angle HLF = 120°$ ⇒ $\angle HOF = 360 - 120 - 90 - 90 = 60°$

Рассм $\triangle LOH$ и $\triangle LOF$:

$\angle LFO = \angle LHO = 90°$

$OH = OF$ – радиусы

$LH = LF$ (из одной точки к окр)

⇒ $\triangle LOH = \triangle LOF$ (по 2-м катетам и углу) ⇒

⇒ $\angle LOF = \angle HOL = \frac{1}{2}\angle HOF = 30°$ ⇒ $LO = 2HL = 4 - 2\sqrt{3}$ (т.к напрот. $\angle 30°$)

⇒ $OA = LA - LO = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$ ⇒

⇒ Рассм. FNAO:

$\angle FNA = 90°$

$\angle OFN = \angle OAN = 90°$ (радиусы к кас) ⇒ FNAO – квадрат ⇒

⇒ $NA = 2\sqrt{3} - 3 = OA$ ⇒ $MN = MA + AN = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3 = 3\sqrt{3} - 3$

Ответ: б) $MN = 3\sqrt{3} - 3$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен

**Оценка эксперта: 1 балл.**

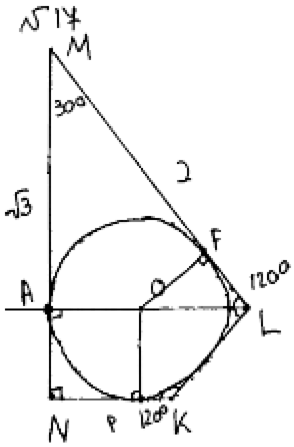
**Пример 17.1.3**

В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром $O$. Эта окружность касается стороны $MN$ в точке $A$. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle NKL = \angle KLM = 120°$.

а) Докажите, что точка $A$ лежит на прямой $LO$.

б) Найдите длину стороны $MN$, если $LA = 1$.

**Ответ:** б) $3\sqrt{3} - 3$.




а) Т.к окружность с ц.O касается MN в т.A, то $\angle OAN = 90°$, ML и LK - касательные к окружности, LO - секущая, тогда по св-ву касательной и секущей $\angle MLA = \angle ALK = \frac{1}{2}\angle MLK = 60°$

Заметим, что $\angle ANK + \angle NKL + \angle KLA + \angle LAN = 90° + 120° + 60° + 90° = 360°$, ~~значит ANKL - четыр~~ значит ANKL - четырехугольник, AL - сторона четырехугольника, значит т.A лежит на прямой LO что

б) $ML = \frac{AL}{\sin\angle AML} = \frac{AL}{\frac{1}{2}} = 2$, $AM = ML\sin 60° = \sqrt{3}$

проведем OF, где F - точка касания ML окружности

$MA = MF = \sqrt{3}$ (как отрезки касательных из одной точки)

$FL = ML - MF = 2 - \sqrt{3}$

Рассмотрим $\triangle OFL$: $FL = OL\cos 60°$

$OL = \frac{FL}{\cos 60°} = 4 - 2\sqrt{3}$

$AO = AL - OL = 1 - 4 + 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3$

Проведем OP, где P - т.касания NK окружности, $\angle NPO = 90°$, Рассмотрим AOPN $\angle ANP = \angle NPO = \angle OAN = 90°$, тогда $\angle AOP = 90°$,

тогда AOPN - квадрат, $OP = OA$; $OA = NP$; $OP = NA$ (как радиусы)

$AN = OA = 2\sqrt{3} - 3$

$MN = MA + AN = 2\sqrt{3} - 3 + \sqrt{3} = 3\sqrt{3} - 3 = 3(\sqrt{3} - 1)$

Ответ: $MN = 3(\sqrt{3} - 1)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 17.1.4**

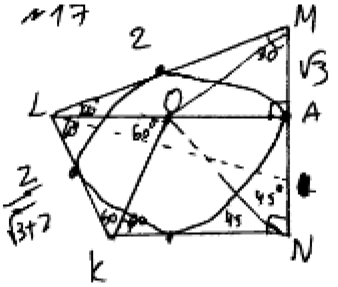
В четырёхугольник $KLMN$ вписана окружность с центром $O$. Эта окружность касается стороны $MN$ в точке $A$. Известно, что $\angle MNK = 90°$, $\angle NKL = \angle KLM = 120°$.

а) Докажите, что точка $A$ лежит на прямой $LO$.

б) Найдите длину стороны $MN$, если $LA = 1$.

**Ответ:** б) $3\sqrt{3} - 3$.

№17




а) т.к в $KLMN$ вписана окружность, то $MO, LO, KO,$ – биссектрисы $ON$.

$\Downarrow$

$\angle MLO = \angle OLK = \angle OKN = \angle OKL = 60°$

т.к (·)$O$ центр окружности, то $OA \perp MN$.

т.к $\left.\begin{matrix}\angle MLA = 60° \\ \angle LMA = 30°\end{matrix}\right\}$ $\Delta LMA$ – прямоугольный, а это возможно лишь тогда, когда (·)$O \in LA$ и $OA \perp MN$

б) в прям $\Delta LMA$: 7. т. 8

$\left.\begin{matrix}\angle LMA = 30° \\ LA = 1\end{matrix}\right\}$ $LM = 2 \cdot LA = 2$

По т. Пифагора:

$MA = \sqrt{LN^2 - LA^2} = \sqrt{3}$

т.к $MO$ – биссектриса, то по св. биссектрисы:

$\frac{LM}{LO} = \frac{MA}{OA}$ в $\Delta LOK$: $\angle OLK = 60 = \angle OKL$

$\Downarrow$

$\Delta LOK$ – правильный

$\Downarrow$

$\frac{2}{LO} = \frac{\sqrt{3}}{1 - LO}$

$2 - 2LO = LO \cdot \sqrt{3}$ $LO = LK = \frac{2}{\sqrt{3}+2}$

$LO = \frac{2}{\sqrt{3}+2}$ в $\Delta OAN$: $\left.\begin{matrix}\angle OAN = 90° \\ \angle ONA = 45°\end{matrix}\right\}$ $\Delta OAN$ – прямоугольный равнобедренный

$MN = \sqrt{3} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}+2} = 6\sqrt{3} - 6$ $OA = AN = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}+2}$

Ответ: $6\sqrt{3} - 6$

***Комментарий.***

Получен неверный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 17.2.1**

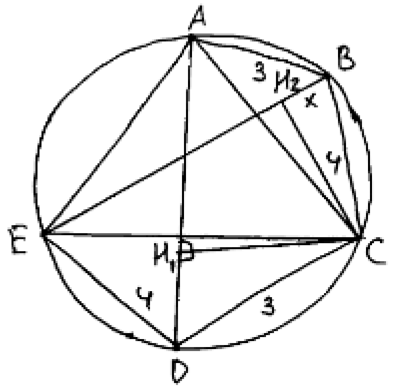
Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали $BE$, если $AD = 6$.

**Ответ:** б) $\frac{17}{3}$.

17




а) Д-ть: $AC = CE$

б) $BE$ - ? $AD = 6$

а) 1) $\breve{AB} = \breve{CD}$, т.к. их стягивают одинаковые хорды

$\breve{BC} = \breve{ED}$, т.к. их стягивают одинаковые хорды

2) $\angle ABC = \frac{1}{2}\breve{AE} + \frac{1}{2}\breve{ED} + \frac{1}{2}\breve{CD}$

$\angle EDC = \frac{1}{2}\breve{BC} + \frac{1}{2}\breve{AB} + \frac{1}{2}\breve{AE}$

из (1) следует, что $\angle ABC = \angle EDC \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC = \triangle EDC$ (по 2 стор и углу) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC = EC$ ч.т.д.

б) 1) $\angle BCA = \angle CAD$ (опираются на одинаковые дуги)

т.к. $\angle BCA$ и $\angle CAD$ накрест-лежащие $\Rightarrow AD \parallel BC \Rightarrow$

$\Rightarrow ABCD$ - р/б трап.

2) $CH_1$ - выс. трапеции $ABCD$

$H_1D = \frac{6-4}{2} = 1$

$\cos\angle H_1DC = \frac{1}{3}$

3) $\angle ADC = \angle EBC$ (опираются на одинаковые дуги)

$\angle ECD = \angle CEB$ (опираются на одинаковые дуги)

т.к. $\angle ECD$ и $\angle CEB$ накрест-лежащие $\Rightarrow EB \parallel CD \Rightarrow$

$\Rightarrow EBCD$ - р/б трап.

4) $CH_2$ - высота трап $EBCD$

$H_2B = x$

$EB = 2x + 3$

т.к. $\angle ADC = \angle EBC$ (из (3) п.)

$\Rightarrow \cos\angle EBC = \frac{H_2B}{4} = \frac{1}{3}$

$H_2B = \frac{4}{3} = x$

$EB = \frac{4}{3}\cdot 2 + 3 = \frac{17}{3}$

Ответ: $BE = \frac{17}{3}$

***Комментарий.***

Приведено верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 17.2.2**

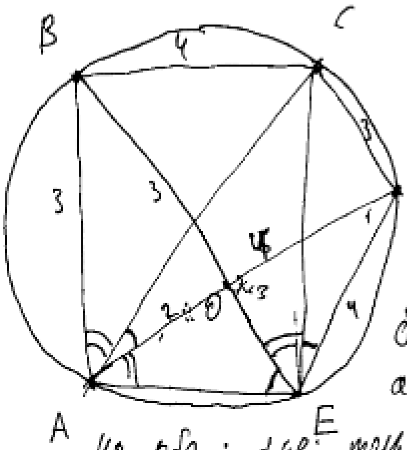
Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали $BE$, если $AD = 6$.

**Ответ:** б) $\frac{17}{3}$.

№17




а) 1) т.к. равные ~~дуги~~ хорды стягивают равные дуги; то $\cup BC = \cup DE$ и

2) $\cup BA = \cup CD$; тогда $\cup CA$; через $B = \cup CE$; через $D$

$\Rightarrow CA = CE$; т.к. равные дуги стягиваются равными хордами. $CA = CE$ ч.т.д.

б) пусть угол опир. на дугу с длин. $4 = \alpha$; а опир. на $3 = \beta$; тогда угол опир. на обе: $\alpha + \beta$; также пусть $BE \cap AD = O$; тогда

$\angle DOE = \frac{\cup DE + \cup BA}{2} = \alpha + \beta$; также $\angle DEO = \frac{\cup BC + \cup CD}{2} = \alpha + \beta$;

тогда $OD = DE = 4$; $BC \parallel OD$; т.к. $(\angle CBO = \angle DOE) \Rightarrow$

$\Rightarrow BCDO$ - параллелограмм $(BC \parallel OD;\ BC = OD) \Rightarrow BO = CD = 3$

2) $\triangle AOB \sim \triangle ODE$ $(\angle BAO = \angle BOA = \angle DOE = \angle DEO) \Rightarrow \frac{AO}{OE} = \frac{AB}{OD}$

$\frac{AO}{OE} = \frac{3}{4}$;

$\frac{AD - OD}{OE} = \frac{3}{4}$

$3OE = 4(AD - OD)$

$3OE = 4(6 - 4)$

$OE = \frac{8}{3}$

$BE = BO + OE = 3 + \frac{8}{3} = 5\frac{2}{3}$

Ответ: а) доказано б) $BE = 5\frac{2}{3}$.

***Комментарий.***

Приведено верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 17.2.3**

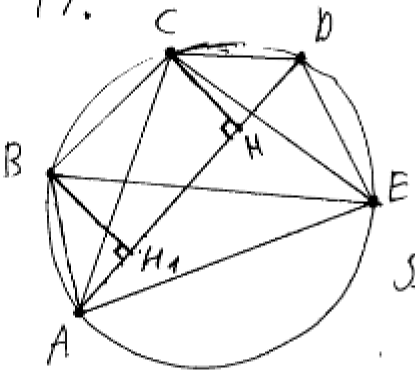
Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали $BE$, если $AD = 6$.

**Ответ:** б) $\frac{17}{3}$.

17.




Дано: $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$

б) $AD = 6$

а) Доказать: $AC = CE$

б) Найти: $BE$

Решение: $AB = CD$, $BC = DE$ $\Rightarrow$ $\angle ACB = \angle CED$, $\angle DAC = \angle DCE$

(т.к. равные хорды стягивают равные дуги)

$\angle ABC = 180^\circ - \angle BAC - \angle ACB = 180^\circ - \angle DCE - \angle CED = \angle CDE$, $AB = CD$, $BC = DE$ $\Rightarrow$ а

$\Rightarrow$ $\triangle ABC = \triangle CDE$ по 2-м сторонам и углу $\Rightarrow$ $AC = CE$, ч.т.д.

б) $\angle ACB = \angle CED$ (т док. из а)) $= \angle CAD$ (опир. на $\smile CD$) $\Rightarrow$ $BC \parallel AD$, (т.к. накрест-лежащие углы равны) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $ABCD$ - трапеция по опр., $AB = CD$ $\Rightarrow$ $ABCD$ - равнобед. трапеция

Пусть $CH$ - высота $ABCD$, $BH_1$ - высота $ABCD$

17(2)

$\angle CHH_1 = 90^\circ = \angle HH_1B = \angle H_1BC \Rightarrow BCHH_1$ – прямоугольник $\Rightarrow$

$\Rightarrow BC = HH_1 = 4$

$\left.\begin{array}{l} \angle BAD = \angle CDH \text{ (т.к. } ABCD \text{ – равнобед. трап.)} \\ AB = CD \\ \angle BH_1A = \angle CHD = 90^\circ \end{array}\right| \Rightarrow \Delta ABH_1 = \Delta CHD$ по катету и углу $\Rightarrow$

$\Rightarrow AH_1 = HD = \frac{1}{2}(AD - H_1H) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

По т. Пифагора в $\Delta CHD$: $CH = \sqrt{CD^2 - HD^2} = 2\sqrt{2}$

$AH = AD - HD = 5$. По т. Пиф. в $\Delta ACH$: $AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} =$

$= \underline{4\sqrt{2}} = \underline{CE}$ (по док. из п. а))

По т. cos в $\Delta CDE$: $DE^2 = CD^2 + CE^2 - 2CD \cdot DE \cdot \cos\angle DCE$

$16 = 9 + 32 - \cos\angle DCE \cdot 24\sqrt{2}$

$24\sqrt{2}\cos\angle DCE = 25$, $\cos\angle DCE = \frac{25}{24\sqrt{2}}$

$\angle DCE = \angle BAC = \angle BEC$ (опираются на $\breve{BC}$) $\Rightarrow \cos\angle BEC = \frac{25}{24\sqrt{2}}$
(по док. из п. а))

По т. cos в $\Delta BEC$: $BC^2 = CE^2 + BE^2 - 2CE \cdot BE \cdot \cos\angle BEC$

$16 = 32 + BE^2 - 8\sqrt{2} \cdot BE \cdot \frac{25}{24\sqrt{2}}$, $0 = 16 + BE^2 - \frac{25}{3}BE$

$(BE - 3)(BE - \frac{16}{3}) = 0$

$\left[\begin{array}{l} BE = 3 \\ BE = \frac{16}{3} \end{array}\right.$ $BE = 3$ – невозможно, т.к. при $BE = 3$ $\breve{BE} = \breve{AB}$, тогда $A$ совпадает с $E$, что невозможно, т.к. по условию $ABCDE$ – 5-угольник

Ответ: $\frac{16}{3}$

***Комментарий.***

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а* и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки (при вычислении длины стороны *AC*).

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 17.2.4**

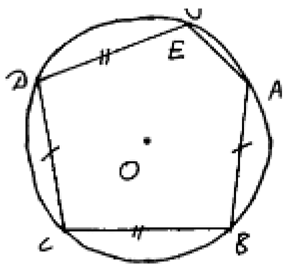
Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Известно, что $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$.

а) Докажите, что $AC = CE$.

б) Найдите длину диагонали $BE$, если $AD = 6$.

**Ответ:** б) $\frac{17}{3}$.

№17




Дано: $ABCDE$ – вписанный, $AB = CD = 3$, $BC = DE = 4$

а) Д-ть: $AC = CE$

б) $AD = 6$, $BE$ – ?

Решение:

а) 1. $CO = OD = R$, $OE = OB = R$, $DE = BC \Rightarrow \triangle DOE = \triangle COB$ (по 3-м ст.) $\Rightarrow \angle DOE = \angle COB \Rightarrow \smile DE = \smile BC$

2. $CO = OB = R$, $DO = AO = R$, $CD = AB \Rightarrow \triangle DOC = \triangle AOB \Rightarrow \angle DOC = \angle AOB \Rightarrow \smile DC = \smile AB$

3. $\angle CAB = \frac{1}{2}\smile BC$ – вписанный, $\angle DCE = \frac{1}{2}\smile DE = \frac{1}{2}\smile BC = \angle CAB$

$\angle ACB = \frac{1}{2}\smile AB$, $\angle DEC = \frac{1}{2}\smile CD = \frac{1}{2}\smile AB = \angle ACB$

$\angle ABC = 180° - \angle ACB - \angle CAB = 180° - \angle DEC - \angle DCE = \angle CDE$

4. $\angle ABC = \angle CDE$, $AB = CD$, $BC = DE \Rightarrow \triangle ABC = \triangle CDE$ (по 2-м ст. и углу м/ними) $\Rightarrow AC = CE$

ч.т.д.

б) 1. $ABCD$ – вписанный $\Rightarrow \angle BAD + \angle BCD = 180° \Rightarrow \cos\angle BCD = -\cos\angle BAD$

2. пусть $\cos\angle BCD = t$, $\cos\angle BAD = -t$

из т. косинусов для $\triangle ABD$: $BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2AD\cdot AB\cos\angle BAD$

$BD^2 = 36 + 9 + 2\cdot 6\cdot 3\cdot t = 45 + 36t$

из т. косинусов для $\triangle CBD$: $BD^2 = CD^2 + BC^2 - 2CD\cdot BC\cos\angle BCD$

$BD^2 = 9 + 16 - 2\cdot 3\cdot 4\cdot t = 25 - 24t$

$45 + 36t = 25 - 24t$; $60t = -20$; $t = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos\angle BCD = -\frac{1}{3}$

3. Из т. косинусов для $\triangle BED$: $BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2BE\cdot DE\cdot\cos\angle BED$

$\angle BED = \angle BAD$ – вписанные, опирающ. на одну хорду $BD \Rightarrow \cos\angle BED = \cos\angle BAD = -t = \frac{1}{3}$

4. $BD^2 = BE^2 + DE^2 - 2BE\cdot DE\cos\angle BED$; $BD^2 = BE^2 + 16 + 2\cdot EB\cdot 4\cdot\frac{1}{3}$

$BD^2 = BE^2 + 16 + \frac{8}{3}BE$; $BD^2 = 45 + 36t =$ $45 - 12 = 33$

$33 = BE^2 + 16 + \frac{8}{3}BE$; $BE^2 + \frac{8}{3}BE - 17 = 0$

$\frac{D}{4} = \frac{16}{9} + 17 = \frac{16+153}{9} = \frac{169}{9}$; $BE = \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{3} + \frac{13}{3} = 3 \\ -\frac{4}{3} - \frac{13}{3} < 0 \text{ — не подходит} \end{array}\right.$

Ответ: 3

***Комментарий.***

Приведено верное доказательство утверждения пункта *а*. В пункта *б* получен неверный ответ не из-за арифметической ошибки.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

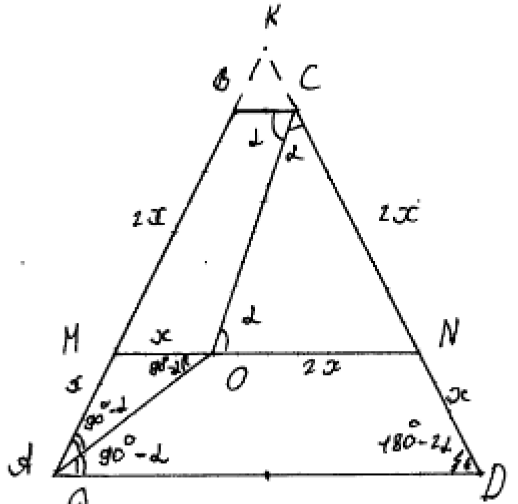
**Пример 17.3.1**

Биссектрисы углов $BAD$ и $BCD$ равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Через точку $O$ провели прямую, параллельную основаниям $BC$ и $AD$.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону $AB$ в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

**Ответ:** б) $1:7$.




Дано

AC и CO - биссектрисы

MN || AD

ABCD - равноб. трап.

б) AO = CO

AM : MB = 1 : 2

Доказать

MN = AB

Найти

$\frac{AD}{BC} = ?$

Решение

1) Пусть K - пересечение AB и CD

2) Пусть ∠BCO = α => ∠BCN = 2α

3) Т.к. CO и AO - биссект, то ∠BCO = ∠NCO, ∠MAO = ∠OAD

4) Т.к. ABCD - равноб. трапеция, то AB = CD, AD || BC, ∠BAD = ∠ADC, ∠ABC = ∠BCD также по усл. MN || AD

=> по обр. признакам парал. прямых ∠MOA = ∠OAD, ∠BCO = ∠CON (накр. леж.)

$\angle KBC = \angle KCB = \angle CNM = \angle BMN = \angle BAD =$
$= \angle CDA$ (соот. угл.)

$\angle AMN = \angle MND = \angle ABC = \angle BCD = 2\alpha$ (соот. угл.)

$\Rightarrow \angle CDA = 180^\circ - 2\alpha$ (и $\angle$ равные $\angle CDA$ тоже)

$\Rightarrow \angle MAC = \angle MCA = 90^\circ - \alpha$,

$\angle NCO = \angle CON$

$\Rightarrow \triangle AMO$ и $\triangle CON$ - равноб $\Rightarrow$

$MN = MO + ON = AM\cancel{M} + NC$

5) Т.к. $ABCD$ - равноб. тр., $MN \parallel AD$

$\Rightarrow AM = ND, \quad MB = CN \Rightarrow$

$MN = AM + MB = AB$, ч.т.д.

6) Пусть $AM = x \Rightarrow ND\cancel{NN} = x, \; BM = CN = 2x$

$AC = CO = y$

По т синусов

$\triangle AMO$

$$\frac{y}{\sin 2\alpha} = \frac{x}{\sin(90^\circ - \alpha)} \qquad y = x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} = 2x \cdot \sin\alpha$$

$\triangle CON$

$$\frac{y}{\sin(180^\circ - 2\alpha)} = \frac{2x}{\sin\alpha} \qquad y = 2x \cdot \frac{-\sin(2\alpha - \pi)}{\sin\alpha} =$$

$$= 2x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 4x \cdot \cos\alpha$$

$$y = 4x \cdot \cos\alpha = 2x \cdot \sin\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\,\alpha = 2$$

$$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$1)\ \angle KBC = \angle KCB = \angle KMN = \angle KNM =$$

$$= \angle BAD = \angle CDA \Rightarrow$$

$$\triangle AKD \sim \triangle KMN \sim \triangle KBC$$

$$\Rightarrow \quad \frac{BC}{KB} = \frac{AD}{BK+3x}$$

$$\triangle\ KMN$$

$$\angle BKC = 4\alpha - 180^\circ$$

$$\frac{MN}{\sin(4\alpha - 180^\circ)} = \frac{3x}{-\sin 4\alpha} = \frac{BK+2x}{\cancel{\sin(90^\circ}\ \sin(180^\circ - \alpha)}$$

$$BK + 2x = 3x \cdot \frac{\sin 2\alpha}{-\sin 4\alpha} = \frac{3x}{-2\cos 2\alpha} =$$

$$= \frac{3x}{-2 \cdot (1 - 2\sin^2\alpha)} = \frac{3x}{2 \cdot \frac{\cancel{25}\ \cancel{40-25}\ 15}{\cancel{25}\ 5}} = \frac{5x}{2}$$

$$BK = 0{,}5x$$

$$\frac{BC}{AD} = \frac{BK}{BK+3x} = \frac{0{,}5x}{3{,}5x} = \frac{1}{7}$$

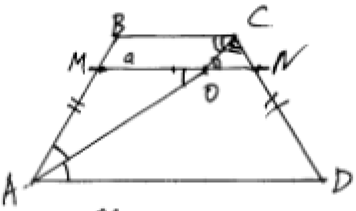
Ответ: $AD : BC = 7 : 1$.

***Комментарий.***

Приведено верное доказательство утверждения пункта *а* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 17.3.2**




№17.

Дано: $ABCD$ – р/б трап., $AO$ – бисс. $\angle BAD$, $CO$ – бисс. $\angle BCD$. $a \parallel BC \parallel AD$, $O \in a$.

а) Док. $MN = AB$.

б) $\frac{BC}{AD}$ – ? , $AO = CO$, $AM : MB = 1:2$.

а) $M = a \cap AB$, $N = a \cap CD$. $AO$ – бисс. $\Rightarrow \angle BAO = \angle OAD$.
$CO$ – бисс. $\Rightarrow \angle BCO = \angle OCD$.

Т.к. $BC \parallel MN \parallel AD$, то $\angle MOA = \angle OAD$ и $\angle NOC = \angle OCB$ как НЛУ.

Тогда

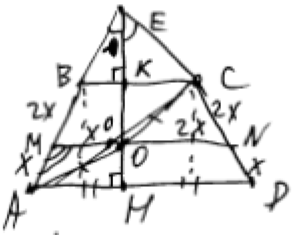
$\angle BAO = \angle MOA \Rightarrow \triangle AMO$ – р/б $\Rightarrow AM = MO$.

$\angle CON = \angle NOC \Rightarrow \triangle CNO$ – р/б $\Rightarrow CN = NO$.

$\angle BMN = \angle BAD$ и $\angle CNO = \angle CDA$ как СУ ($MN \parallel AD$)

Значит, $BCND$ – р/б трапеция $\Rightarrow BM = CN$.

Тогда $MN = MO + ON = AM + CN = AM + BM = AB$ Чтд.




№17(б).

Пусть $AM = x$, $MB = 2x$, $\angle AMO = \alpha$, $\angle ADC = 180° - \alpha$

Тогда $MO = x$, $ON = CN = 2x$

Д.п.: $AB \cap CD = E$. Т.к. $\angle BAD = \angle CDA$, то $\triangle AED$ – р/б.

Д.п. $EH$ – медиана, высота и бисс. $\triangle AED$.

Из $\triangle AOM$ и $\triangle OCN$ по т. кос. $AO = OC = x^2 + x^2 - 2x \cdot x\cos\alpha =$
$= 4x^2 + 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot 2x\cos\alpha$

$6x^2 = -10x^2\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{3}{5}$. $\cos\angle BAD = \cos\angle CDA =$
$= \frac{3}{5}$. $\sin\angle BAD = \frac{4}{5}$.

$AD = BC + 2AB\cos\angle BAD = BC + \frac{6}{5}AB$

$\angle EBC = \angle EAD$ (СУ.) $\angle BEH$ – общий $\Rightarrow \triangle BEK \sim \triangle AEH$.
$BK$ – медиана $\triangle BEC$

$\frac{BC}{AD} = \frac{BK}{AH} = \frac{BE}{AE} = \frac{BE}{BE + AB}$

$BE = \frac{BC}{2\sin\angle BEC} = \frac{BC}{2\cos\angle BAH} = \frac{5}{6}BC$

$\cancel{BC}(\frac{5}{6}BC + AB) = AD \cdot \frac{5}{6}\cancel{BC}$

$\triangle ENO \sim \triangle EDH$ (по 2 углам).

$\frac{EN}{ED} = \frac{BC}{DN}$ $\quad \frac{EC + 2x}{EC + 3x} = \frac{BC}{2x}$ $\quad 2x(EC + 2x) = BC(EC$

***Комментарий.***

Верное доказательство утверждения пункта *а*, решение задания пункта *б* не завершено.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

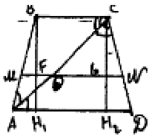
**Пример 17.3.3**

Биссектрисы углов $BAD$ и $BCD$ равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекаются в точке $O$. Через точку $O$ провели прямую, параллельную основаниям $BC$ и $AD$.

а) Докажите, что отрезок этой прямой внутри трапеции равен её боковой стороне.

б) Найдите отношение длин оснований трапеции, если $AO = CO$ и данная прямая делит сторону $AB$ в отношении $AM : MB = 1 : 2$.

**Ответ:** б) $1:7$.



а) 1) $\angle MAO = \angle OAD$ (т.к $AO$ - биссектриса)

2) $\angle OAD = \angle MOA$ (т.к накрестлежащие при секущей $AO$ и $MN \parallel AD$)

3) $\triangle AMO$ - равнобедренный (т.к $\angle MAO = \angle MOA$) $\Rightarrow AM = MO$.

4) $\angle BCO = \angle DCO$ ($CO$ - биссектриса)

5) $\angle BCO = \angle NOC$ (т.к накрестлежащие при секущей $CO$ и $BC \parallel MN$)

6) $\triangle CON$ - ~~р/б~~ равнобедренный (т.к $\angle OCN = \angle ONC$) $\Rightarrow ON = CN$

7) $AB = AM + BM$

8) $BCMN \sim BCDA$ (т.к $MN \parallel AD$)

9) $MB = CN$, тогда $AB = AM + CN$;

10) $\left.\begin{array}{l} MN = MO + ON \\ MO = AM,\ ON = CN \end{array}\right\} \Rightarrow MN = AM + CN = AB.$ ч.т.д.

б) пусть $AM = x$, тогда $MB = 2x$, $MO = x$, $ON = 2x$.

12) выполню доп построение: $BH_1$, $CH_2$ - перпендикуляры к основаниям.

13) пусть $MF$ и ~~NH~~ $NG = y$, тогда $BC = 3x - 2y$.

14) $\triangle CDH_2 \sim \triangle CNG$:

$\frac{CN}{CD} = \frac{NG}{DH}$;

$DH = \frac{3}{2}y$

15) $\triangle BAH_1 \sim \triangle BMF$, $AH_1 = \frac{3}{2}y$ (аналогично)

16) $AD = 3x - y + 2 \cdot \frac{3}{2}y = 3x + 2y$;

17) $MBCN \sim ABCD$:

$\frac{MN}{AD} = \frac{CN}{CD} = \frac{2}{3}$;

$\frac{3x}{3x+2y} = \frac{2}{3}$

$9x = 6x + 4y$;

$3x = 4y$;

$x = \frac{4}{3}y$;

18) $\frac{BC}{AD} = \frac{3x-y}{3x+2y} = \frac{4y-y}{4y+2y} = \frac{3y}{6y} = \frac{1}{2}$;

Ответ: б) 0,5.

***Комментарий.***

Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, решение задания пункта *б* не завершено.

**Оценка эксперта: 1 баллов.**

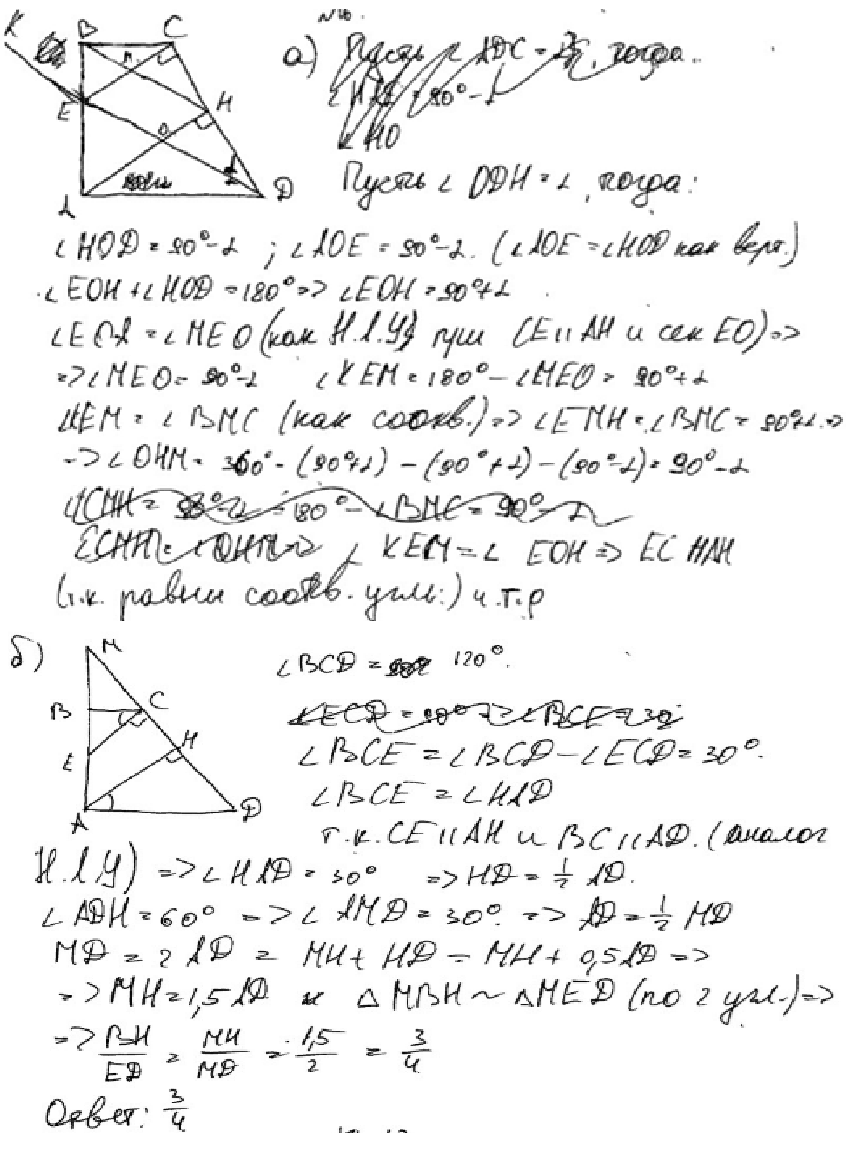
**Пример 17.4.1**

В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB$ перпендикулярна основаниям. Из точки $A$ на сторону $CD$ опустили перпендикуляр $AH$. На стороне $AB$ отмечена точка $E$ так, что прямые $CD$ и $CE$ перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые $BH$ и $ED$ параллельны.

б) Найдите отношение $BH$ к $ED$, если $\angle BCD = 120°$.

**Ответ:** б) $3:4$.



№16.

а) ~~Пусть ∠ADC = α, тогда ...~~

Пусть ∠ODH = α, тогда:

∠HOD = 90°−α ; ∠AOE = 90°−α. (∠AOE = ∠HOD как верт.)

∠EOH + ∠HOD = 180° => ∠EOH = 90°+α.

∠EOA = ∠MEO (как Н.Л.У.) при CE ∥ AH и сек EO) =>

=> ∠MEO = 90°−α   ∠KEM = 180° − ∠MEO = 90°+α

∠KEM = ∠BMC (как соотв.) => ∠EMH = ∠BMC = 90°+α =>

=> ∠OHM = 360° − (90°+α) − (90°+α) − (90°−α) = 90°−α

~~∠CHM = 90°−α = 180° − ∠BMC = 90°−α~~

~~∠CHM = ∠OHM~~ => ∠KEM = ∠EOH => EC ∥ AH

(т.к. равны соотв. углы) ч.т.д.

б) ∠BCD = 120°.

~~∠ECD = 90° => ∠BCE = 30°~~

∠BCE = ∠BCD − ∠ECD = 30°.

∠BCE = ∠HAD

т.к. CE ∥ AH и BC ∥ AD. (аналог Н.Л.У) => ∠HAD = 30° => HD = ½ AD.

∠ADH = 60° => ∠AMD = 30° => AD = ½ MD

MD = 2AD = MH + HD = MH + 0,5AD =>

=> MH = 1,5AD и ΔMBH ~ ΔMED (по 2 угл.) =>

=> BH/ED = MH/MD = 1,5/2 = 3/4

Ответ: 3/4

***Комментарий.***

В данном решении есть попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи $\angle KEM = \angle BMC$ – это возможно только при параллельности прямых $BH$ и $ED$, а как раз это и требовалось доказать. Верный ответ в пункте *б* получен обоснованно с использованием недоказанного утверждения пункта *а*.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

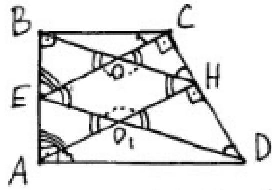
**Пример 17.4.2**

В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB$ перпендикулярна основаниям. Из точки $A$ на сторону $CD$ опустили перпендикуляр $AH$. На стороне $AB$ отмечена точка $E$ так, что прямые $CD$ и $CE$ перпендикулярны.
а) Докажите, что прямые $BH$ и $ED$ параллельны.
б) Найдите отношение $BH$ к $ED$, если $\angle BCD = 120°$.

**Ответ:** б) $3:4$.

Дано:
$ABCD$-трапеция
$BC \perp AB \perp AD$
$AH \perp CD$
$CE \perp CD$

а) Доказать:
$BH \parallel ED$




Доказательство:
1) т.к. $AH \perp CD$ и $CE \perp CD$, то $AH \parallel CE$;
2) $AB$ – секущая при двух $\parallel$ прямых, значит $\angle BEC = \angle BAH$; 3) $BH$ – тоже секущая, значит $\angle BOE = \angle COH = \angle BHA$;
4) $ED$ – тоже секущая, значит $\angle CED = \angle EO_1A = \angle HO_1D$;
5) $\angle EOH = 180° - \angle COH$ (смеж. углы), $\angle EO_1H = 180° - \angle BHA$. т.к. $\angle COH = \angle BHA$, то $\angle EOH = \angle EO_1H$, следовательно, $EOHO_1$ – параллелограм, а его противолежащие стороны = и $\parallel$, значит, $BH \parallel ED$.

***Комментарий.***

Имеется попытка доказательства утверждения пункта *а*. Логическая ошибка содержится в записи 5) – при вычислении угла $EO_1H$: $\angle EO_1H = 180° - \angle EO_1A$. Замена угла $\angle EO_1A$ углом $\angle BHA$ возможна только при условии параллельности прямых $BH$ и $ED$, а как раз это и требовалось доказать.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

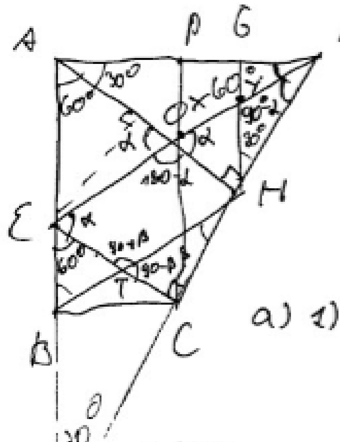
**Пример 17.4.3**

В трапеции $ABCD$ боковая сторона $AB$ перпендикулярна основаниям. Из точки $A$ на сторону $CD$ опустили перпендикуляр $AH$. На стороне $AB$ отмечена точка $E$ так, что прямые $CD$ и $CE$ перпендикулярны.

а) Докажите, что прямые $BH$ и $ED$ параллельны.

б) Найдите отношение $BH$ к $ED$, если $\angle BCD = 120°$.

**Ответ:** б) $3:4$.



Дано: $AH \perp CD$   $\angle BCD = 120°$

$CE \perp CD$ и $CE \cap AB = E$

а) Д-ть: $BH \parallel ED$

б) $\frac{BH}{ED}$ — ?

а) 1) $\left.\begin{array}{l} AH \perp CD \\ CE \perp CD \end{array}\right\} \Rightarrow$ по пр. перп. прямых $AH \parallel EC$

2) $\angle DEC = \angle DOH = \alpha$ как соотв.

~~3) $\angle ODH = 90° - \alpha$~~

4) Пусть $AB = x$  $AH = y$   ~~5) $\triangle BET$~~

5) $\triangle BET \sim \triangle BAH$ по 2-м углам ($\angle ABH$ — общий, $\angle BET = \angle BAH$ как соотв.) $k$ — коэффициент подобия

6) $AE = AB - BE = AB - kAB = x(1-k)$

$AO = AH - OH = AH - kAH = y(1-k)$

7) $\triangle AEO \sim \triangle ABH$ по углу и 2-м сторонам ($\angle A$ — общий; $\frac{AO}{AH} = 1-k$ и $\frac{AE}{AB} = 1-k$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AED = \angle ABH$

8) т.к. $\angle AED = \angle ABH$, то по признаку параллельности прямых (прямые парал., если соотв. углы равны) $ED \parallel BH$  ч. т. д.

***Комментарий.***

Логическая ошибка: доказательство утверждения пункта *а* опирается на дополнительное условие из пункта *б*.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

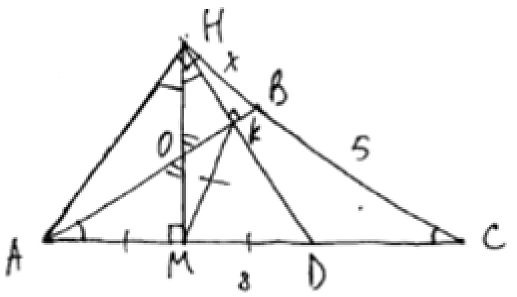
**Пример 17.5.1**

В равнобедренном тупоугольном треугольнике $ABC$ на продолжение боковой стороны $BC$ опущена высота $AH$. Из точки $H$ на сторону $AB$ и основание $AC$ опущены перпендикуляры $HK$ и $HM$ соответственно.

а) Докажите, что отрезки $AM$ и $MK$ равны.

б) Найдите $MK$, если $AB = 5$, $AC = 8$.

**Ответ:** б) $\frac{72}{25}$.




а) $\triangle ABC$: р/б $\Rightarrow \angle BAC = \angle BCA$ (1)
$\triangle AHC$: прямоуг. $KM$ высота $\Rightarrow$
$\triangle ACH \sim \triangle AKM \Rightarrow \angle ACB = \angle AKM$ (2)
$\triangle AOM \sim \triangle OHK$ (уу) $\Rightarrow \angle OAM = \angle OKB$ (3)
(1), (2), (3) $\Rightarrow$ $OK$ – бисс в $\triangle AKB$.
~~продолжим~~ продолжим прямую $HK$ до стороны $AC$. $\triangle AHD$:
$HM$ – выс и бисс $\Rightarrow \triangle AHD$ – р/б $\Rightarrow HM$ – медиана $\Rightarrow AM = MD$
$\triangle AKD$: прямоуг. $AM = MD \Rightarrow KM$ – бисс $\Rightarrow \left\{\begin{matrix} KM = AD \\ MA = MD \end{matrix}\right\} \Rightarrow$
$2KM = 2AM \Rightarrow KM = AM$ ч. т. д.

б) пусть $HB = x$ ~~[illegible]~~ $\triangle AHB$: прямоуг. $AH^2 = AB^2 - HB^2$
$\triangle AHC$: прямоуг $AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AB^2 - HB^2 = AC^2 - HC^2$
$25 - \cancel{HB^2} = 64 - CB^2 - 2HB \cdot CB - \cancel{HB^2}$ $HB = 1,4$
$\triangle AHC$: $HC^2 = MC \cdot AC$ $(6,4)^2 = 8CM$ $CM = 5,12$
$\left.\begin{matrix} AM = AC - MC = 8 - 5,12 = 2,88 \\ AM = MK \end{matrix}\right\} \Rightarrow MK = 2,88$

Ответ: б) $MK = 2,88$

***Комментарий.***

В доказательстве пункта *а* некорректно указано, что $KM$ – биссектриса, при этом тут же записаны утверждения относительно $KM$, соответствующие медиане прямоугольного треугольника.

Решение пункта *б* выполнено верно.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

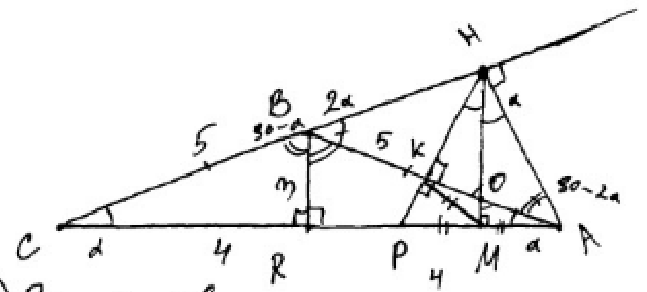
**Пример 17.5.2**

В равнобедренном тупоугольном треугольнике $ABC$ на продолжение боковой стороны $BC$ опущена высота $AH$. Из точки $H$ на сторону $AB$ и основание $AC$ опущены перпендикуляры $HK$ и $HM$ соответственно.

а) Докажите, что отрезки $AM$ и $MK$ равны.

б) Найдите $MK$, если $AB = 5$, $AC = 8$.

**Ответ:** б) $\frac{72}{25}$.




Дано:
$\angle ABC > 90°$ $\quad AB = 5$
$AB = BC$ $\quad AC = 8$
$AH \perp BC$
$HK \perp AB$
$HM \perp AC$

Доказать: а) $AM = MK$ − ?
Найти: б) $MK$ − ?

а) Доказательство:

Пусть $\angle BCA = \alpha$.
Т.к. $\triangle ABC$ − равнобедренный, то и $\angle BAC = \alpha$.

$\angle CBA = 180 - 2\alpha$
Пусть $BR \perp AC$, тогда $CR = RA$,
$\angle CBR = \angle RBA = \frac{\angle CBA}{2} = \frac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$.

$\angle ABH = 180° - \angle CBA = 180° - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$
Т.к. $\triangle BAH$ − прямоугольный ($AH \perp BC$), то $\angle BAH = 90 - 2\alpha$.

$\angle KHA = 180 - 90 - (90 - 2\alpha) = 2\alpha$.

$\triangle BHA \sim \triangle KHA$ по трём углам.

Пусть $AB \cap HM = O$.

$\angle AOM = 180 - 90 - \alpha = 90 - \alpha$.
$\angle AOM = \angle KOH$ как вертикальные углы.

$\angle KHO = 180 - 90 - (90 - \alpha) = \alpha$.

$\angle KHO = \alpha$, $\angle KHA = 2\alpha$, тогда $\angle OHA = \alpha$.
Пусть $HK \cap AC = P$, тогда $\triangle AHP$ − равнобедренный, т.к. $HM \perp AP$, $\angle KHO = \angle OHA$.

$\angle HPA = \angle MAH = 90 - 2\alpha + \alpha = 90 - \alpha$.
$PM = MA$, т.к. $HM$ − высота, медиана, биссектриса равнобедренного $\triangle AHP$.

$\triangle PKA$ − прямоугольный, т.к. $HK \perp AB$.
Около $\triangle PKA$ можно описать окружность, и из-за того, что $\triangle PKA$ − прямоугольный, её центр будет лежать в середине гипотенузы − точке $M$. $AP$ будет её диаметром, $PM$, $AM$ и $MK$ − радиусами.
Получается, что $PM = AM = MK$, что и требовалось доказать.

б) Т.к. $BR \perp AC$ и $\triangle ABC$ − равнобедр., то $CR = RA = \frac{AC}{2} = \frac{8}{2} = 4$.

По теореме Пифагора:
$BR^2 = AB^2 - AR^2$
$BR^2 = 25 - 16 = 9$
$BR = \sqrt{9} = 3$.
$\triangle BRA$ подобен $\triangle KPA$ по трём углам ($\angle BRA = \angle AKP = 90°$; $\angle RBA = \angle APK = 90 - \alpha$; $\angle PAK = \angle RAB = \alpha$;)

$\triangle KPA$, в свою очередь, подобен $\triangle AOM$ по трём углам ($\angle AMO = \angle AKP = 90$; $\angle PAK = \angle MAO = \alpha$; $\angle AOM = \angle APK = 90 - \alpha$), соответственные стороны этих треугольников пропорциональны:

$$\frac{AO}{AP} = \frac{AM}{AK} = \frac{OM}{KP}$$

, и так как $PM = AM$, $AP = 2AM$, коэффициент подобия $\triangle KPA$ и $\triangle AOM$ равен 2.

$$\cos\alpha = \frac{AR}{AB} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

Рассмотрим $\triangle PKM$, он — равнобедренный ($PM = KM$), тогда $\angle KPM = \angle PKM = 90 - \alpha$.

Тогда $\angle PMK = 180 - 2(90 - \alpha) = 2\alpha$.

$$\cos\angle KPM = \cos(90 - \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha.$$

$$\sin\alpha = \frac{BR}{AR} = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Пусть $PM = AM = MK = x$

По теореме косинусов для $\triangle PKM$:

$$PK^2 = PM^2 + MK^2 - 2\cdot PM\cdot MK\cdot\cos\angle KPM$$

$$PK^2 = 2x^2 - 2x^2\cdot\sin\alpha$$

$$PK^2 = 2x^2 - 1{,}2x^2 = 0{,}8x^2$$

$$PK = \sqrt{\frac{8}{10}x^2} = \frac{2x\sqrt{2}}{\sqrt{10}} = 2x\sqrt{\frac{1}{5}} = \cancel{\frac{2x\sqrt{5}}{\sqrt{5}}} = \frac{2x\sqrt{5}}{5}$$

По теореме Пифагора для $\triangle APK$:

$$AK^2 = AP^2 - PK^2$$

$$AK^2 = 4x^2 - 0{,}8x^2 = 3{,}2x^2$$

$$AK = x\sqrt{\frac{32}{10}} = 4x\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{4x\sqrt{5}}{5}$$

$$\frac{AK}{PK} = \frac{\frac{4x\sqrt{5}}{5}}{\frac{2x\sqrt{5}}{5}} = 2,$$

$BK = 5 - AK$

По теореме Пифагора для $\triangle BKP$:

$$BP^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = BK^2 + KP^2$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + \left(5 - \left(4x^2 + \frac{20x^2}{25}\right)\right)$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{20x^2}{25} + 5 - \frac{80x^2}{25}$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{125 - 60x^2}{25}$$

$$16 - 16x + 4x^2 = \frac{25 - 12x^2}{5}$$

$$80 - 80x + 20x^2 = 25 - 12x^2$$

$$8x^2 - 80x + 65 = 0.$$

$$D = 6400 - 2080 = 4320$$

$$\sqrt{4320} = 12\sqrt{30}$$

$$x = \frac{12\sqrt{30} + 80}{16} = \frac{3\sqrt{30}}{4} + 5 = \frac{3\sqrt{30} + 20}{4} = MK;$$

Ответ: $\frac{3\sqrt{30} + 20}{4}$;

***Комментарий.***

Доказательство утверждения пункта *а* верно. Правда, следует отметить, что в доказательстве получено много верных утверждений, которые не нужны для доказательства равенства отрезков $AM$ и $MK$, кроме того, некорректно формулируется признак подобия треугольников.

В решении пункта *б* допущена ошибка при вычислении длины отрезка $PK$ – вместо $\cos\angle KPM$ должно быть $\cos\angle KMP$.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

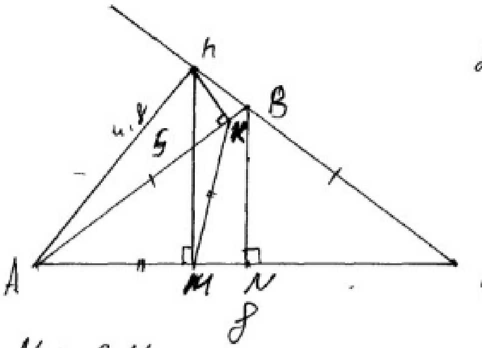
**Пример 17.5.3**

В равнобедренном тупоугольном треугольнике $ABC$ на продолжение боковой стороны $BC$ опущена высота $AH$. Из точки $H$ на сторону $AB$ и основание $AC$ опущены перпендикуляры $HK$ и $HM$ соответственно.

а) Докажите, что отрезки $AM$ и $MK$ равны.

б) Найдите $MK$, если $AB = 5$, $AC = 8$.

**Ответ:** б) $\frac{72}{25}$.




Дано: $AB = BC$; $\triangle ABC$

$AB = 5$

$BC = 8$

$hK \perp AB$

$hM \perp AC$

$MK$ - ?

$AN = CN$

$AM = \frac{1}{2} AC = \frac{8}{2} = 4$

$\cos A = 0.8 = \frac{AN}{AB} = \frac{4}{5}$

$\cancel{\frac{AM}{Ah} = \frac{4}{5}}$ $\quad \cos A = \cos C = 0{,}8$ в $\triangle ABC$

$\frac{hC}{AC} = \frac{4}{5}$

$\cancel{\frac{AM}{5} = \frac{4}{5}}$

$\frac{hC}{8} = \frac{4}{5}$

$5hC = 32$ $\qquad \frac{Ah}{AC} = \frac{3}{5}$ $\qquad Ah = 4.8$

$hC = 6.4$

$\sin^2 C = 1 - \cos^2 C = 1 - 0{,}64 = 0{,}36$

$\sin C = 0{,}6$

$\sin C = \cos A = 0{,}6$ в $\triangle ACh$

$\frac{AM}{Ah} = 0{,}6$

$AM = 0.6 \cdot 4.8$

$AM = 2.88$

$AM = MK = 2.88$

Ответ: $MK = 2.88$

***Комментарий.***

Доказательство утверждения пункта *а* отсутствует. Решение пункта *б* выполнено верно с использованием недоказанного утверждения пункта *а*.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

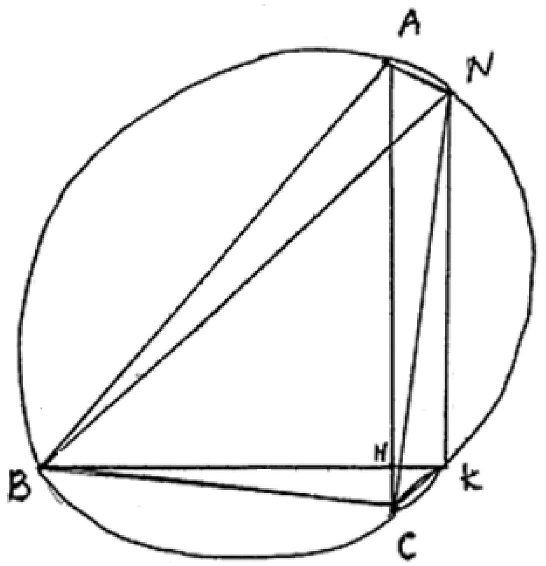
**Пример 17.6.1**

В остроугольном треугольнике $ABC$ все стороны различны. Прямая, содержащая высоту $BH$ треугольника $ABC$, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке $K$. Отрезок $BN$ – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите $NK$, если радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности равен 16, $\angle BAC = 40^\circ$, $\angle ACB = 85^\circ$.

**Ответ:** б) $16\sqrt{2}$.




Дано:

$BH \perp AC$

$BN$-диаметр

а) Док-ть:

$AN = CK$

б) $R = 16$

$\angle BAC = 40^\circ$

$\angle ACB = 85^\circ$

Найти:

$NK$-?

а) Док-во: $\angle BCN = 90^\circ$, т.к. $BH$- диаметр, $\Rightarrow$ $\angle BCH = 90 - \angle HBC \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle HCN = \angle HBC$, $\angle HCN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу) $\Rightarrow \angle ABN = \angle HBC \Rightarrow AN = CK$ (как хорды, стягивающие равные дуги).

***Комментарий.***

В доказательстве утверждения пункта *а* есть верное название прямого угла – « $\angle BCN = 90^\circ$ », при этом тут же записано противоречащее условию утверждение «*BH* – диаметр». Утверждение, записанное во второй строчке – « $\angle HCN = \angle ABN$ (т.к. они опираются на одну дугу)», – содержит неточность, поскольку точка *H* не лежит на окружности, а $\angle ACN = \angle ABN$ (так как они опираются на одну дугу). Решение пункта *б* отсутствует.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 17.6.2**

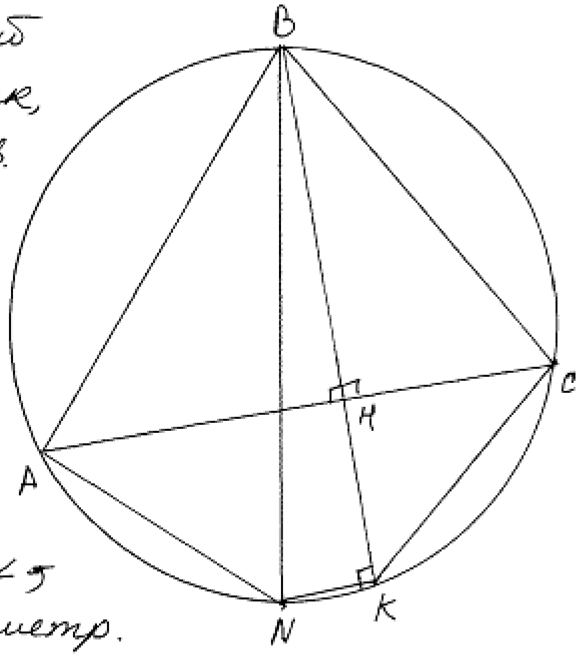
В остроугольном треугольнике $ABC$ все стороны различны. Прямая, содержащая высоту $BH$ треугольника $ABC$, вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке $K$. Отрезок $BN$ – диаметр этой окружности.

а) Докажите, что $AN = CK$.

б) Найдите $NK$, если радиус описанной около треугольника $ABC$ окружности равен 16, $\angle BAC = 40°$, $\angle ACB = 85°$.

**Ответ:** б) $16\sqrt{2}$.

а) Пусть $ABC$ – произвольный
остроугольный треугольник,
вписанный в окружность.
$BN$ – диаметр. $BH$ –
высота $\triangle ABC$, прямая
$BK$ содержит высоту
$BH$ и пересекает окр. в
точке $K$. $\angle AHB = 90^0$
(т.к $BH$ – высота.)
$\angle NKB$ – вписанный $\angle$,
опирающийся на диаметр.
$\Rightarrow \angle NKB = 90^0$. $\Rightarrow$ Прямая $AC \parallel$ прямой
$NK$ $\Rightarrow$ $ACKN$ – трапеция. По св-ву
трапеции, вписанной в окружность
ее стороны равны. $AN = CK$ ч.т.д.




***Комментарий.***

При выполнении пункта *а* используется недоказанное утверждение, что $ACKN$ – трапеция. В решении есть некорректное утверждение: «по свойству трапеции, вписанной в окружность, её стороны равны», при этом рядом записано верное равенство боковых сторон. Решение пункта *б* отсутствует.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

# 6. Критерии проверки и оценка решений задания 18

Задание № 18 — это уравнение, неравенство или их системы с параметром.

Задачи с параметром допускают весьма разнообразные способы решения. Наиболее распространёнными из них являются:

– чисто алгебраический способ решения;
– способ решения, основанный на построении и исследовании геометрической модели данной задачи;
– функциональный способ, в котором могут быть и алгебраические, и геометрические элементы, но базовым является исследование некоторой функции.

Зачастую (но далеко не всегда) графический метод более ясно ведёт к цели. Кроме того, в конкретном тексте решения вполне могут встречаться элементы каждого из трёх перечисленных способов.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную.

**Задача 18 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Решение.**

Каждое решение уравнения $\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0$ либо является решением уравнения $x-y+3=0$, откуда $y=x+3$, либо является решением системы:

$$\begin{cases}x^2-5x-y+3=0,\\ x-y+3\geq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ y\leq x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ x^2-5x+3\leq x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ x^2-6x\leq 0,\end{cases}$$

откуда $y=x^2-5x+3$ при условии $0\leq x\leq 6$.

Для каждого из этих случаев подставим $y=3x+a$ и найдём количество корней получившегося уравнения в зависимости от $a$.

Первый случай: $3x+a=x+3$, откуда $x=\dfrac{3-a}{2}$.

Второй случай: $3x+a=x^2-5x+3$ при условии $0\leq x\leq 6$. Получаем квадратное уравнение $x^2-8x-a+3=0$. Дискриминант этого уравнения равен $64+4\left(a-3\right)=4\left(a+13\right)$. Значит, уравнение $x^2-8x-a+3=0$ имеет два корня при $a>-13$, имеет единственный корень $x=4$ при $a=-13$ и не имеет корней при $a<-13$.

При $a>-13$ функция $f\left(x\right)=x^2-8x-a+3$ принимает наименьшее значение при $x=4$, и это значение отрицательно. Следовательно, больший корень уравнения $f\left(x\right)=0$

удовлетворяет условию $0 \le x \le 6$ тогда и только тогда, когда $f(6) \ge 0$; $-a-9 \ge 0$, откуда $a \le -9$.

Аналогично меньший корень уравнения $f(x)=0$ удовлетворяет условию $0 \le x \le 6$ тогда и только тогда, когда $f(0) \ge 0$; $-a+3 \ge 0$, откуда $a \le 3$.

Число $\frac{3-a}{2}$ является корнем квадратного уравнения $f(x)=0$ при $\left(\frac{3-a}{2}\right)^2 - 4(3-a) - a + 3 = 0$, откуда

$$\left(\frac{a-3}{2}\right)^2 + 3(a-3) = 0;\ (a-3)(a+9) = 0,$$

то есть при $a=3$ и при $a=-9$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a=-13$; $-9 \le a < 3$.

**Ответ:** $a=-13$; $-9 \le a < 3$.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только исключением / включением точек $a=-9$ и / или $a=3$ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-9;3)$ множества значений $a$, возможно, с включением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 3 |
| Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически) | 2 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 1 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только исключением / включением точек $a=-9$ и / или $a=3$ | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

**ИЛИ**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right)^2 - 7\left(\left|x-a^2\right|+|x+1|\right) + 4a^2 + 4 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

**Решение.**

Рассмотрим кусочно-линейную функцию $y=\left|x-a^2\right|+|x+1|$.

При $x<-1$ имеем $y=-2x+a^2-1$, при $-1 \le x < a^2$ имеем $y=a^2+1$, при $x \ge a^2$ имеем $y=2x-a^2+1$. На промежутке $(-\infty;-1]$ функция убывает, $y(-1)=a^2+1$;

на промежутке $\left[-1; a^2\right]$ функция принимает постоянное значение $a^2+1$; на промежутке $\left[a^2; +\infty\right)$ функция возрастает, $y\left(a^2\right)=a^2+1$. Таким образом, значение $y=a^2+1$ принимается при всех $x$ таких, что $-1 \le x \le a^2$; значения $y < a^2+1$ не принимаются ни при каких $x$, а каждое из значений $y > a^2+1$ принимается при двух различных $x$.

Для того чтобы исходное уравнение имело ровно два различных корня, должны выполняться следующие условия: на промежутке $\left(a^2+1; +\infty\right)$ уравнение $y^2-7y+4a^2+4=0$ должно иметь ровно один корень, причём число $a^2+1$ не должно являться корнем этого уравнения.

Эти условия выполнены в двух случаях.

В первом случае уравнение $y^2-7y+4a^2+4=0$ имеет единственный корень, причём он больше $a^2+1$. Дискриминант уравнения $D=33-16a^2$ равен нулю при $a=-\frac{\sqrt{33}}{4}$ или $a=\frac{\sqrt{33}}{4}$. При каждом из этих значений $a$ уравнение имеет ровно один корень $3{,}5 > a^2+1=\frac{49}{16}$, поэтому $a=-\frac{\sqrt{33}}{4}$ и $a=\frac{\sqrt{33}}{4}$ удовлетворяют условию задачи.

Во втором случае уравнение $y^2-7y+4a^2+4=0$ имеет два корня, причём один из них больше $a^2+1$, а другой меньше $a^2+1$. Это равносильно тому, что $f\left(a^2+1\right)<0,$ где $f(y)=y^2-7y+4a^2+4$. Поскольку

$$f\left(a^2+1\right)=\left(a^2+1\right)^2-7\left(a^2+1\right)+4a^2+4=a^4-a^2-2=\left(a^2-2\right)\left(a^2+1\right),$$

неравенство $f\left(a^2+1\right)<0$ равносильно неравенству $\left(a^2-2\right)\left(a^2+1\right)<0,$ откуда получаем: $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$.

**Ответ:** $a=-\frac{\sqrt{33}}{4}$; $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$; $a=\frac{\sqrt{33}}{4}$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точек $a=-\sqrt{2}$ и / или $a=\sqrt{2}$ | 3 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-\frac{\sqrt{33}}{4}$ и / или $a=\frac{\sqrt{33}}{4}$,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Задача верно сведена к исследованию расположения корней квадратного уравнения $y^2-7y+4a^2+4=0$, где $y=\left\|x-a^2\right\|+\left\|x+1\right\|$ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

**Задание 18.1**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)^2+a\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)+a^2-16=0$$

имеет ровно два различных корня.

**Решение.**

Рассмотрим кусочно-линейную функцию $y=|x-a-1|+|x-a+1|$. При $x<a-1$ имеем $y=-2x+2a$, при $a-1\le x<a+1$ имеем $y=2$, при $x\ge a+1$ имеем $y=2x-2a$. На промежутке $(-\infty;\,a-1]$ функция убывает, $y(a-1)=2$; на промежутке $[a-1;\,a+1]$ функция принимает постоянное значение 2; на промежутке $[a+1;\,+\infty)$ функция возрастает, $y(a+1)=2$. Таким образом, значение $y=2$ принимается при всех $x$ таких, что $a-1\le x\le a+1$; значения $y<2$ не принимаются ни при каких $x$, а каждое из значений $y>2$ принимается при двух различных $x$.

Для того чтобы исходное уравнение имело ровно два различных корня, должны выполняться следующие условия: на промежутке $(2;\,+\infty)$ уравнение $y^2+ay+a^2-16=0$ должно иметь ровно один корень, причём число 2 не должно являться корнем этого уравнения.

Эти условия выполнены в двух случаях.

В первом случае уравнение $y^2+ay+a^2-16=0$ имеет единственный корень, причём он больше 2. Дискриминант уравнения $D=64-3a^2$ равен нулю при $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ или $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

При $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ уравнение имеет ровно один корень $\frac{4\sqrt{3}}{3}>2$, поэтому $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$ удовлетворяет условию задачи. При $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ уравнение имеет ровно один корень $-\frac{4\sqrt{3}}{3}\le 2$, поэтому $a=\frac{8\sqrt{3}}{3}$ не удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае уравнение $y^2+ay+a^2-16=0$ имеет два корня, причём один из них больше 2, а другой меньше 2. Это равносильно тому, что $f(2)<0$, где $f(y)=y^2+ay+a^2-16$. Решая неравенство $a^2+2a-12<0$, получим: $-1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13}$.

**Ответ:** $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13}$.

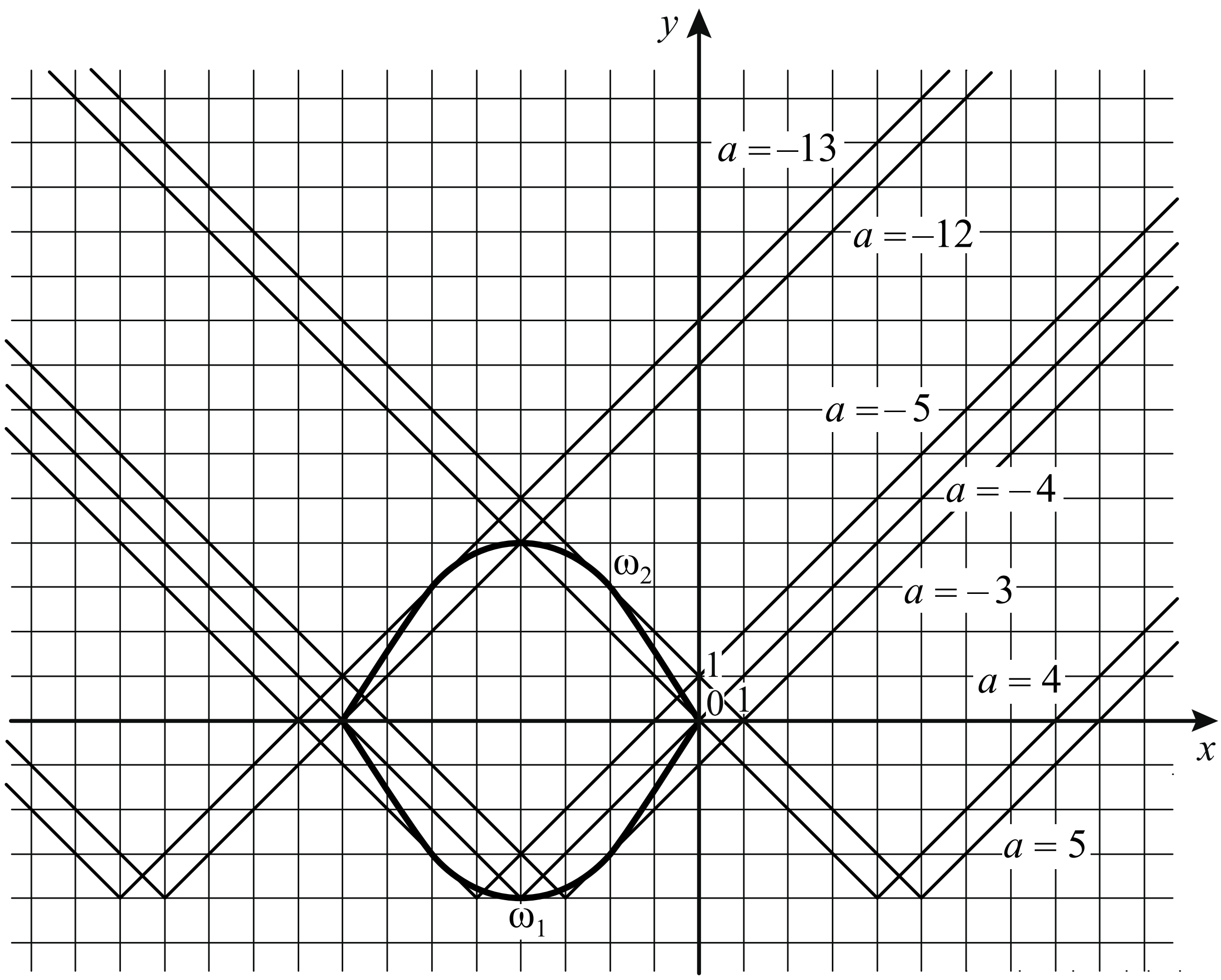
| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точек $a = -1 - \sqrt{13}$ и / или $a = -1 + \sqrt{13}$ | 3 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только исключением точки $a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Задача верно сведена к исследованию расположения корней квадратного уравнения $y^2 + ay + a^2 - 16 = 0$, где $y = \lvert x - a - 1 \rvert + \lvert x - a + 1 \rvert$ | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

**Задание 18.2**
Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

**Решение.**
Уравнение $y = |x-a| - 4$ задаёт на плоскости $Oxy$ пару лучей с общим началом в точке $(a; -4)$: луч $l_1$, совпадающий с прямой $y = -x + a - 4$ при $x \le a$, и луч $l_2$, совпадающий с прямой $y = x - a - 4$ при $x \ge a$.
Уравнение $4|y| + x^2 + 8x = 0$ задаёт на плоскости $Oxy$ множество точек, представляющее собой объединение дуги $\omega_1$ параболы $y = \frac{1}{4}(x+4)^2 - 4$ с концами в точках $(-8; 0)$ и $(0; 0)$ и дуги $\omega_2$ параболы $y = -\frac{1}{4}(x+4)^2 + 4$ с концами в тех же точках.



Рассмотрим варианты расположения луча $l_1$ и дуг $\omega_1$ и $\omega_2$.

При $a=-4$ луч проходит через концевую точку дуг $(-8;0)$, при $a=4$ — через концевую точку дуг $(0;0)$.

Найдём значение $a$, при котором прямая $y=-x+a-4$ и парабола $y=\frac{1}{4}(x+4)^2-4$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $-x+a-4=\frac{1}{4}(x+4)^2-4$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $\frac{1}{4}x^2+3x-a+4=0,$ дискриминант этого квадратного уравнения $D=9+a-4=a+5.$ При условии $D=0,$ которое выполнено при $a=-5,$ уравнение имеет единственный корень $x=-6.$ Значит, касание прямой и параболы происходит при $a=-5,$ причём точка касания имеет координаты $(-6;-3).$ Эта точка принадлежит одновременно дуге $\omega_1$ и лучу $l_1$.

Найдём значение $a$, при котором прямая $y=-x+a-4$ и парабола $y=-\frac{1}{4}(x+4)^2+4$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $-x+a-4=-\frac{1}{4}(x+4)^2+4$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $\frac{1}{4}x^2+x+a-4=0,$ дискриминант этого квадратного уравнения $D=1-a+4=5-a.$ При условии $D=0,$ которое выполнено при $a=5,$ уравнение имеет единственный корень $x=-2.$ Значит, касание прямой и параболы происходит при $a=5,$ причём точка касания имеет координаты $(-2;3).$ Эта точка принадлежит одновременно дуге $\omega_2$ и лучу $l_1$.

Рассмотрим варианты расположения луча $l_2$ и дуг $\omega_1$ и $\omega_2$.

При $a=-12$ луч проходит через концевую точку дуг $(-8;0)$, при $a=-4$ — через концевую точку дуг $(0;0)$.

Найдём значение $a$, при котором прямая $y=x-a-4$ и парабола $y=\frac{1}{4}(x+4)^2-4$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $x-a-4=\frac{1}{4}(x+4)^2-4$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $\frac{1}{4}x^2+x+a+4=0,$ дискриминант этого квадратного уравнения $D=1-a-4=-a-3.$ При условии $D=0,$ которое выполнено при $a=-3,$ уравнение имеет единственный корень $x=-2.$

Значит, касание прямой и параболы происходит при $a=-3,$ причём точка касания имеет координаты $(-2;-3).$ Эта точка принадлежит одновременно дуге $\omega_1$ и лучу $l_2$.

Найдём значение $a$, при котором прямая $y=x-a-4$ и парабола $y=-\frac{1}{4}(x+4)^2+4$ касаются, то есть имеют ровно одну общую точку. В этом случае уравнение $x-a-4=-\frac{1}{4}(x+4)^2+4$ должно иметь единственный корень. Запишем это уравнение в виде $\frac{1}{4}x^2+3x-a-4=0,$ дискриминант этого квадратного уравнения $D=9+a+4=a+13.$ При условии $D=0,$ которое выполнено при $a=-13,$ уравнение имеет единственный корень

$x=-6$. Значит, касание прямой и параболы происходит при $a=-13$, причём точка касания имеет координаты $\left(-6;3\right)$. Эта точка принадлежит одновременно дуге $\omega_2$ и лучу $l_2$.

Точка пересечения прямых $l_1$ и $l_2$ принадлежит объединению дуг $\omega_1$ и $\omega_2$ при $a=-4$.

Таким образом, найдено семь граничных значений параметра: $a=-13$ (система уравнений имеет одно решение), $a=-12$ (два решения), $a=-5$ (три решения), $a=-4$ (три решения), $a=-3$ (три решения), $a=4$ (два решения), $a=5$ (одно решение).

Используя рисунок, получаем, что система уравнений имеет четыре решения при $-5<a<-4$ и $-4<a<-3$.

**Ответ:** $-5<a<-4$; $-4<a<-3$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точек $a=-5$ и / или $a=-3$ | 3 |
| С помощью верного рассуждения получен промежуток $\left(-5;-3\right)$ множества значений $a$, возможно, с включением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг парабол и лучей (аналитически или графически) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

## Задание 18.3

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

**Решение.**

Каждое решение уравнения $\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0$ либо является решением уравнения $x-y+3=0$, откуда $y=x+3$, либо является решением системы:

$$\begin{cases}x^2-5x-y+3=0,\\ x-y+3\geq 0;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ y\leq x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ x^2-5x+3\leq x+3;\end{cases}\quad \begin{cases}y=x^2-5x+3,\\ x^2-6x\leq 0,\end{cases}$$

откуда $y=x^2-5x+3$ при условии $0\leq x\leq 6$.

Для каждого из этих случаев подставим $y=3x+a$ и найдём количество корней получившегося уравнения в зависимости от $a$.

Первый случай: $3x+a=x+3$, откуда $x=\dfrac{3-a}{2}$.

Второй случай: $3x+a=x^2-5x+3$ при условии $0\leq x\leq 6$. Получаем квадратное уравнение $x^2-8x-a+3=0$. Дискриминант этого уравнения равен $64+4\left(a-3\right)=4\left(a+13\right)$. Значит, уравнение $x^2-8x-a+3=0$ имеет два корня при $a>-13$, имеет единственный корень $x=4$ при $a=-13$ и не имеет корней при $a<-13$.

При $a>-13$ функция $f\left(x\right)=x^2-8x-a+3$ принимает наименьшее значение при $x=4$, и это значение отрицательно. Следовательно, больший корень уравнения $f\left(x\right)=0$ удовлетворяет условию $0\leq x\leq 6$ тогда и только тогда, когда $f\left(6\right)\geq 0$; $-a-9\geq 0$, откуда $a\leq -9$.

Аналогично меньший корень уравнения $f\left(x\right)=0$ удовлетворяет условию $0\leq x\leq 6$ тогда и только тогда, когда $f\left(0\right)\geq 0$; $-a+3\geq 0$, откуда $a\leq 3$.

Число $\dfrac{3-a}{2}$ является корнем квадратного уравнения $f\left(x\right)=0$ при $\left(\dfrac{3-a}{2}\right)^2-4\left(3-a\right)-a+3=0$, откуда

$$\left(\frac{a-3}{2}\right)^2+3\left(a-3\right)=0;\ \left(a-3\right)\left(a+9\right)=0,$$

то есть при $a=3$ и при $a=-9$.

Таким образом, исходная система уравнений имеет ровно два различных решения при $a=-13$; $-9\leq a<3$.

**Ответ:** $a=-13$; $-9\leq a<3$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только исключением / включением точек $a = -9$ и / или $a = 3$ | 3 |
| С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-9; 3)$ множества значений $a$, возможно, с включением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

**Задание 18.4**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$$

имеет ровно три различных корня.

**Решение.** Исходное уравнение равносильно уравнению $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$ при условии $x^2+ax+1\geq 0$.

Решим уравнение $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$:

$$3x^2+2ax+1=x^4+2ax^3+\left(a^2+2\right)x^2+2ax+1;\ x^4+2ax^3+\left(a^2-1\right)x^2=0;$$

$x^2\left(x+a+1\right)\left(x+a-1\right)=0$, откуда $x=0$, $x=1-a$ или $x=-1-a$.

Исходное уравнение имеет три корня, когда эти числа различны и для каждого из них выполнено условие $x^2+ax+1\geq 0$.

Рассмотрим условия совпадения корней. При $a=1$ имеем $1-a=0$. При $a=-1$ имеем $-1-a=0$. При остальных значениях $a$ числа 0, $1-a$, $-1-a$ различны.

При $x=0$ получаем: $x^2+ax+1=1\geq 0$ при всех значениях $a$.

При $x=1-a$ получаем: $x^2+ax+1=\left(1-a\right)^2+a\left(1-a\right)+1=2-a$.

Это выражение неотрицательно при $a\leq 2$.

При $x=-1-a$ получаем: $x^2+ax+1=\left(-1-a\right)^2+a\left(-1-a\right)+1=a+2$.

Это выражение неотрицательно при $a\geq -2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно три различных корня при

$$-2\leq a<-1;\ -1<a<1;\ 1<a\leq 2.$$

**Ответ:** $-2\leq a<-1$; $-1<a<1$; $1<a\leq 2$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений *a*, отличающееся от искомого только исключением точек $a$ = –2 и/или $a=2$ | 3 |
| С помощью верного рассуждения получен промежуток (–2; 2) множества значений *a*, возможно, с включением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Получены корни уравнения $3x^2+2ax+1=\left(x^2+ax+1\right)^2$: $x=0$, $x=1-a$, $x=-1-a$ и задача верно сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2+ax+1>0$ ($x^2+ax+1\geq 0$) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

## Задание 18.5

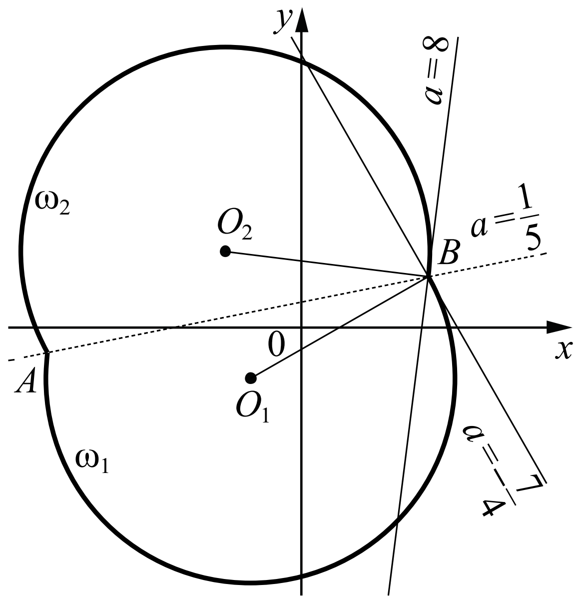
Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Решение.**

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.




Рассмотрим два случая:

1) Если $x-5y+5 \geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=52;$$

$$x^2+4x+y^2+4y-57=0;$$

$$(x+2)^2+(y+2)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2;-2)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x-5y+5 \leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=52;\ x^2+6x+y^2-6y-47=0;\ (x+3)^2+(y-3)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3;3)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10;-1)$ и $B(5;2)$, лежащих на прямой $x-5y+5=0$, поэтому в первом случае получаем дугу $\omega_1$ с концами в точках $A$ и $B$, во втором – дугу $\omega_2$ с концами в тех же точках (см. рисунок).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую $m$, которая проходит через точку $B$, и угловой коэффициент которой равен $a$.

При $a=\frac{1}{5}$ прямая $m$ проходит через точки $A$ и $B$, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=-\frac{7}{4}$ прямая $m$ перпендикулярна прямой $O_1B$, угловой коэффициент которой равен $\frac{4}{7}$, значит, прямая $m$ касается дуги $\omega_1$ в точке $B$ и пересекает дугу $\omega_2$ в двух точках (одна из которых – точка $B$), то есть исходная система имеет два решения.

При $a=8$ прямая $m$ перпендикулярна прямой $O_2B$, угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая $m$ касается дуги $\omega_2$ в точке $B$ и пересекает дугу $\omega_1$ в двух точках (одна из которых – точка $B$), то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-\frac{7}{4}$ или $a>8$ прямая $m$ пересекает каждую из дуг $\omega_1$ и $\omega_2$ в точке $B$ и ещё в одной точке, отличной от точки $A$, то есть исходная система имеет три решения.

При $-\frac{7}{4}<a<\frac{1}{5}$ прямая $m$ пересекает дугу $\omega_2$ в двух точках (одна из которых – точка $B$) и не пересекает дугу $\omega_1$ в точках, отличных от точки $B$, то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5}<a<8$ прямая $m$ пересекает дугу $\omega_1$ в двух точках (одна из которых – точка $B$) и не пересекает дугу $\omega_2$ в точках, отличных от точки $B$, то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4}\le a\le 8$.

**Ответ:** $-\frac{7}{4}\le a\le 8$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-\frac{7}{4}$ и/или $a=8$ | 3 |
| При всех значениях $a$ верно найдено количество решений системы в одном из двух случаев, возникающих при раскрытии модуля<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения дуг окружностей и прямых (аналитически или графически) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

## Задание 18.6

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

**Решение.**

Корнями исходного уравнения являются корни уравнения $|3x|-2x-2-a=0$, для которых выполнено условие $x^2-2x-a\neq 0$.

При $x\leq 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $-5x-2-a=0$ и задаёт на плоскости $Oxa$ луч $l_1$ с началом в точке $(0;-2)$. При $x\geq 0$ уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ принимает вид $x-2-a=0$ и задаёт луч $l_2$ с началом в точке $(0;-2)$. Значит, уравнение $|3x|-2x-2-a=0$ имеет два корня при $a>-2$, имеет один корень при $a=-2$ и не имеет корней при $a<-2$.

Уравнение $x^2-2x-a=0$ задаёт параболу $a=x^2-2x$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом $l_1$ являются решениями системы:

$$\begin{cases} a=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\leq 0; \end{cases} \begin{cases} -5x-2=x^2-2x, \\ a=-5x-2, \\ x\leq 0; \end{cases} \begin{cases} (x+1)(x+2)=0, \\ a=-5x-2, \\ x\leq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом $l_1$ в точках $(-1;3)$ и $(-2;8)$.

Координаты точек пересечения параболы $a=x^2-2x$ с лучом $l_2$ являются решениями системы:

$$\begin{cases} a=x^2-2x, \\ a=x-2, \\ x\geq 0; \end{cases} \begin{cases} x-2=x^2-2x, \\ a=x-2, \\ x\geq 0; \end{cases} \begin{cases} (x-1)(x-2)=0, \\ a=x-2, \\ x\geq 0. \end{cases}$$

Значит, парабола $a=x^2-2x$ пересекается с лучом $l_2$ в точках $(1;-1)$ и $(2;0)$.

Следовательно, условие $x^2-2x-a\neq 0$ выполнено для корней уравнения $|3x|-2x-2-a=0$ при всех $a$, кроме $a=-1$, $a=0$, $a=3$ и $a=8$.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два корня при $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

**Ответ:** $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
| --- | --- |
| Обоснованно получен верный ответ | 4 |
| С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точки $a = -2$ | 3 |
| Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено или множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точек $a = 8$, $a = 3$ и/или $a = -2$, или множество значений $a$, отличающееся от искомого только включением точек $a = 0$, $a = -1$ и/или $a = -2$,<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения | 2 |
| Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и лучей (аналитически или графически) | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

## Примеры оценивания решений задания 18

### Пример 18.1.1

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)^2+a\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)+a^2-16=0$$

имеет ровно два различных корня.

**Ответ:** $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13}$.

№18. $(|x-a-1|+|x-a+1|)^2+a(|x-a-1|+|x-a+1|)+a^2-16=0$ 2 разл. корня

① $|x-a-1|+|x-a+1|=t$ Замена: $t\geq 0$ $E(t)=[0;+\infty)$

$|x-(a+1)|+|x-(a-1)|=t$ $D(t)=R$

$a-1$ $a+1$ $x$

③ ② ①

Рассмотрим ф-цию $t(x)$:

$$t(x):\begin{cases} x-a-1+x-a+1, & \text{при } x\geq a+1\\ -x+a+1+x-a+1, & \text{при } a-1<x<a+1\\ -x+a+1-x+a-1, & \text{при } x\leq a-1\end{cases}$$

$$t(x):\begin{cases} 2x-2a; & \text{при } x\geq a+1\\ 2, & \text{при } a-1<x<a+1\\ -2x+2a, & \text{при } x\leq a-1\end{cases}$$

Рассм. график функции $t(x)$:

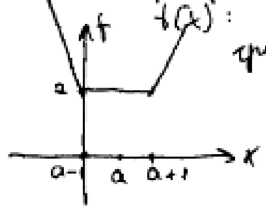


график будет смещаться → ← в зависимости от $a$

Таким образом: при 1) $t<2$ решений нет
2) $t=2$ решений бесконечно много
3) $t>2$ 2 реш.

Т.о. чтобы исходное уравнение имело 2 решения, то ур-е относительно $t$ должно иметь либо 1 корень, который $>2$ либо 2 корня, один из которых $>2$ а другой $<2$

Т.е. $\left[\begin{array}{l} t>2 \rightarrow D(\text{отн. } t)=0\\ \begin{cases} t_1>2\\ t_2<2\end{cases}\\ \begin{cases} t_1<2\\ t_2>2\end{cases}\end{array}\right.$

② $t^2+at+a^2-16=0$ ← уравнение с заменой $D=a^2-4(a^2-16)=-3a^2+64$

1) $D=0$: $a=\pm\frac{8}{\sqrt3}$; тогда $t=\frac{-a}{2}$ => 1) при $a=\frac{8}{\sqrt3}$ $t=\frac{-4}{\sqrt3}<2$ => $a\neq\frac{8}{\sqrt3}$

2) при $a=-\frac{8}{\sqrt3}$ $t=\frac{4}{\sqrt3}>2$ => $a=-\frac{8}{\sqrt3}$ !

$\frac{4}{\sqrt3}\ \vee\ 2$

$4\ \vee\ 2\sqrt3$

$16\ \vee\ 12$

$D\neq 0$

2) $D>0$: $-3a^2+64>0$ <=> $|a|<\frac{8}{\sqrt3}$

$\left[\begin{array}{l} t_1=\frac{-a+\sqrt{-3a^2+64}}{2}\\ t_2=\frac{-a-\sqrt{-3a^2+64}}{2}\end{array}\right.$

Т.о. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} t_1>2\\ t_2<2\end{cases} (1)\\ \begin{cases} t_1<2\\ t_2>2\end{cases} (2)\end{array}\right.$

(1) $\begin{cases} \dfrac{-a+\sqrt{-3a^2+64}}{2} > 2 & ① \\ \dfrac{-a-\sqrt{-3a^2+64}}{2} < 2 & ② \end{cases}$

$-\frac{8}{\sqrt3} \overset{<}{\vee} -4$

$\frac{8}{\sqrt3} \overset{>}{\wedge} 4$

$8 \overset{>}{\wedge} 4\sqrt3$

$64 \wedge 48$

Т.о.

① $-a+\sqrt{-3a^2+64} > 4$

$\sqrt{-3a^2+64} > a+4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+4<0 \\ -3a^2+64 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a+4 \geq 0 \\ -3a^2+64 > a^2+16+8a \end{cases} \end{array}\right.$

т.к. $|a|<\frac{8}{\sqrt3}$ => знак строгий

$4a^2+8a-48<0$

$a^2+2a-12<0$

$a^2+2a-12=0$

$D=1+12=13$

$a=-1\pm\sqrt{13}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a<-4 \\ |a|<\frac{8}{\sqrt3} \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq -4 \\ -1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13} \end{cases} \end{array}\right.$

$-4 \overset{>}{\vee} -1-\sqrt{13}$

$-3 \vee -\sqrt{13}$

$9 \wedge 13$

Т.о. ①:

② $-a-\sqrt{-3a^2+64} < 4$

$\sqrt{-3a^2+64} > -a-4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > -4 \\ |a|<\frac{8}{\sqrt3} \end{cases} \\ \begin{cases} a \leq -4 \\ -3a^2+64 > a^2+8a+16 \end{cases} \end{array}\right.$

$4a^2+8a-48<0$

Таким образом: (совм. ① и ②)

система будет иметь вид: $\begin{cases} -1-\sqrt{13}<a<\frac{8}{\sqrt3} \\ -\frac{8}{\sqrt3}<a<-1+\sqrt{13} \end{cases}$

$-1-\sqrt{13} \overset{>}{\vee} -\frac{8}{\sqrt3}$

$1+\sqrt{13} \overset{<}{\wedge} \frac{8}{\sqrt3}$

$\sqrt3+\sqrt{39} \overset{<}{\wedge} 8$

$3+39+2\cdot\sqrt{3\cdot39} \wedge 64$

$2\sqrt{117} \wedge 22$

$\sqrt{117} \wedge 11$

$117 \wedge 121$

$a \in (-1-\sqrt{13}; -1+\sqrt{13})$

(2) $\begin{cases} \dfrac{-a+\sqrt{-3a^2+64}}{2} < 2 & ② \\ \dfrac{-a-\sqrt{-3a^2+64}}{2} > 2 & ① \end{cases}$

①: $-\sqrt{-3a^2+64}-a > 4$

$\sqrt{-3a^2+64} < -a-4 \Rightarrow \begin{cases} -a-4 \geq 0 \\ -3a^2+64 < a^2+8a+16 \end{cases}$

$4a^2+8a-48>0$

$\begin{cases} a \leq -4 \\ \left[\begin{array}{l} a>-1+\sqrt{13} \\ a<-1-\sqrt{13} \end{array}\right. \end{cases}$

① => $a<-1-\sqrt{13}$

② $-a+\sqrt{-3a^2+64} < 4$

$\sqrt{-3a^2+64} < a+4 \Leftrightarrow \begin{cases} a+4 \geq 0 \\ -3a^2+64 < a^2+8a+16 \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq -4 \\ a^2+2a-12>0 \end{cases}$

Т.о. ①: => $a>-1+\sqrt{13}$

тогда система имеет вид: $\begin{cases} a<-1-\sqrt{13} \\ a>-1+\sqrt{13} \end{cases}$

$\varnothing$ (нет пересеч.)

Т.о. $\left[\begin{array}{l} a=-\frac{8}{\sqrt3} \\ -1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13} \end{array}\right.$

Ответ: при $a \in (-1-\sqrt{13}; -1+\sqrt{13}) \cup \{-\frac{8}{\sqrt3}\}$ уравнение имеет 2 различных решения.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 18.1.2**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)^2+a\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)+a^2-16=0$$

имеет ровно два различных корня.

**Ответ:** $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13}$.

№ 18

$\lambda = (|x-a-1|+|x-a+1|)$

Тогда уравнение будет выглядеть так:

$\lambda^2+a\lambda+a^2-16=0$

$\lambda^2+2\cdot\frac{1}{2}a\cdot\lambda+\frac{1}{4}a^2+\frac{3}{4}a^2-16=0$

$\left(\lambda+\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{3}{4}a^2-16=0$

Найдем, чему равен $\lambda$ на разных промежутках $x$:

$x\in(-\infty;a-1)$:

$\lambda=a-x+1+a-x-1$

$\lambda=2a-2x$

$\lambda_{min}\to 2a-2(a-1)=2$ при $x\to(a-1)$

$\lambda_{max}\to\infty$

$\lambda\in(2;+\infty)$

$x\in[a-1;a+1]$:

$\lambda=a-x+1+x-a+1$

$\lambda=2$

$x\in(a+1;+\infty)$:

$\lambda=x-a-1+x-a+1$

$\lambda=2x-2a$

$\lambda_{min}\to 2(a+1)-2a=2$ при $x\to a+1$

$\lambda_{max}\to\infty$

$\lambda\in(2;+\infty)$

Заметим, что $E(\lambda)$ (возможные значения $\lambda$)

- не зависит от параметра $a$ и $\lambda\in[2;+\infty)$

причем от одного значения $\lambda\in(2;+\infty)$ можно найти 2 значения $x$, от которых оно получается, то есть от одного $\lambda$ - 2 реш.

А если $\lambda = 2$, то решений бесконечно

$\lambda^2 + a\lambda + a^2 - 16 = 0$

$D = a^2 - 4a^2 + 64 =$

$= 64 - 3a^2$

1) $D = 0 \Leftrightarrow a \cancel{\left[ a = \frac{24}{3} \right.}$

$\Leftrightarrow \left[ \begin{array}{l} a = -\frac{8\sqrt{3}}{3} \\ a = +\frac{8\sqrt{3}}{3} \end{array} \right.$

Исходя из рассуждений выше можно понять, что 2 решения будет, если:

1) $D = 0$, $\lambda \in (2; +\infty$

2) $D > 0$, $\lambda_1 \in (-\infty; 2)$; $\lambda_2 \in (2; +\infty)$

меньш. кор. (вне $E(\lambda)$) — больш. кор.

$\lambda = \frac{-a}{2}$

$\lambda = \frac{8\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \in (2; +\infty)$ или $\lambda = -\frac{4\sqrt{3}}{3} < 2 \Rightarrow$

$\Downarrow$

$a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$ уд. нас

$\Rightarrow a = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ неуд.

2) $D > 0 \Rightarrow a \in \left( -\frac{8\sqrt{3}}{3}; \frac{8\sqrt{3}}{3} \right)$

$\lambda_1 = \frac{-a - \sqrt{64 - 3a^2}}{2} < 2$ $\cap$ $\lambda_2 = \frac{-a + \sqrt{64 - 3a^2}}{2} > 2$

$-\sqrt{64 - 3a^2} > -a - 4$

$\sqrt{64 - 3a^2} > 4 + a$

$$\begin{cases} -a-4 \geq 0, \\ 64-3a^2 > a^2+8a+16, \\ \text{ОДЗ}; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \text{ОДЗ}, \\ -a-4 < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{ОДЗ} \\ 4+a<0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \text{ОДЗ} \\ 4+a \geq 0 \\ 64-3a^2 > 16+a^2+8a \end{cases}$$

$a \in \left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}; -4\right]$ $\qquad$ $a > -4$ $\qquad$ $a \in \left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}; -4\right)$ $\qquad$ ~~$4a^2+8a-48<0$~~

$a \in \left(-4; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$ $\qquad$ $a \in \left[-4; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right)$

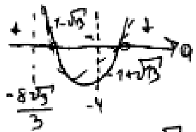
$4a^2+8a-48<0$

$a^2+2a-12<0$

$a^2+2a-12=0$

$\frac{D}{4} = 1+12 = 13$

$a = -1 \pm \sqrt{13}$



$-1-\sqrt{13} \vee -\frac{8\sqrt{3}}{3}$

$1+13+2\sqrt{13} \vee \frac{64}{3}$

$6\sqrt{13} \vee 22$

$3\sqrt{13} \vee 11$

$9 \cdot 13 \vee 11^2$

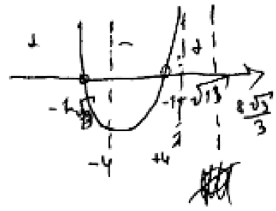
$117 < 121 \Rightarrow 1+13+2\sqrt{13} < \frac{64}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow -1-\sqrt{13} > -\frac{8\sqrt{3}}{3}$

тогда ответом на эту часть будет $a \in (-1-\sqrt{13}; -4]$

$4a^2+8a-48<0$

$=0 \Leftrightarrow a = -1 \pm \sqrt{13}$



$a \in [-4; -1+\sqrt{13})$

Ответом на эту часть будет
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a \in (-1-\sqrt{13}; -4] \\ a \in \left(-4; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a \in \left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}; -4\right) \\ a \in [-4; -1+\sqrt{13}) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in \left(-1-\sqrt{13}; \frac{8\sqrt{3}}{3}\right) \\ a \in \left(-\frac{8\sqrt{3}}{3}; -1+\sqrt{13}\right) \end{cases}$$

$\Downarrow$

$a \in (-1-\sqrt{13}; -1+\sqrt{13})$

не забудем и про $a = -\frac{8\sqrt{3}}{3}$, тогда

Ответ: $a \in \left\{-\frac{8\sqrt{3}}{3}\right\} \cup (-1-\sqrt{13}; -1+\sqrt{13})$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 18.1.3**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)^2+a\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)+a^2-16=0$$

имеет ровно два различных корня.

**Ответ:** $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13}$.

№18.

$(|x-a-1|+|x-a+1|)^2+a(|x-a-1|+|x-a+1|)+a^2-16=0$

$t=|x-a-1|+|x-a+1|$

Рассмотрим $f(x)=|x-a-1|+|x-a+1|$:

$x\le(a-1)$: $f(x)=-2x+2a$

$x\ge(a+1)$: $f(x)=2x-2a$.

$x\in[(a-1);(a+1)]$: $f(x)=2$

т.к. при $x\le(a-1)$ $f(x)$ – монот. убыв., ~~а~~ а при $x\ge(a+1)$ $f(x)$ – монот. возр. $\Rightarrow$ ~~т~~ $f(x)\ge2$

каждому значению $t>2$ соот. 2 значения $x$

~~зн~~ $t=2$ соот. либо бесконечное множество знач $x$, либо 1.

~~ровно 2 значения тогда, когда либо~~

$t^2+at+a^2-16=0$

чтобы было 2 решения, надо чтобы было только 1 $t>2$:

$D=a^2-4a^2+64=-3a^2+64$.

1) $D=0$ ! 1 решение $t$

$64-3a^2=0$

$a=\pm\frac{8}{\sqrt3}$

проверим, что $t>2$:

$a=-\frac{8}{\sqrt3}$:

$t=\frac{\frac{8}{\sqrt3}\pm0}{2}=\frac{4}{\sqrt3}$

$\frac{4}{\sqrt3}>\frac{4}{\sqrt4}$

$\frac{4}{\sqrt3}>2.\Rightarrow a=-\frac{8}{\sqrt3}$ подх.

$a=\frac{8}{\sqrt3}$

$t=\frac{-\frac{8}{\sqrt3}\pm0}{2}=-\frac{4}{\sqrt3}$ – не подходит.

2) ~~$t$~~ большее $t$ подходит, а меньшее – нет:

$$\begin{cases}\frac{-a+\sqrt{64-3a^2}}{2}>2\\ \frac{-a-\sqrt{64-3a^2}}{2}<2\end{cases}\quad \begin{cases}\sqrt{64-3a^2}>4+a\\ \sqrt{64-3a^2}>-4-a\end{cases}\quad \begin{cases}64-3a^2\ge0\\ 64-3a^2>a^2+8a+16\\ 64-3a^2>a^2+8a+16\end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 \le 64 \\ 4a^2 + 8a - 48 < 0 \ \Big|:4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \in \left[-\frac{8}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right] \\ a^2 + 2a - 12 < 0 \end{cases}$$

$D = 4 + 48 = 52$

$\frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13}$

$$\begin{cases} a \in \left[-\frac{8}{\sqrt{3}}; \frac{8}{\sqrt{3}}\right] \\ a \in \left(-1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}\right) \end{cases} \Rightarrow a \in \left(1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}\right)$$

$1 - \sqrt{13} \ \cancel{\ } \ge -\frac{8}{\sqrt{3}}$

$1 - 2\sqrt{13} + 13 \ \cancel{\ } \le \frac{64}{3}$

$-2\sqrt{13} \ \cancel{\ } \le \frac{64 - 42}{3}$

$1 + \sqrt{13} \ \cancel{\ } \le \frac{8}{\sqrt{3}}$

$2\sqrt{13} \ \cancel{\ } \le \frac{22}{3} \ \Big| \cdot 3$

$6 \cdot \sqrt{13} \ \cancel{\ } \le^2 22$

$468 < 484$

~~$a \in (1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13})$~~

объединяем ~~отв~~ то, что у нас получилось в 1 и 2 случае:

$$\left[\begin{array}{l} a = \left\{-\frac{8}{\sqrt{3}}\right\} \\ a \in (1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}) \end{array}\right. \qquad a \in (1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}) \cup \left\{-\frac{8}{\sqrt{3}}\right\}$$

Ответ: $a \in (1 - \sqrt{13}; 1 + \sqrt{13}) \cup \left\{-\frac{8}{\sqrt{3}}\right\}$

***Комментарий.***

Задача верно сведена к исследованию расположения корней квадратного уравнения $y^2 + ay + a^2 - 16 = 0$, где $y = |x - a - 1| + |x - a + 1|$. Неверно решены иррациональные неравенства.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 18.1.4**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)^2+a\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)+a^2-16=0$$

имеет ровно два различных корня.

**Ответ:** $a=-\frac{8\sqrt{3}}{3}$; $-1-\sqrt{13}<a<-1+\sqrt{13}$.

№18. $\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)^2+a\left(|x-a-1|+|x-a+1|\right)+a^2-16=0$

$t=|x-a-1|+|x-a+1|$ $\nexists$ при $t=0$

2 разл. корня. $a-?$

$|x-a-1|=\underbrace{-|x-a+1|}_{\le 0}$, $|x-a-1|\geq 0$

$(*)$ $t^2+at+a^2-16=0$.

$t\neq 0$ $\Leftarrow$ при $x\in R$

Анализ замены:

$t=|x-a-1|+|x-a+1|\Rightarrow t>0$ (т.к. $t\neq 0$)

$|x-a-1|\geq 0$, $|x-a+1|\geq 0$

$D_{(*)}=a^2-4(a^2-16)=a^2-4a^2+64=-3a^2+64$.

при $D<0\Rightarrow$ нет корней.

$-3a^2+64<0$

$(64-3a^2)<0$

$(8-\sqrt{3}a)(8+\sqrt{3}a)<0$

$a=\frac{8}{\sqrt{3}}$ $a=-\frac{8}{\sqrt{3}}$

$-$ $+$ $-$; $-\frac{8}{\sqrt{3}}$, $\frac{8}{\sqrt{3}}$, $a$

$D=0$ (1 корень).

$t=\frac{-b}{2a}=\frac{-a}{2}$; $-\frac{a}{2}>0$ $a<0$

$D=0$; при $a=\pm\frac{8}{\sqrt{3}}$

$-\frac{a}{2}=|x-a-1|+|x-a+1|$

при $a=\frac{8}{\sqrt{3}}$ $\underbrace{-\frac{8}{2\sqrt{3}}}_{<0}=\underbrace{\left|x-\frac{8}{\sqrt{3}}-1\right|}_{>0}+\underbrace{\left|x-\frac{8}{\sqrt{3}}+1\right|}_{>0}$

$\Downarrow$ $a\neq\frac{8}{\sqrt{3}}$

$a\in\left(-\infty;-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{8}{\sqrt{3}};+\infty\right)$; т.к. при этих $a$; $D<0$, то есть корней нет $\Rightarrow a\notin\left(-\infty;-\frac{8}{\sqrt{3}}\right)\cup\left(\frac{8}{\sqrt{3}};+\infty\right)$.

(не удовл. усл.)

$(*)$ при $a=-\frac{8}{\sqrt{3}}$.

$\frac{8}{2\sqrt{3}}=\left|x+\frac{8}{\sqrt{3}}-1\right|+\left|x+\frac{8}{\sqrt{3}}+1\right|$

$\frac{8}{2\sqrt{3}}=\left|\frac{\sqrt{3}x+8-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|+\left|\frac{x\sqrt{3}+8+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right|\Rightarrow 4=|\sqrt{3}x+8-\sqrt{3}|+|x\sqrt{3}+8+\sqrt{3}|$

№13 (продолжение)

$\cancel{4 = 16 = \left(|\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3}| + |x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3}|\right)^2}$

$\cancel{16 = (\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3})^2 + 2|(\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3})(x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3})| + (x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3})^2}$

$\cancel{16 = (\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3})}$

$\cancel{* \ (\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3})(\sqrt{3}x + 8 - \sqrt{3}) = 3x + 8\sqrt{3} - 3x + 8\sqrt{3}x + 64 - 8\sqrt{3} - \sqrt{3}x - 8\sqrt{3} + 3}$

$\cancel{= 8\sqrt{3}x - 3x + 67 - 8\sqrt{3}.}$

$\cancel{4 = |3\sqrt{x} + 8 - \sqrt{3}| + |a}$

$x_1 = \frac{\sqrt{3} - 8}{\sqrt{3}} \qquad x_2 = \frac{-8 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$

$x_1 > x_2$

$4 = |x\sqrt{3} + 8 - \sqrt{3}| + |x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3}|$

$g = 4 \qquad f(x) = |x\sqrt{3} + 8 - \sqrt{3}| + |x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3}|$

① график „корыто"

тогда основание корыта будет при ① = − (раскрываем с „−")

② = + (раскрываем с „+")

$\Downarrow \ a = -\frac{8}{\sqrt{3}}$ − удовл. усл.

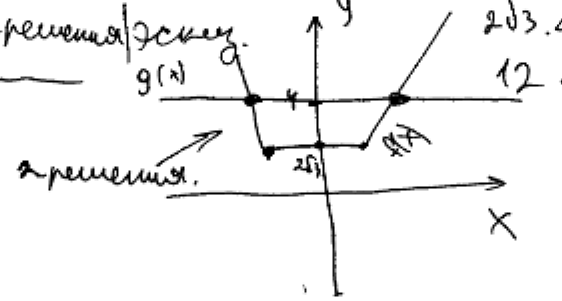
$-\frac{8}{\sqrt{3}} < 0$

$f(x) = -x\sqrt{3} - 8 + \sqrt{3} + x\sqrt{3} + 8 + \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$

при $\boxed{a = -\frac{8}{\sqrt{3}}}$ − 2 решения | эскиз.

$2\sqrt{3} < 4$

$12 < 16$



№18 (продолжение)

$D>0$ ; $a\in\left(-\frac{8}{\sqrt{3}};\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$

$\uparrow$

2 корня.

$t>0 \rightarrow$ огр. замены.

Т. Виета.

$t_1+t_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{a}{1} = -a$

$t_1\cdot t_2 = \frac{c}{a} = a^2-16$

$t_1 = |x-a-1|+|x-a+1| \qquad t_2 = |x-a-1|+|x-a+1|$

Но если оба корня $t_1$ и $t_2$ - удовл. всем условиям => получится более 2-х корней. тогда рассм. случай когда 1 корень удовл. $t>0$; а второй нет.

$D=-3a^2+64>0$

$t_1=\dfrac{-a-\sqrt{64-3a^2}}{2} \qquad t_2=\dfrac{-a+\sqrt{64-3a^2}}{2}$

$4<\frac{8}{\sqrt{3}}$

$16<\frac{64}{3}$

$48<64$

пусть $t_1>0$. $\qquad t_2<0$

$-a-\sqrt{64-3a^2}>0 \qquad -a+\sqrt{64-3a^2}<0$

$\cancel{a<\sqrt{64-3a^2}} \qquad a>\sqrt{64-3a^2}$ $\quad a>0 \quad a\in(4;+\infty)$.

$-a>\sqrt{64-3a^2} \qquad a^2>64-3a^2$

с уч. $D>0$

$a\in\left(4;\frac{8}{\sqrt{3}}\right)$

$a<-\sqrt{64-3a^2} \qquad 4a^2>64$

$-a>\sqrt{64-3a^2} \qquad a^2>16 \quad a\in(-\infty;-\sqrt{16})\cup(\sqrt{16};+\infty)$.

$a<0 \qquad \cancel{a^2>64-3a^2} \qquad a\in(-\infty;-4)\cup(4;+\infty)$.

№18 (продолжение).

$a = -\frac{8}{\sqrt{3}}$ ; $a \in \left(4; \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$

~~Ответ:~~

~~$a \in (-4; 4$~~

$a \in \left(-4; \frac{8}{\sqrt{3}}\right)$

при $a = 4$.

$\cancel{(|x-5|+|x-3|)^2}$

$t^2 + at + \cancel{a^2 - 16} = 0$

$t^2 + 4t = 0$

$t = 0$ $t = -4$. → унеудовл.

$t \neq 0$; $t$

при $a = -4$.

$t^2 - 4t = 0$

$t = 4$; $t = 0$.

$t_1 < 0$; $t_2 > 0$

$\frac{-a + \sqrt{64 - 3a^2}}{2} > 0$

$-a + \sqrt{64 - 3a^2} > 0$

$a < \sqrt{64 - 3a^2}$

$a >$.

$a^2 < 64 - 3a^2$

$4a^2 < 16$

$a \in (-4; 4)$

$a \in$

$a = -\frac{8}{\sqrt{3}}$; $a = 4$

$a$

Ответ: $a \in \left[4; \frac{8}{\sqrt{3}}\right) \cup \left\{-\frac{8}{\sqrt{3}}\right\}$.

***Комментарий.***

Задача не сведена к исследованию расположения корней квадратного уравнения $y^2 + ay + a^2 - 16 = 0$, где $y = |x - a - 1| + |x - a + 1|$.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 18.2.1**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

**Ответ:** $-5 < a < -4$; $-4 < a < -3$.

№18

$a$-? Система имеет ровно 4 реш.

$$\begin{cases} y = |x-a|-4 & (1) \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 & (2) \end{cases}$$

Решение:

1) Рассм. (1): $y = |x-a| - 4$ – график модуля с $k=1$ и ветвями вверх, вершина в т. $(a; -4)$

2) Рассм. (2): $|y| = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ – парабола $y = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ на $y \geq 0$, симметрично отраженная на $y<0$.

Рассм. $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - 2x$ – парабола, ветви вниз, $x_в = \frac{2}{-\frac{1}{4} \cdot 2} = -4$, $y_в = f(x_в) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 = -4 + 8 = 4$.

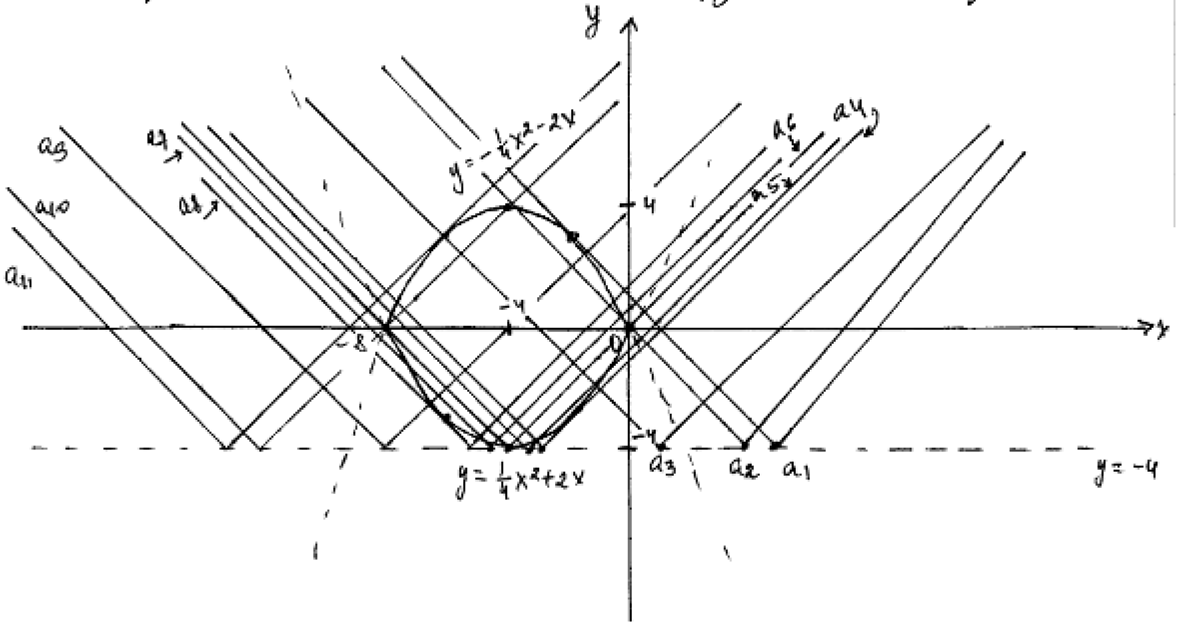
Пересекает $Ox$ в точках $(0;0)$ и $(-8;0)$ т.к.:

$-\frac{1}{4}x^2 - 2x = 0 \mid \cdot(-4)$

$x^2 + 8x = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -8 \end{array}\right.$

3) Изобразим систему (1) на коорд. пл-ти $xOy$:



Рассматривая различные значения параметра $a$, получаем следующее:

- если $a > a_1$, то 0 решений, где $a_1$ — касание ~~правой~~ левой ветви (1) и верхней параболы (2)
- если $a = a_1$, то 1 решение
- если $a \in (a_4; a_1)$, то 2 решения, где $a_4$ — касание правой ветви (1) и нижней параболы (2)
- если $a = a_4$, то 3 решения
- если $a \in (a_6; a_4)$, то 4 решения, где $a_6$ — (1) проходит ч/з $(0;0)$ и $(-8;0)$
- если $a = a_6$, то 3 решения
- если $a \in (a_8; a_6)$, то 4 решения, где $a_8$ — касание левой ветви (1) с нижней параболой (2)
- если $a \in (a_{11}; a_8)$, то 2 решения, где $a_{11}$ — касание правой ветви (1) и верхней параболы (2)
- если $a = a_{11}$, то 1 решение
- если $a < a_{11}$, то 0 решений.

4) Приходим к выводу, что условию удовл. $a \in (a_6; a_4)$ и $a \in (a_8; a_6)$.

а) Найдём $a_6$: (1) проходит ч/з $(0;0)$ и $(-8;0)$, правой ветвью ч/з $(0;0)$, левой ч/з $(-8;0)$. Тогда:

$0 = 0 - a - 4$, т.е. $a = -4$.

б) Найдём $a_4$:

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x = x - a - 4 \quad |\cdot 4$$

$$x^2 + 8x - 4x - 4a - 16$$

$$x^2 + 4x + 4a + 16 = 0 \quad (*)$$

Т.к. $a_4$ — касание, то ур-ие $(*)$ должно иметь 1 реш.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - 4a - 16 = 4 - 4a - 16 = -4a - 12.$$

$$\frac{D}{4} = 0: \quad -4a - 12 = 0, \text{ т.е. } a = -3.$$

в) Найдём $a_8$:

$$\frac{1}{4}x^2 + 2x = -x + a - 4 \quad |\cdot 4$$

$$x^2 + 8x = -4x + 4a - 16$$

$$x^2 + 12x - 4a + 16 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 6^2 + 4a - 16 = 36 + 4a - 16 = 20 + 4a$$

Т.к. $a_8$ — ситуация касания, то $\frac{D}{4} = 0$: $20 + 4a = 0$, $a = -5$.

5) Таким образом, условию удовл. $a \in (-5; -4) \cup (-4; -3)$.

Ответ: $(-5; -4) \cup (-4; -3)$.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 18.2.2**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

**Ответ:** $-5 < a < -4$; $-4 < a < -3$.

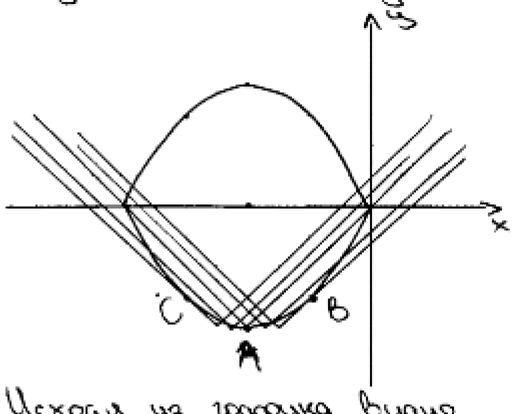
(18) $\begin{cases} y=|x-a|-4 \\ 4|y|+x^2+8x=0 \quad (1) \end{cases}$

(1) $\begin{cases} y \geq 0 \\ 4y+x^2+8x+16-16=0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y<0 \\ -4y+x^2+8x+16-16=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4-\frac{1}{4}(x+4)^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ $\quad y<0$, $y=\frac{1}{4}(x+4)^2-4$

$$\begin{cases} y=|x-a|-4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \geq 0 \\ y=4-\frac{1}{4}(x+4)^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y<0 \\ y=\frac{1}{4}(x+4)^2-4 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Построим график Gr$\left(y=4-\frac{1}{4}(x+4)^2\right)$ – пар-ла, ветви вниз, вершина в точке O(-4;4) и проход через точки (0,0) и (-8,0)
$y \geq 0$ – область выше прямой $y=0$, а $y<0$ – обл-ть ниже $y=0$
Построим Gr $\left(y=\frac{1}{4}(x+4)^2-4\right)$ – пар-ла, ветви вверх, вершина в точке (-4;-4) и проход. через точки (0,0) и (-8;0)
Gr $(y=|x-a|-4)$ – сим-н отн-но $x=a$, образован из Gr $(y=|x|)$ со сдвигом вниз на 4 и сдвигом на $a$ вправо или влево




Найдем точки пересечения графиков:
Gr $(y=|x-a|-4)$, Gr$\left(y=\frac{1}{4}(x+4)^2-4\right)$, $x=-4$

$\begin{cases} y=|x-a|-4 \\ y=\frac{1}{4}(x+4)^2-4 \\ x=-4 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \\ |-4-a|=0 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-4 \\ y=-4 \\ a=-4 \end{cases}$ в (·)A(-4; $\quad a=-4$

точка касания Gr$(y=|x-a|-4)$ и Gr $\left(y=\frac{1}{4}(x+4)^2-4\right)$

$$\begin{cases} |x-a|-4=\frac{1}{4}(x+4)^2-4 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq a \\ 1=\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x<a \\ -1=\frac{1}{2}x+2 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\begin{cases} x \geq a \\ x=-2 \\ x-a-4 = \frac{1}{4}(x+4)^2-4 \\ y=x-a-4 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x<a \\ x=-6 \\ a-x-4=\frac{1}{4}(x+4)^2-4 \\ y=a-x-4 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq a \\ x=-2 \\ a=-3 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow$ в (·)B(-2;-3) $\quad a=-3$

$\begin{cases} x<a \\ x=-6 \\ a=-5 \\ y=-3 \end{cases} \Rightarrow$ в (·)C(-6;-5) $\quad a=-5$

Исходя из графика, видно, что в (·)A сис-ма им. 3 реш, в (·)B и (·)C – 3 реш
в промежутках между (·)A и (·)C и (·)A, (·)B сис-ма им 4 реш
в промежутках левее (·)C и правее (·)B сис-ма им 2 или менее корн

По условию необходимо найти знач-я $a$, при кот. сис-ма будет иметь 4 различных решения, тогда $a \in (-5;-4) \cup (-4;-3)$

Ответ: $(-5;-4) \cup (-4;-3)$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 18.2.3**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

**Ответ:** $-5 < a < -4$; $-4 < a < -3$.

№18

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4 & (1) \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 & (2) \end{cases}$$

Построим график выражения (2).

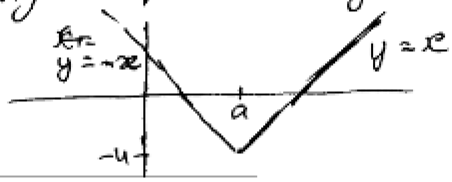
$$|y| = \frac{-x^2-8x}{4} = -\frac{x(x+8)}{4}$$

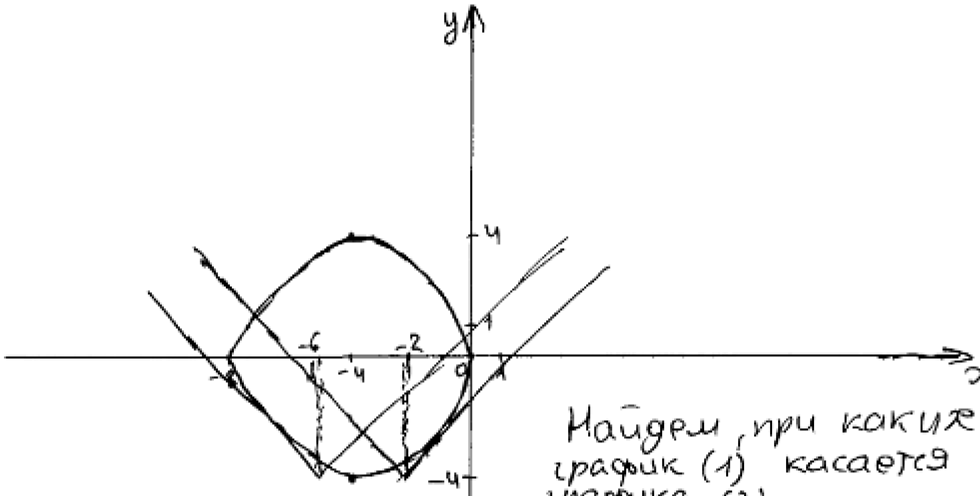
1. $y > 0$: $y = -\frac{x(x+8)}{4}$  $x_в = -4$; $y_в = 4$; ветви вниз

2. $y < 0$: $y = \frac{x(x+8)}{4}$  $x_в = -4$; $y_в = -4$; ветви вверх

Корни $x = 0$ и $x = -8$.

График (1) представляет из себя „галочку", образованную прямыми $y = x$ и $y = -x$






Найдем, при каких $a$ график (1) касается графика (2)

$\cancel{x = \frac{x(x+8)}{4}}$

$\cancel{4x = x^2 + 8x}$

$\cancel{x^2 + 4x = 0}$

$\cancel{x(x+4) = 0}$

$y = \frac{1}{4}x^2 + \cancel{8}2x$

$y' = \frac{1}{2}x + 2 = 1$

$x_0 = -2$

$y(x_0) = \frac{1}{4} \cdot 4 - 4 = -3$

$x - (a+4) = -3$

$x - a - 4 = -3$

$-2 - a - 4 = -3$

$-a = 3$

$\underline{a = -3}$

$\frac{1}{2}x + 2 = -1$

$\frac{1}{2}x = -3$

$x = -6$

$y(x_0) = \frac{1}{4} \cdot 36 - 12 = 9 - 12 = -3$

$\cancel{-6}\ y = -x + (a-4) = -3$

$6 + (a-4) = -3$

$a + 2 = -3$

$a = -5.$

$a = -3$ и при $a = -5$ – 3 решения

~~от~~ $a < -5$ либо 2, либо 0 решений

$a > -3$ либо 2, либо 0 решений

Ответ: $a \in (-5; -3)$

***Комментарий.***

С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-5; -3)$ множества значений $a$.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 18.2.4**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4, \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

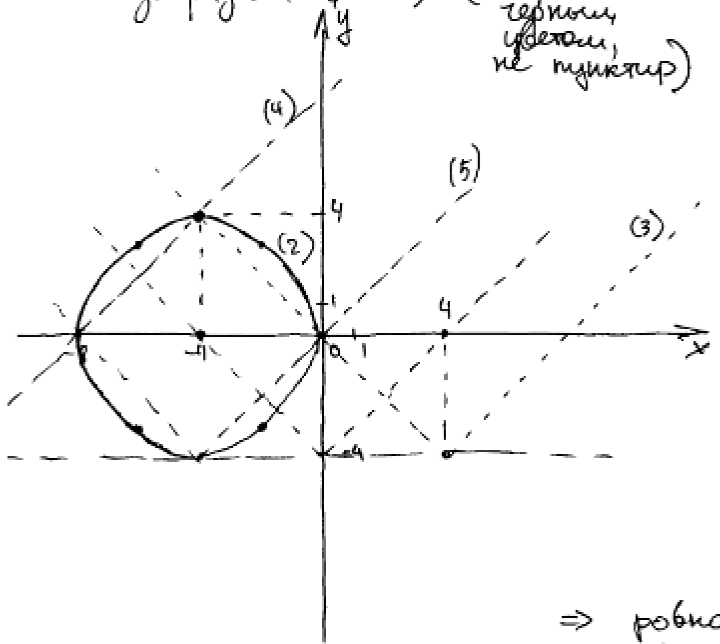
имеет ровно четыре различных решения.

**Ответ:** $-5 < a < -4$; $-4 < a < -3$.

$\boxed{\text{Задание 18}}$

$$\begin{cases} y = |x-a| - 4 \\ 4|y| + x^2 + 8x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = |x-a| - 4 & (1) \\ |y| = -\frac{1}{4}x^2 - 2x & (2) \end{cases}$$

Изобразим (2) (жирным черным цветом, не пунктир)




• так как это график $|y|$ то, отразим значения $y$ в отриц относительно оси $Ox$.

• (1) – представляет собой график $y = |x| - 4$, но при изменении $a$ график двигается на $(+a)$ по оси $y = -4$. например при $a = 4$ график выглядит (3)

$\Rightarrow$ ровно 4 различных решение не будет при $a = 4$ ведь тогда два корня равны и всего их 3.

$\Rightarrow$ графики (3); (4); (5) не будут обеспечивать наличие 4 различных корней, ведь тогда их будет 3 как в (3) и (4) а при (5) их 2. $\Rightarrow a \neq 4$; $a \neq -4$; $a \neq -12$

$\boxed{\text{Ответ}}$: $a \in (-\infty; -12) \cup (-12; -4) \cup (-4; 4) \cup (4; +\infty)$

***Комментарий.***

Задача не сведена к исследованию взаимного расположения дуг парабол и лучей (аналитически или графически)

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 18.3.1**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

**Ответ:** $a=-13$; $-9\le a<3$.

№ 18.

$$\begin{cases}(x^2-5x-y+3)\sqrt{x-y+3}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$$ $\boxed{\text{ровно 2 реш.}}$

Решим задачу геометрически.

Рассмотрим первое уравнение системы. Оно имеет смысл при $x-y+3\ge 0 \iff y\le x+3$.

Тогда имеем: $x^2-5x-y+3=0$ или $\sqrt{x-y+3}=0$

$x-y+3=0$

$y=x+3$ – прямая

| $x$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $y$ | 3 | 4 |

$y=x^2-5x+3$ – парабола, ветви вверх.

$x_0=\frac{5}{2}=2{,}5$

$y_0=2{,}5^2-5\cdot 2{,}5+3=6{,}25-12{,}5+3=-3{,}25$

Вершина параболы – $(2{,}5;\ -3{,}25)$

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 2,5 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 3 | −1 | −3 | −3,25 | −3 | −1 | 3 |

$x=2 \Rightarrow y=2^2-5\cdot 2+3=4-10+3=-3$

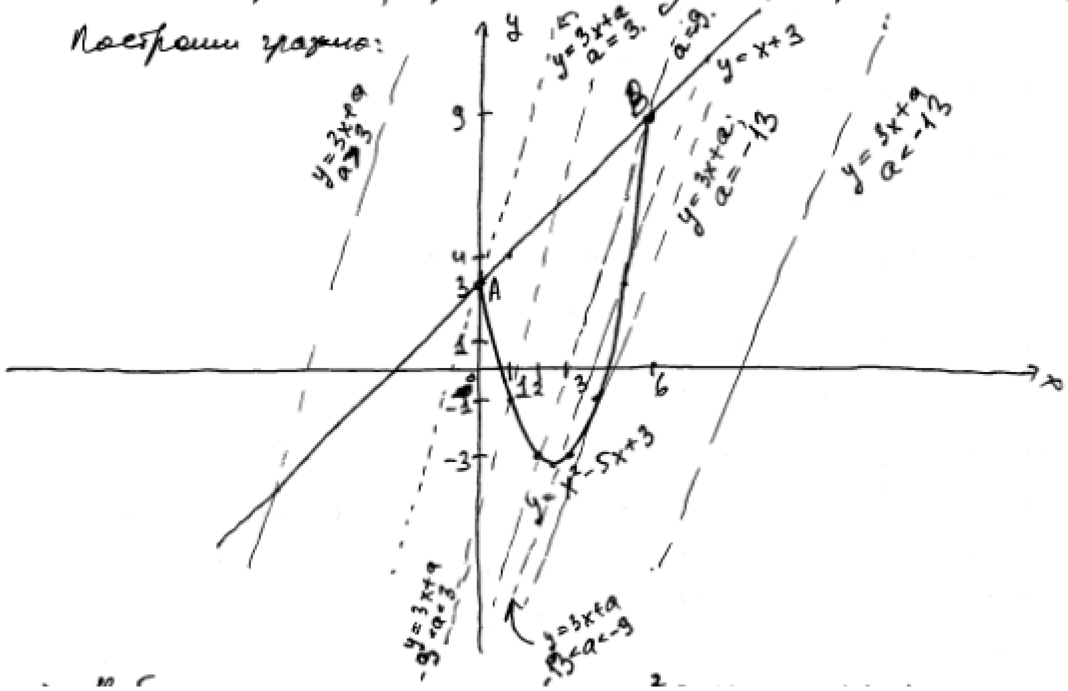
$x=1 \Rightarrow y=1^2-5\cdot 1+3=1-5+3=-1$

$x=0 \Rightarrow y=0^2-5\cdot 0+3=3$

Отметим, что $y\le x+3$ задает полуплоскость под прямой $y=x+3$

Рассмотрим 2-е ур. системы: $y=3x+a$. Оно задает семейство прямых параллельных $y=3x$. Коэф. наклона = 3.

Построим график:



1) Найдем коорд. пересечений $y = x^2-5x+3$ и $y = x+3$:

$x^2-5x+\underline{3} = x+\underline{3}$

$x^2-6x=0$

$x(x-6)=0$

$x=0$ или $x=6$

При $x=0$, $y=0+3=3$

При $x=6$, $y=6+3=9$

Пусть: $A(0;3)$, $B(6;9)$

2) Найдем, при каком $a$ график $y=3x+a$ пройдет через т. $A(0;3)$:

~~$3=3a+3 \Rightarrow a=3$~~ $3=3\cdot0+a \rightarrow \underline{a=3}$

3) Найдем, при каком $a$ график $y=3x+a$ пройдет через т. $B(6;9)$:

$9=3\cdot6+a \rightarrow \underline{a=-9}$

4) Найдем, при каком $a$ график $y=3x+a$ будет касательной к параболе $y=x^2-5x+3$

$3x+a = x^2-5x+3$

$x^2-8x+(3-a)=0$

$D = 64-4(3-a) = 64-12+4a = 52+4a$

Т.к. $y=3x+a$ касается параболы, то пересечение ровно в 1 точке $\Rightarrow$ $D=0$

$52+4a=0$

$4a=-52$

$\underline{a=-13}$

Рассмотрим, сколько корней имеет изначальная система в зависимости от $a$:

$a<-13 \rightarrow 1$к. (пересек. $y=x+3$)

$a=-13 \rightarrow 2$к. (пересеч. $y=x+3$ и касан. $y=x^2-5x+3$)

$-13<a<-9 \rightarrow 3$к. (пересеч. $y=x+3$ и 2 пересеч. с $y=x^2-5x+3$)

$a=-9 \rightarrow 2$к. (пересеч. $y=x+3$ и 2 пересеч. с $y=x^2-5x+3$, но 2 из них совпадают в т. $A$)

$-9<a<3 \rightarrow 2$к. (пересеч. с $y=x+3$ и 1 пересеч. с $y=x^2-5x+3$)

$a=3 \rightarrow 1$к. (пересеч. с $y=x+3$ и 1 пересеч. с $y=x^2-5x+3$, но совпадают в т. $B$).

$a>3 \rightarrow 1$к. (пересеч. с $y=x+3$).

Система имеет ровно 2 реш, при $a\in\{-13\}\cup[-9;3)$.

Ответ: $a\in\{-13\}\cup[-9;3)$.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 18.3.2**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} \left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0, \\ y=3x+a \end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

**Ответ:** $a=-13$; $-9\le a<3$.

N 18

$\begin{cases} (x^2-5x-y+3)\sqrt{x-y+3}=0 \\ y=3x+a \end{cases}$

$\boxed{(*)\ \sqrt{x-y+3}\ge 0;\quad x-y+3\ge 0;\quad y\le x+3}$

1) $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2-5x-y+3=0 \\ \sqrt{x-y+3}=0 \end{array}\right. \\ y=3x+a \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x^2-5x+3 \\ x-y+3=0 \end{array}\right. \\ y=3x+a \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=x^2-5x+3 \quad ① \\ y=x+3 \quad ② \end{array}\right. \\ y=3x+a \quad ③ \end{cases}$

2) построим график согласно заданной системе:

① $y=x^2-5x+3$

$x_0=-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}=2{,}5$

$y_0=2{,}5^2-5\cdot 2{,}5+3=$
$=6{,}25-12{,}5+3=-3{,}25$

$a>0$ => это график параболы с ветвями, направленными вверх

② $y=x+3$ – линейная функция


3) нам подходят все значения $x$ и $y$, лежащие ниже $y=x+3$ по (*)

4) построим график ③ и определим значения $a$.

I в точке касания ① и ③ система имеет 2 решения; т.к. графики касаются друг друга, то их производные равны.

$y=3x+a$ $\qquad y=x^2-5x+3$
$y'=3$ $\qquad y'=2x-5$
$3=2x-5$ => $x=4$
$y=x^2-5x+3=4^2-5\cdot 4+3=-1$
$a=y-3x=-1-3\cdot 4=-13$

II в точке пересечения ① и ② система имеет 2 решения, их значения равны
$y=x+3$ $\qquad y=x^2-5x+3$
$x+\cancel{3}=x^2-5x+\cancel{3}$
$x^2-6x=0$
$x(x-6)=0$ => $\left[\begin{array}{l} x=0 \quad y=x+3=0+3=3 \\ x=6 \quad y=x+3=6+3=9 \end{array}\right.$

$a=y-3x$ $\quad a_1=3-0\cdot 3=3$
$\qquad a_2=9-3\cdot 6=-9$ ; при дальнейшем перемещении $y=3x+a$ влево система имеет 1 решение.

$\boxed{\text{Ответ: } a\in\{-13\}\cup[-9;3)}$

***Комментарий.***

Решение не является обоснованным, но получен промежуток $[-9;3)$.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 18.3.3**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}\left(x^2-5x-y+3\right)\cdot\sqrt{x-y+3}=0, \\ y=3x+a\end{cases}$ имеет ровно два различных решения.

**Ответ:** $a=-13$; $-9 \le a < 3$.

$$\begin{cases}(x^2-5x-y+3)\sqrt{x-y+3}=0 \\ y=3x+a\end{cases}$$ №18. 2 реш. $a$-?

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-5x-y+3=0 \\ x-y+3\geq 0\end{cases} \\ x-y+3=0\end{array}\right. \\ y=3x+a\end{cases} \qquad \begin{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x^2-5x+3 \\ y\leq x+3\end{cases} \\ y=x+3\end{array}\right. \\ y=3x+a\end{cases}$$

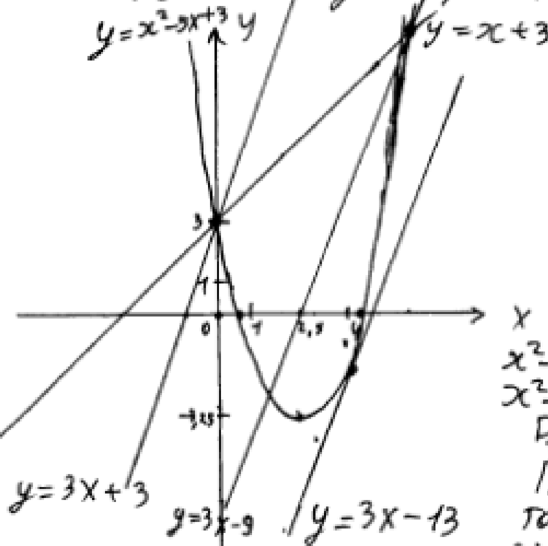
Решим систему графически: $y=x^2-5x+3$ – парабола

$y=x+3$ – прямая, $y=3x+a$ – семейство прямых с угловым коэфф. 3.

$D=25-4\cdot 3=13$ / Нули параболы: $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. $3<\sqrt{13}<4$

$4<\frac{5+\sqrt{13}}{2}<4{,}5$ $x_в=2{,}5$

$0{,}5<\frac{5-\sqrt{13}}{2}<1$ $y_в=-3{,}25$




Т. пересеч. параболы и $y=x+3$:

$x^2-5x+3=x+3$

$x^2-6x=0$

$\left[\begin{array}{ll}x=0 & (y=3) \\ x=6 & (y=9)\end{array}\right.$

Прямая $y=3x+a$ касается параболы в случае $D_1=0$.

$x^2-5x+3=3x+a$

$x^2-8x+3-a=0$

$D_1=16+a-3=13+a=0$ $a=-13$

Прямая $y=3x+a$ ~~может~~ имеет 2 точки пересечения с параболой при $a>-13$, 1 – при $a=-13$ и 0 – при $a<-13$

С прямой $y=x+3$ прямая $y=3x+a$ всегда имеет 1т. пересечения.

$y=3x+a$ проходит через $(0;3)$ при $3=0+a$, $a=3$.

через $(6;9)$ при $9=6\cdot 3+a$ $a=-9$

При $a>3$, 3 точки пересеч. При $a=3$, 2 т. пересечения.

При $-9<a<3$, 3 точки пересечения. При $a=-9$, 2 т. пересечения

При $-13<a<-9$, 3 точки пересечения. При $a=-13$, 2 т. пересечения.

При $a<-13$ 1 точка пересечения.

Ответ: 3; -9; -13.

***Комментарий.***

Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически).

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 18.4.1**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

**Ответ:** $-2 \le a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \le 2$.

$$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1 \ge 0 \\ 3x^2+2ax+1=(x^2+ax+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ 3x^2+2ax+1 = x^4+2ax^3+x^2(2+a^2)+2ax+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ x^2(x^2+2ax+2+a^2-3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ x^2(x^2+2ax+a^2-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \end{array}\right. \end{cases} \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \ (2) \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \ (1) \end{cases} \end{array}\right.$$

Для того чтобы система имела 3 различных решения, необходимо, чтобы (1) имело 2 различных решения не равных 0 и удовлетворяющих (2), пусть $g(x)=x^2+2ax+a^2-1$, $f(x)=x^2+ax+1$; $g(0)=0 \Rightarrow a^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \end{array}\right. \Rightarrow a=1$ и $a=-1$ не подходят

Заметим, что (1) $\Leftrightarrow x^2+2ax+a^2-1=0 \Leftrightarrow (x+a)^2-1=0 \Leftrightarrow (x+a-1)(x+a+1)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-a \\ x=-1-a \end{array}\right.; \text{ тогда } (*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} x^2+ax+1\ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=1-a \\ x=-1-a \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ \begin{cases} 1-2a+a^2+a-a^2+1\ge 0 \\ x=1-a \end{cases} \\ \begin{cases} 1+2a+a^2-a-a^2+1\ge 0 \\ x=-1-a \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ (4)\begin{cases} a\le 2 \\ x=1-a \end{cases} \\ (3)\begin{cases} a\ge -2 \\ x=-1-a \end{cases} \end{array}\right.$$

(*) три различных решения система имеет тогда, когда ~~(3) и (4) имеют~~ (3) и (4) имеют различные, не равные нулю решения; Найдём, при каких $a$ совпадают корни 3 и 4:

$1-a=-1-a \Leftrightarrow 1=-1 \Rightarrow$ таких $a$ не существует. (3) имеет реш. равное 0 при $a=-1$ – не подход. (4) имеет реш. $=0$ при $a=1$ – не подход.

(3) имеет реш. при $a\ge -2$; (4) имеет реш. при $a\le 2 \Rightarrow$ (3) и (4) имеют различные реш., отлич. от 0 при $a\in[-2;2]$ и $a\ne \pm 1$

Ответ: $a\in[-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2]$

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 18.4.2**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

**Ответ:** $-2 \le a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \le 2$.

$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$

$a$ — ; 3 различных корня

1) $x^2+ax+1<0$ нет решений

2) $x^2+ax+1=0$ (1)

тогда $3x^2+2ax+1=0$ (2)

возможны ситуации: (1) имеет 2 различных корня, (2) имеет 1 корень; (1) имеет 1 корень, (2) имеет 2 различных корня

(1) $x^2+ax+1=0$, $D>0$, $a^2-4>0$, $(a-2)(a+2)>0$

(2) $3x^2+2ax+1=0$, $D/4=a^2-3=0$, $a^2=3$, $a=\pm\sqrt{3}$

$-2$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $2$, $a$

при $a=\pm\sqrt{3}$ $D$ в (1) не $>0$ $\Rightarrow a\ne\pm\sqrt{3}$

(1) $x^2+ax+1=0$, $D=0$, $a^2-4=0$, $a=\pm 2$

$x_3=\frac{-a}{2}$

(2) $3x^2+2ax+1=0$, $D/4=a^2-3>0$, $(a-\sqrt{3})(a+\sqrt{3})>0$

$-2$, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$, $2$

$a=\pm 2$ проверим

$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-3}}{3}$

при $a=2$: $x_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-3}}{3}=\frac{-2\pm 1}{3}$ корни различные

$x_1=-1$, $x_3=-1$, $x_2=-\frac{1}{3}$, $x_1=x_3$, $a=2$ не подходит

аналогично при $a=-2$

при $a=-2$: $x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-3}}{3}$, $x_{1,2}=\frac{2\pm 1}{3}$, $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=1$, $x_1=x_3$, $a=-2$ не подходит

3) $x^2+ax+1>0$

$3x^2+\cancel{2ax}+\cancel{1}=x^4+a^2x^2+\cancel{1}+2ax^3+2x^2+\cancel{2ax}$

из 2) $\boxed{a\ne\pm 2}$

см. продолжение

продолжение

должно выполняться

$x^2+ax+1>0$ (*) нер-во со звёздочкой

(3) $x^4+a^2x^2-x^2+2ax^3=0$

$x^2(x^2+a^2-1+2ax)=0$

$\boxed{x_3=0}$ - корень, который ур-е будет иметь независимо от параметра $a$

$x^2+2ax+a^2-1=0$

должно иметь 2 различных решения, тогда ур-е будет иметь 3 корня

$D/4=a^2-(a^2-1)>0$

$a^2-a^2+1>0$

верно для любого $a$

(корни не должны совпадать и не должны равняться $x_3$)

$x_{1,2}=\frac{-a\pm1}{1}$

$x_1=-a+1$ $\quad x_2=-a-1$

$x_1\neq x_2$ $\quad -a+1\neq-a-1$

$1\neq-1$ верно для любого $a$

$x_1\neq x_3$

$-a+1\neq0$ $\quad -a-1\neq0$

$\boxed{a\neq1}$ $\quad \boxed{a\neq-1}$

(*): $x_1=-a+1$ $\quad$ должны выполняться оба нер-ва (и при $x_1$ и при $x_2$) $\quad x_2=-a-1$

$(-a+1)^2+a(-a+1)+1>0$ $\quad (-a-1)^2+a(-a-1)+1>0$

$(1-a)^2-a^2+a+1>0$ $\quad (a+1)^2-a^2-a+1>0$

$1-2a+a^2-a^2+a+1>0$ $\quad a^2+2a+1-a^2-a+1>0$

$2-a>0$ $\quad a+2>0$

$\boxed{a<2}$ $\quad a>-2$

3 корня ур-е будет иметь при $a$:

$a\in(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2)$

Ответ: $(-2;-1)\cup(-1;1)\cup(1;2)$

***Комментарий.***

В решении присутствуют все этапы. Решение соответствует критерию на 3 балла: с помощью верного рассуждения получено множество значений $a$, отличающееся от искомого только исключением точек $a=-2$ и/или $a=2$.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 18.4.3**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

**Ответ:** $-2\le a<-1$; $-1<a<1$; $1<a\le 2$.

$\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$

$\begin{cases} x^2+ax+1\geq 0 \\ 3x^2+2ax+1=x^4+a^2x^2+1+2x^2+2ax^3+\cancel{2ax} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+ax+1\geq 0 \\ x^4+a^2x^2-x^2+2ax^3=0. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+ax+1\geq 0 \\ x^2(x^2+a^2-1+2ax)=0. \end{cases}$

$\begin{cases} x^2+ax+1\geq 0. \\ \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0; \end{array}\right. \end{cases}$

Уравнение имеет решение, когда $x^2+2ax+a^2-1=0$ имеет 2 корня и они удовлетворяют неравенству $x^2+ax+1\geq 0$.

$x^2+2ax+a^2-1=0$

$(x+a)^2-1=0$

$(x+a-1)(x+a+1)=0.$

$\left[\begin{array}{l} x=-a+1 \\ x=-a-1 \end{array}\right.$ Подставим $x$ в $x^2+ax+1\geq 0.$

1) $(-a+1)^2+a(-a+1)+1\geq 0.$
$a^2-2a+1-a^2+a+1\geq 0.$
$-a+2\geq 0$ $a\leq 2$
$a\in[-1;2].$

2) $(-a-1)^2+a(-a-1)+1\geq 0$
$a^2+2a+1-a^2-\cancel{a}+1\geq 0$
$2a+2\geq 0$
$a\geq -1.$

Найдем значение $x$, когда они совпадают:

3 случая

1) $-a+1=-a-1$ 1) – нет решений
2) $0=-a+1$ 2) $a=1$
3) $0=-a-1$ 3) $a=-1.$ } – выкалываем эти точки

$a\in(-1;1)\cup(1;2].$

Ответ: $(-1;1)\cup(1;2]$. при $a\in$ уравнение имеет 3 разл. корня.

***Комментарий.***

Решение логично, все шаги присутствуют, но при решении неравенства в пункте 2 допущена ошибка вычислительного характера, что соответствует критерию на 2 балла.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 18.4.4**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x^2+2ax+1}=x^2+ax+1$ имеет ровно три различных корня.

**Ответ:** $-2 \le a < -1$; $-1 < a < 1$; $1 < a \le 2$.

$\sqrt{3x^2+2ax+1} = x^2+ax+1$ (1); $a$ - ?
ур-е имеет 3 различных корня

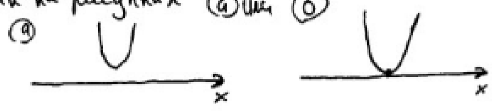
1) О.Д.З: $x^2+ax+1 \geq 0$

$x^2+ax+1=0$ ; $x^2+ax+1 \geqslant 0$, если $D \leqslant 0$, так как тогда парабола будет располагаться так, как на рисунках (а) или (б)

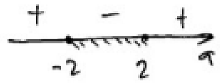
$D=a^2-4$

ветви направлены вверх так как коэф. при $x^2$ равен $1>0$

(а) (б)




$D \leqslant 0 \Rightarrow a^2-4 \leqslant 0$ ; $(a-2)(a+2) \leqslant 0$




$\Rightarrow a \in [-2;2]$ (*)

2) ~~тогда~~ при $a \in [-2;2]$ возведём обе части уравнение в квадрат, тогда

$3x^2+2ax+1 = (x^2+ax+1)^2$

$3x^2+2ax+1 = (x^2+ax)^2+2(x^2+ax)+1$

$3x^2+\cancel{2ax}+\cancel{1} = x^4+2ax^3+a^2x^2+2x^2+\cancel{2ax}+\cancel{1}$

$x^4+2ax^3+(a^2+2-3)x^2=0$

$x^2 \cdot (x^2+2ax+a^2-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+2ax+a^2-1=0 \end{array}\right.$

Чтобы уравнение имело ровно 3 различных корня нужно, чтобы $x^2+2ax+a^2-1=0$ имело ровно 2 корня, отличные от друг друга

$x^2+2ax+a^2-1=0$ (**)

$\frac{D}{4}=a^2-a^2+1=1 \Rightarrow x_{1,2}=-a \pm 1$

$x_1 \neq x_2$, т.к $-a+1 = \cancel{-}a-1 \Rightarrow 1=-1$ - не верно

$\Rightarrow$ уравнение (**) имеет 2 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ

$\Rightarrow$ уравнение (1) имеет 3 различных корня при $\forall a$ из ОДЗ, то есть $a \in [-2;2]$

Ответ: $a \in [-2;2]$

***Комментарий.***

Получены корни уравнения $x=0$, $x=1-a$, $x=-1-a$ и задача сведена к исследованию полученных корней при условии $x^2+ax+1 \geq 0$ (есть только указание).

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 18.5.1**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x+5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Ответ:** $-8 \le a \le \dfrac{7}{4}$.

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 \\ y+2=a(x-5) \end{cases}$$

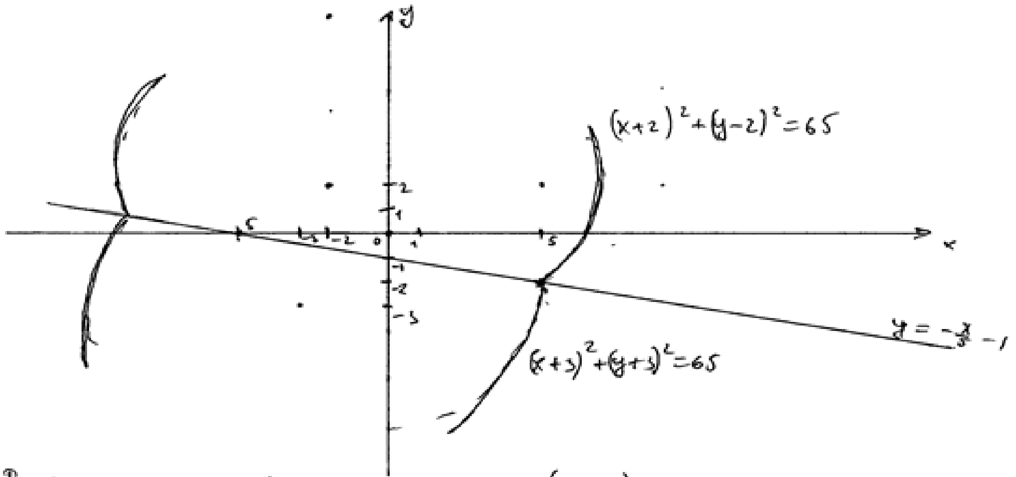
Рассмотрим 2 случая при $x+5y+5 \ge 0$ и при $x+5y+5<0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52 \\ x+5y+5 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52 \\ x+5y+5<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x+2)^2+(y-2)^2=65 \\ y \ge -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \\ \begin{cases} (x+3)^2+(y+3)^2=65 \\ y \le -\frac{x}{5}-1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(x+2)^2+(y-2)^2=65$ — графиком ф-ии евляется окр. с центром $(-2;2)$ и $r=\sqrt{65}$

$(x+3)^2+(y+3)^2=65$ — графиком ф-ии евляется окр. с центром $(-3;-3)$ и $r=\sqrt{65}$.

Построим эскизы графиков.




Рассмотрим $y+2=a(x-5)$.

$y=a(x-5)-2$. — графиком ф-ии евляется множество прямых, проходящих через точку $(5;-2)$. Тогда, для касания окр. $(\{-3;-3\};\sqrt{65})$ „a" должно быть равно $-8$, а для касания окр$(\{-2;2\};\sqrt{65})$ „a" должно быть равно $\frac{7}{4}$.

при $a \in [-8;\frac{7}{4}]$ сис-ма имеет 2 корня.

при $a \in (-\infty;-8) \cup (\frac{7}{4};+\infty)$ сис-ма имеет 3 корня.

Ответ: $a \in [-8;\frac{7}{4}]$.

***Комментарий.***

Решение и ответ верные, хотя нет обоснования, почему для касания $a$ «$a$ должно быть равно –8» или «…7/4».

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 18.5.2**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x+5y+5|=52,\\ y-2=a(x-5)\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

**Ответ:** $-8\le a\le\dfrac{7}{4}$.

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2+y-|x+5y+5|=52 & (1)\\ y+2=a(x-5) & (2)\end{cases}$$

$$(1)\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+5y+5\ge 0\\ x^2+5x+y^2+y-x-5y-5=52\end{cases}\\ \begin{cases} y<\dfrac{-x-5}{5}\\ x^2+5x+y^2+y+x+5y+5=52\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\ge\dfrac{-x-5}{5}\\ x^2+4x+y^2-4y=57\end{cases}\\ \begin{cases} y<\dfrac{-x-5}{5}\\ x^2+6x+y^2+6y=47\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y\ge\dfrac{-x-5}{5} & (1.1)\\ (x+2)^2+(y-2)^2=65\end{cases}\\ \begin{cases} y<\dfrac{-x-5}{5} & (1.2)\\ (x+3)^2+(y+3)^2=65\end{cases}\end{array}\right.$$

$(x+2)^2+(y-2)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т. $Q(-2;2)$ и $R_1=\sqrt{65}$

$(x+3)^2+(y+3)^2=65$ – ур-е окр-ти с центром в т. $P(-3;-3)$ и $R_2=R_1=\sqrt{65}$

$$1.1)\ \begin{cases} y\ge\dfrac{-x-5}{5}\\ (x+2)^2+(y+2)^2=65\end{cases}$$

т. перес. с прямой $y=\dfrac{-x-5}{5}$

$(x+2)^2+\left(\dfrac{-x-5}{5}-2\right)^2=65$

$(x+2)^2+\left(-\dfrac{(x+5)-10}{5}\right)^2=65$

$(x+2)^2+\dfrac{(x+5+10)^2}{25}=65$

$(x+2)^2+\dfrac{(x+15)^2}{25}=65$

$x^2+4x+4+\dfrac{x^2+30x+225}{25}=65$

$25x^2+100x+100+x^2+30x+225-65\cdot 25=0$

$26x^2+130x-1300=0$

$2x^2+10x-100=0$

$x^2+5x-50=0$

$D=25+200=225$

$x_1=\dfrac{-5+15}{2}=5,\quad y_1=\dfrac{-5-5}{5}=-2$

$x_2=\dfrac{-5-15}{2}=-10\quad y_2=\dfrac{10-5}{5}=1$

1 2.) $\begin{cases} y < -\frac{x-5}{5} \\ (x+3)^2+(y+3)^2=65 \end{cases}$

т. перес. с пр. $y=-\frac{x-5}{5}$

$(x+3)^2 + \frac{(x+5+15)^2}{25} = 65$

$25x^2+6\cdot 25x+9\cdot 25+(x-10)^2-65\cdot 25=0$

$26x^2+150x+225-20x+100-1625=0$

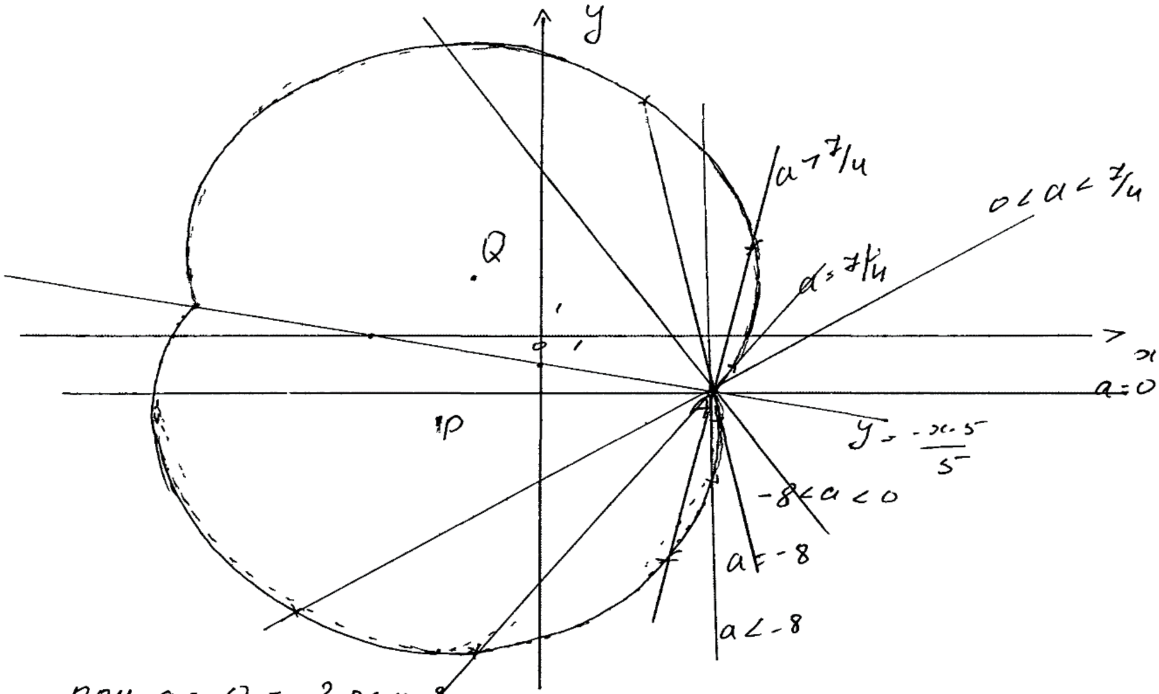
$26x^2+130x-1300=0$

$x^2+5x-50=0$

$x_3=x_1=5$, $y_3=y_1=-2$

$x_4=x_2=-10$, $y_4=y_2=1$

(2) $y=a(x-5)-2$ – ур-е пучка прямых, проход. через т. $A(5;-2)$ см. продолжение на доп. бланке




при $a=0$ – 2 реш-я

найдём $a$, при к.м $y=a(x-5)-2$ касается окр-ти с ц. в т. Q

$(x+2)^2+(a(x-5)-2-2)^2=65$

$x^2+4x+4+(a(x-5)-4)^2=65$

$x^2+4x+4+a^2(x-5)^2-8a(x-5)+16-65=0$

$x^2+4x+a^2(x^2-10x+25)-8ax+40a-45=0$

$x^2(1+a^2)+x(4-10a^2-8a)+25a^2+40a-45=0$

$\frac{D}{4}=(2-5a^2-4a)^2-(a^2+1)(25a^2+40a-45)=$

$(5a^2+4a-2)^2-(a^2+1)(25a^2+40a-45)$ = см. продолж. на обороте

$$25a^4 + 40a^3 + 16a^2 - 20a^2 - 16a + 4 - 25a^4 - 40a^3 + 45a^2 -$$

$$- 25a^2 - 40a + 45 = 16a^2 - 40a + 45 - 16a + 4 =$$

$$= 16a^2 - 56a + 49 = 0$$ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$$16a^2 - 56a + 49 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 28^2 - 16 \cdot 49 = 0$$

$$(4a - 7)^2 = 0$$

при $a = \frac{7}{4}$ — 3 реш-я

при $a > \frac{7}{4}$ — 3 реш-я, при $a \in (0; \frac{7}{4})$ — 2 р-я

найдём $a$, при к-х $y = a(x-5) - 2$ кас. окр-ти с ц в т $P$

$$x^2 + 6x + (a(x-5)-2)^2 + 6(a(x-5)-2) - 47 = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x-5)^2 - 4a(x-5) + 4 + 6a(x-5) - 12 - 47 = 0$$

$$x^2 + 6x + a^2(x^2 - 10x + 25) - 4ax + 20a + 6ax - 30a - 55 = 0$$

$$x^2(1 + a^2) + 6x - 10a^2x + 25a^2 + 2ax - 10a - 55 = 0$$

$$x^2(a^2 + 1) + x(6 - 10a^2 + 2a) + 25a^2 - 10a - 55 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (3 + a - 5a^2)^2 - (a^2 + 1)(25a^2 - 10a - 55) =$$

$$= 9 + 6(a - 5a^2) + (a - 5a^2)^2 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 -$$

$$- 25a^2 + 10a + 55 = 25a^4 - 10a^3 + a^2 + 6a - 30a^2 +$$

$$+ 9 - 25a^4 + 10a^3 + 55a^2 - 25a^2 + 10a + 55 = a^2 + 16a + 64$$

$$a^2 + 16a + 64 = 0$$ (т.к. ур-е должно иметь ед-е реш-е)

$$(a + 8)^2 = 0$$

при $a = -8$ — 3 р-я

при $a < -8$ — 3 р-я, при $a \in (-8; 0)$ — 2 р-я

Ответ: 2 р-я при $a \in (-8; 0) \cup (0; \frac{7}{4}) \cup \{0\}$, т.е. при $a \in (-8; \frac{7}{4})$

***Комментарий.***

Ход решения ясен, изложен более чем подробно. Ошибок нет, кроме недочёта: концы промежутка не включены в ответ.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 18.6.1**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

**Ответ:** $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

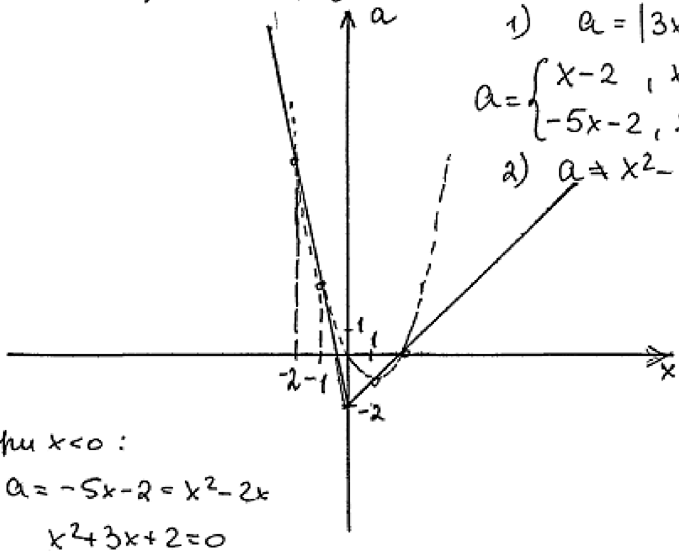
$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно 2 различных корня $a=?$

1) $a=|3x|-2x-2 \Rightarrow$

$$a=\begin{cases} x-2, & x\geq 0 \\ -5x-2, & x<0 \end{cases}$$

2) $a\neq x^2-2x$




при $x<0$:

$a=-5x-2=x^2-2x$

$x^2+3x+2=0$

$x_1=-1$

$x_2=-2$ , $x_1$ и $x_2$ точки пересечения двух графиков при $a(x_1)$ и $a(x_2)$ уравнение будет иметь только одно решение.

при $x\geq 0$

$x-2=x^2-2x \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_3=1$, $x_4=2$; При $a(x_3)$ и $a(x_4)$ будет только одно решение $\Leftrightarrow$; $\Leftrightarrow a(x_1)=3$, $a(x_2)=8$, $a(x_3)=-1$, $a(x_4)=0$, в точке $a=-2$ уравнение также будет иметь только одно решение, при $a<-2$ решений не будет $\Rightarrow a>-2$, $a\neq-1$, $a\neq0$, $a\neq3$, $a\neq8 \Rightarrow$

$\Rightarrow a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)\cup(3;8)\cup(8;+\infty)$.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 18.6.2**

Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$$

имеет ровно два различных корня.

**Ответ:** $-2<a<-1$; $-1<a<0$; $0<a<3$; $3<a<8$; $a>8$.

$\frac{|3x|-2x-2-a}{x^2-2x-a}=0$. Если знаменатель не равен нулю, то на него можно сократить.

$|3x|-2x-2-a=0$

Возведем уравнение в квадрат.

$(|3x|)^2=(2x+2+a)^2$

$5x^2+x(-8-4a)-4a-a^2-4=0$

$D=(-8-4a)^2-4\cdot5(-(a^2+4a+4))=a^2+4a+4.$

Чтобы уравнение имело 2 решения $D$ должен быть $>0$

$a^2+4a+4>0$

$(a-2)^2>0$

$-\infty \quad + \quad -2 \quad - \quad 2 \quad + \quad a \; +\infty$ $\Rightarrow a\in(-\infty;-2);(2;+\infty)$.

Теперь разберемся с ОДЗ.

$x^2-2x-a\neq0.$ $\Rightarrow$ Нам не подходят варианты, когда $x^2-2x-a=0$ (если $x^2-2x-a=0$ уравнение имеет менее одного корня)

$D=4+4a.$

$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4a}}{2}=1\pm\sqrt{1+a}$

Если $a\in(-\infty;-2)$, то $x^2-2x-a\neq0$

Если $a\in(2;+\infty)$, то $x^2-2x-a=0\Rightarrow$

$a\in(2;+\infty)$ не подходит.

Ответ: $a\in(-\infty;-2)$.

***Комментарий.***

Неверное решение уравнения, содержащего переменную под знаком модуля. Неверная логика исследования количества корней.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

# 7. Критерии проверки и оценка решений заданий 19

Задание 19 проверяет достижение следующих целей изучения математики на профильном уровне: «развитие логического мышления, алгоритмической культуры, пространственного воображения, математического мышления и интуиции, творческих способностей, необходимых для продолжения образования и для самостоятельной деятельности в области математики и её приложений в будущей профессиональной деятельности».

При этом, для решения этой задачи не требуется никаких знаний, выходящих за рамки школьного курса.

Возможны различные способы и записи развёрнутого решения. Главное требование — решение должно быть математически грамотным, из него должен быть понятен ход рассуждений автора работы. В остальном (метод, форма записи) решение может быть произвольным. Полнота и обоснованность рассуждений оцениваются независимо от выбранного метода решения. При этом оценивается продвижение выпускника в решении задачи, а не степень следования «эталонному» решению.

При решении задачи можно использовать без доказательств и ссылок математические факты, содержащиеся в учебниках, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в* | 4 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б* | 3 |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *в* | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

Условие задания 19 разбито на пункты – ряд подзадач (частных случаев), последовательно решая которые, можно в итоге полностью выполнить задание. Такое разбиение, в первую очередь, облегчает участнику экзамена планирование работы над данной задачей, а также позволяет более чётко и прозрачно провести оценивание выполнения задания.

**Задача 19 (демонстрационный вариант ЕГЭ 2026 г.)**

Из пары натуральных чисел $(a;b)$, где $a>b$, за один ход получают пару $(a+b;a-b)$.

а) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100;1)$ пару, большее число в которой равно 400?

б) Можно ли за несколько таких ходов получить из пары $(100;1)$ пару $(806;788)$?

в) Какое наименьшее $a$ может быть в паре $(a;b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806;788)$?

**Решение.** а) Из пары $(100;1)$ за один ход получается пара $(101;99)$, за два хода получается пара $(200;2)$, за три хода получается пара $(202;198)$, а за четыре хода получается пара $(400;4)$.

б) Заметим, что за один ход из пары $(a;b)$ получается пара $(a+b;a-b)$, а за два хода получается пара $(2a;2b)$. Следовательно, из пары $(100;1)$ можно получить только пары $\left(2^k\cdot 100;2^k\right)$ и $\left(2^k\cdot 101;2^k\cdot 99\right)$, где $k$ — неотрицательное целое число. Число 806 не равно $2^k\cdot 100$ и $2^k\cdot 101$, а значит, пару $(806;788)$ невозможно получить за несколько ходов из пары $(100;1)$.

в) Заметим, что пару $(c;d)$ за один ход можно получить только из пары $\left(\dfrac{c+d}{2};\dfrac{c-d}{2}\right)$ при условии, что числа $c$ и $d$ одной чётности.

Таким образом, пара $(806;788)$ получается из пары $(797;9)$, которая получается из пары $(403;394)$. Пару $(403;394)$ невозможно получить за один ход ни из какой пары, поскольку числа 403 и 394 имеют разную чётность. Следовательно, наименьшее число $a$ в паре $(a;b)$, из которой за несколько ходов можно получить пару $(806;788)$, равно 403.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 403.

**ИЛИ**

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых четырёх или пяти чисел из записанных является целым числом.

а) Могут ли среди записанных на доске чисел одновременно быть числа 403 и 2013?

б) Может ли одно из записанных на доске чисел быть квадратом натурального числа, если среди записанных на доске чисел есть число 403?

в) Известно, что среди записанных на доске чисел есть число 1 и квадрат натурального числа $n$, большего 1. Найдите наименьшее возможное значение $n$.

**Решение.**

а) Рассмотрим пять чисел: $a$, $b$, $c$, $d$ и $e$, записанных на доске. Средние арифметические $\dfrac{a+b+c+d}{4}$ и $\dfrac{b+c+d+e}{4}$ должны быть целыми числами. Следовательно, числа $a+b+c+d$ и $b+c+d+e$ должны делиться на 4, а значит, их разность $a-e$ также должна

делиться на 4. Таким образом, разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 4. Аналогично можно показать, что разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 5, а значит, разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 20.
Разность чисел 2013 и 403 равна 1610 и не делится на 20. Следовательно, числа 403 и 2013 одновременно не могут быть среди записанных чисел.
б) Остаток от деления числа 403 на 20 равен 3. Значит, остаток от деления любого записанного на доске числа на 20 равен 3, то есть любое число, записанное на доске, можно представить в виде $20k+3$, где $k$ — натуральное число или 0. Остаток от деления такого числа на 4 равен 3.
С другой стороны, остаток от деления любого квадрата натурального числа на 4 равен 0 или 1. Значит, среди чисел, записанных на доске, не может быть квадратов натуральных чисел.
в) Числа 1 и $n^2$ должны давать одинаковые остатки при делении на 20, то есть число $n^2-1$ должно делиться на 20. Поскольку $n^2-1=(n-1)(n+1)$, одно из чисел $n-1$ и $n+1$ должно делиться на 5. Таким образом, перебирая числа, для которых это выполнено, то есть числа 4, 6, 9, 11, 14, 16, …, получаем, что наименьшее значение $n$, для которого $n^2-1$ делится на 20, равно 9.
Примером чисел, удовлетворяющих условию задачи, для которых $n=9$, служит набор чисел:

1, 21, 41, 61, 81, 101, 121, 141, 161, 181, содержащий число 81.

**Ответ:** а) нет; б) нет; в) 9.

**Задание 19.1**

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?

в) Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом $n.$ Найдите наименьшее возможное значение $n.$

**Решение.**

а) Рассмотрим четыре числа: $a$, $b$, $c$ и $d$, записанные на доске. Средние арифметические $\frac{a+b+c}{3}$ и $\frac{b+c+d}{3}$ должны быть целыми числами. Следовательно, числа $a+b+c$ и $b+c+d$ должны делиться на 3, а значит, их разность $a-d$ также должна делиться на 3. Таким образом, разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 3. Аналогично можно показать, что разность любых двух чисел, записанных на доске, делится на 4, 5 и 6, то есть делится на 60.

Разность чисел 30 021 и 351 равна 29 670 и не делится на 4. Следовательно, числа 351 не может быть среди записанных чисел.

б) Остаток от деления числа 30 021 на 60 равен 21. Значит, остаток от деления любого записанного на доске числа на 60 равен 21, то есть любое число, записанное на доске, можно представить в виде $60k+21,$ где $k$ — натуральное число или 0.

Таким образом, если умножить некоторое число, записанное на доске, на 11, то получится число $11(60k+21)=660k+231=60(11k+3)+51$, остаток от деления которого на 60 равен 51. Таким образом, получившееся число не может быть записано на доске, а значит, отношение двух записанных на доске чисел не может равняться 11.

в) Предположим, что отношение двух записанных на доске чисел равно $n,$ где $n \geq 2.$ Тогда число $n(60k+21)=60nk+21n$ должно давать остаток 21 при делении на 60, то есть число $21n-21=21(n-1)$ должно делиться на 60, а значит, число $n-1$ должно делиться на 20. Наименьшее натуральное число, делящееся на 20, равно 20. Следовательно, наименьшее значение $n$ равно 21.

Примером чисел, удовлетворяющих условию задачи, для которых отношение двух из них равно 21, служит набор чисел:

$$21, 81, 141, 201, 261, 321, 381, 441, 501, 30\,021, \text{ в котором } 21=\frac{441}{21}.$$

**Ответ:** а) нет; б) нет; в) 21.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в* | 4 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б* | 3 |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *в* | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

**Задание 19.2**

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

**Решение.**

а) Если в порту всего два контейнера массой 20 тонн и шесть контейнеров массой 60 тонн, причём один контейнер массой 20 тонн и пять контейнеров массой 60 тонн заполнены сахарным песком, то количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров. Масса контейнеров с сахарным песком равна 320 тонн, а масса всех контейнеров равна 400 тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет 80 % от общей массы всех контейнеров.

б) Предположим, что в порту было $m$ контейнеров массой 20 тонн и $n$ контейнеров массой 60 тонн, среди которых с сахарным песком было $a$ контейнеров массой 20 тонн и $b$ контейнеров массой 60 тонн. Если масса контейнеров с сахарным песком составляет 40 % от общей массы контейнеров, то должна выполняться система уравнений:

$$\begin{cases} a+b=0,75(m+n), \\ 20a+60b=0,4(20m+60n); \end{cases} \begin{cases} 4a+4b=3m+3n, \\ 20a+60b=8m+24n; \end{cases} \begin{cases} 4a+4b=3m+3n, \\ -12a+28b=-16m. \end{cases}$$

Из равенства $-12a+28b=-16m$ получаем $m+3(m-a)+7b=0.$

Поскольку $b \geq 0$ и $m \geq a \geq 0,$ это равенство может выполняться только при $m=b=a=0.$ Из системы уравнений следует, что $n=0.$ Получили: $m=b=a=n=0,$ что невозможно. Следовательно, масса контейнеров с сахарным песком не может составить 40 % от общей массы контейнеров.

в) Масса контейнеров с сахарным песком будет составлять наибольшую долю от массы всех контейнеров в случае, когда масса каждого контейнера с сахарным песком равна 60 тонн, а масса каждого контейнера без сахарного песка равна 20 тонн. Если обозначить количество контейнеров с сахарным песком через $3c$, то их масса равна $180c$ тонн, количество контейнеров без сахарного песка равно $c$, а их масса равна $20c$ тонн. Таким образом, общая масса всех контейнеров равна $200c$ тонн, а значит, масса контейнеров с сахарным песком составляет 90 % от этой массы.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 90.

**Задание 19.3**

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

**Решение.**

а) Если в классе 25 учащихся, среди которых 5 девочек, то их доля составляет 20 %, что не превышает 21 %.

б) Если доля девочек в классе составила 30 %, то количество учащихся в нём делится на 10. Следовательно, после появления новой девочки в классе стало 20 учащихся, среди которых 6 девочек. Значит, до появления новой девочки в классе было 19 учащихся, среди которых было 5 девочек. В этом случае доля девочек превышает 21 %. Следовательно, доля девочек не может составить 30 %.

в) Пусть в классе было $b$ учащихся, среди которых $a$ девочек. Тогда, по условию, выполнены неравенства $10 < b \le 26$ и $\frac{a}{b} \le 0,21$. Следовательно,

$$\frac{a+1}{b+1} < \frac{a+1}{b} = \frac{a}{b} + \frac{1}{b} < \frac{a}{b} + 0,1 \le 0,31,$$

а значит, после появления новой девочки в классе доля девочек будет меньше 31 %. В пункте *б* было доказано, что эта доля не может составить 30 %.

После появления новой девочки в классе доля девочек в процентах составляет $\frac{100(a+1)}{b+1}$.

Предположим, что это число целое. Если оно не делится на 4 и не делится на 5, то число $b+1$ должно делиться на 50. Это невозможно, поскольку $b+1 \le 27$. Будем последовательно рассматривать числа, меньшие 30, делящиеся на 4 или на 5.

Если $\frac{100(a+1)}{b+1} = 28$, то $25(a+1) = 7(b+1)$. Учитывая, что $b+1 \le 27$, получаем: $b = 24$, $a = 6$. В этом случае $\frac{a}{b} = 0,25 > 0,21$.

Если $\frac{100(a+1)}{b+1} = 25$, то $4(a+1) = b+1$. Для чисел $a = 2$ и $b = 11$ это равенство верно, $10 < b \le 26$ и $\frac{a}{b} = \frac{2}{11} < 0,2 \le 0,21$.

Таким образом, после появления новой девочки в классе наибольшая целая доля девочек в процентах составляет 25.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 25.

## Задание 19.4

В последовательности $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1=1$, $a_n=235$.
Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

**Решение.**

а) Например, последовательность 1, 2, 3, 0, 5, $-2$, 7, $-4$, …, 233, $-230$, 235 удовлетворяет условию задачи (чередуются суммы чисел 3 и 5).

б) Поскольку 3, 5 и 25 – нечётные числа, любые два соседних члена последовательности имеют разную чётность. На нечётных местах должны стоять нечётные числа, а на чётных – чётные. Число 235 нечётное, поэтому оно не может стоять на чётном месте. Значит, последовательность не может состоять из 1000 членов.

в) Рассмотрим три члена последовательности: $a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2}$ $\left(1\le k\le n-2\right)$.

Поскольку $a_k+a_{k+1}\ge 3$, $a_{k+1}+a_{k+2}\le 25$, получаем: $a_{k+2}\le a_k+22$.

В предыдущем пункте было показано, что последовательность должна состоять из нечётного числа членов. Пусть $n=2m+1$, тогда

$$a_n=a_{2m+1}\le a_{2m-1}+22\le a_{2m-3}+22\cdot 2\le \ldots \le a_1+22\cdot m;\ 235\le 1+22m,$$

откуда $m\ge 11$. Значит, последовательность состоит не менее чем из 23 чисел.
Приведём пример последовательности, удовлетворяющей условию задачи, состоящей из 23 членов: 1, 2, 23, $-20$, 45, $-42$, 67, $-64$, 89, $-86$, 111, $-108$, 133, $-130$, 155, $-150$, 175, $-170$, 195, $-190$, 215, $-210$, 235.

**Ответ:** а) например, 1, 2, 3, 0, 5, $-2$, 7, $-4$, …, 233, $-230$, 235; б) нет; в) 23.

| Критерии оценивания выполнения задания | Баллы |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в* | 4 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б* | 3 |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *в* | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

**Задание 19.5**

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?
б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?
в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

**Решение.**
а) Если на доске записано 29 зелёных чисел: 3, 6, …, 87 – и одно красное число 21, то их сумма меньше 1395.
б) Пусть на доске ровно одно красное число. Тогда зелёных чисел 29, а их сумма не меньше, чем сумма 29 наименьших чисел, делящихся на 3:

$$3 + 6 + \ldots + 87 = \frac{90 \cdot 29}{2} = 1305.$$

Это противоречит тому, что сумма написанных чисел равна 1067.
в) Пусть на доске написано $n$ красных чисел и $30 - n$ зелёных чисел. Тогда сумма красных чисел не меньше

$$7 + 14 + \ldots + 7n = \frac{7n^2 + 7n}{2},$$

а сумма зелёных чисел не меньше

$$3 + 6 + \ldots + 3(30 - n) = \frac{3(31 - n)(30 - n)}{2} = \frac{3n^2 - 183n + 2790}{2}.$$

Таким образом, $1067 \geq 5n^2 - 88n + 1395$; $5n^2 - 88n + 328 \leq 0$,
откуда, учитывая, что $n$ – целое, получаем $n \geq 6$.
Приведём пример 6 красных чисел и 24 зелёных чисел, сумма которых равна 1067: 7, 14, 21, 28, 35, 56, 3, 6, …, 66, 69, 78.

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 6.

**Задание 19.6**

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

**Решение.**

а) Если на тридцати красных карточках написано число 2, а на синих карточках написаны числа 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 437, то условия задачи выполнены.

б) Пусть сумма чисел, написанных на красных карточках, равна $k$, а сумма чисел, написанных на синих карточках, равна $s$. Тогда

$$k+s=560;\ k+3s=1560,$$

откуда $k=60$, $s=500$.

Предположим, что красных карточек 10 штук. Если все числа на красных карточках не превосходят 5, то их сумма $k$ не превосходит $5\cdot 10=50$. Но $k=60$, значит, есть хотя бы одна карточка, на которой написано число, не меньшее 6. Так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, то все числа на синих карточках не меньше 7, а их сумма не меньше $7+8+\ldots+36=645$. Но $s=500$, значит, не может быть ровно 10 красных карточек.

в) Предположим, что синих карточек $n$ штук, а наибольшее число, написанное на красной карточке, равно $u$. Тогда $(40-n)u\geq 60$. С другой стороны, так как любое число на синей карточке больше любого числа на красной карточке, все числа на синих карточках не меньше $u+1$, а их сумма не меньше

$$(u+1)+(u+2)+\ldots+(u+n)=nu+\frac{n(n+1)}{2}.$$

Но $s=500$, значит,

$$nu+\frac{n(n+1)}{2}\leq 500;\ u\leq\frac{500}{n}-\frac{n+1}{2}.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{60}{40-n}\leq u\leq\frac{500}{n}-\frac{n+1}{2}.$$

Заметим, что это неравенство не выполняется при $n\geq 27$, поскольку при $n\geq 27$

$$\frac{60}{40-n}\geq\frac{60}{13}>4\ \text{ и }\ \frac{500}{n}-\frac{n+1}{2}\leq\frac{122}{27}<5.$$

Но неравенство $4<u<5$ не имеет целых решений, значит, синих карточек не может быть больше 26.

Покажем, что может быть 26 синих карточек. Если на десяти красных карточках написано число 4, на четырёх красных карточках написано число 5, а на синих карточках написаны числа 6, 7, …, 29, 30, 50, то условия задачи выполнены.
**Ответ:** а) да; б) нет; в) 26.

| **Критерии оценивания выполнения задания** | **Баллы** |
|---|---|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в* | 4 |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б* | 3 |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте *в* | 2 |
| Обоснованно получен верный ответ в пунктах *а* или *б* | 1 |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше | 0 |
| *Максимальный балл* | *4* |

## Примеры оценивания решений задания 19

**Пример 19.1.1**

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.
а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?
б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?
в) Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом $n$. Найдите наименьшее возможное значение $n$.

**Ответ:** а) нет; б) нет; в) 21.

№19

3а) докажем что все числа имеют одинаковые остатки от деления на 3; 4; 5; 6. заменим числа на их остатки от деления на 3: $x_1$ - ост. от. дел. на 3 1-го числа; $x_2$ - второго. ⇒

$x_1+x_2+x_3 \vdots 3$, т.е. $=0; 3; 6$

$x_2+x_3+x_4 \vdots 3$, т.е $=0; 3; 6$

$1^\circ$ $x_1+x_2+x_3=x_2+x_3+x_4 \Rightarrow x_1=x_4$ ✓

$2^\circ$ $x_1+x_2+x_3=x_2+x_3+x_4+3 \Rightarrow x_1=x_4+3$ $x_1\in[0;2]$; $x_4+3\geq 3 \Rightarrow \varnothing$

а) $3^\circ$ $x_1+x_2+x_3=x_2+x_3+x_4+6 \Rightarrow x_1=x_4+6$; $x_1\in[0;2]$, а $x_4+6\geq 6$ $\varnothing$

$4^\circ$ $x_1+x_2+x_3=x_2+x_3+x_4-3 \Rightarrow x_1+3=x_4$; $x_4\in[0;2]$, а $x_1+3\geq 3$ $\varnothing$

$5^\circ$ $x_1+x_2+x_3=x_2+x_3+x_4-6 \Rightarrow x_1+6=x_4$; $x_4\in[0;2]$, а $x_1+6\geq 6$ $\varnothing$

из этого следует, что $x_1=x_4$, аналогично для всех чисел, и остатков от деления на 4; 5; 6.

где $a_1; a_2; a_3; a_4; b_1; b_2; b_3; b_4 \in N$

числа можно представить, как $3a_1+b_1$, $4a_2+b_2$, $5a_3+b_3$; $6a_4+b_4$ ⇒

⇒ числа с одинак остатками от 3; 4; 5; 6 повт с периодом НОК(3; 4; 5; 6) $=$ $=60$ ⇒ числа имеют вид $60a+b$  30021 - записано ⇒ $b=$ остаток от деления 30021 на $60=21$ ⇒ числа имеют вид $60a+21$

30021 имеет. ост. от дел. на 4 $=3$
351 имеет. ост. от дел. на 4 $=1$
⇒ 351 не подх.

б) первое число $=60a_1+21$; второе $=60a_2+21$  $\frac{60a_2+21}{60a_1+21}=11$.

$11(60a_1+21)=60a_2+21$   $210=60(a_2-11a_1) \Rightarrow a_2-11a_1=\frac{7}{2}$

$a_2-11a_1$ - целое
$\frac{7}{2}$ - не целое
⇒ противоречие

⇒ противоречие ⇒ не может, нет

в) $\frac{60a_2+21}{60a_1+21}=n$   $60a_2+21=60\cdot n\cdot a_1+21\cdot n$

$(n-1)21=60a_2-n\cdot 60a_1$

$\frac{(n-1)21}{60}=\underbrace{a_2-(n)a_1}_{\text{целое}} \Rightarrow \frac{(n-1)21}{60}$ ⇒ должно быть целым ⇒ $\frac{(n-1)\cdot 7}{20}$ - целое ⇒

⇒ $n-1=20 \Rightarrow \underline{n=21}$

Ответ: а) нет; б) нет; в) 21

***Комментарий.***

Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*. Не доказана реализуемость найденного отношения в пункте *в*.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 19.1.2**

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?

в) Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом $n$. Найдите наименьшее возможное значение $n$.

**Ответ:** а) нет; б) нет; в) 21.

19) а) ~~Пусть~~ нет, не может. $\frac{30021+351+x+y}{4} \in \mathbb{Z}$ $\Downarrow$

Пусть число 351 есть на доске. Тогда $30021+351+x+y \vdots 4$, для любых двух других $x, y$ с доски. $30021+351=30372 \vdots 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow x+y \vdots 4$. Посмотрим на возможные остатки по модулю 4 у $x$ и $y$: $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,3)$. Пусть $(x, y)$ имеют остатки $(1,3)$. Тогда рассмотрим тройку $30021, 351, x$. Какое бы число мы не взяли четвертым, их сумма $\vdots 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ у этого четвертого числа остаток $4-1=3 \mod 4 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ у 7 чисел из 10 будет остаток 3. Тогда возьмем $x$ и три таких числа их сумма $\overset{4}{\equiv} 1+3+3+3 \overset{4}{\equiv} 2 \Rightarrow$ сумма $\not\vdots\, 4 \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Все числа кроме 30021 и 351 будут четными. Но тогда аналогично 351 и три ~~других~~ четных числа ~~будут в сумме $\equiv 3+$~~ будут в сумме нечетны $\Rightarrow$ не будут $\vdots 4 \Rightarrow$ противоречие.

б) ~~идея~~ нет, не может.

Пусть на доске есть числа $a$ и $11a$. $\frac{11a}{a}=11$. Тогда рассмотрим четверку $30021, a, 11a, x$, где $x$ — любое из оставшихся чисел. $30021 \overset{4}{\equiv} 1$, $a+11a=12a \vdots 4$, $\Rightarrow x \overset{4}{\equiv} 4-0-1 \overset{4}{\equiv} 3 \Rightarrow$ 7 чисел на доске $\overset{4}{\equiv} 3$. Тогда возьмем ~~три таких~~ два таких числа вместе с $a$ и $11a$. Их сумма будет $\overset{4}{\equiv} 0+3+3 \overset{4}{\equiv} 2 \neq 0 \Rightarrow$ сумма $\not\vdots\, 4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ противоречие

***Комментарий.***

Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 19.1.3**

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?

в) Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом $n$. Найдите наименьшее возможное значение $n$.

**Ответ:** а) нет; б) нет; в) 21.

19

а) для того, чтобы среднее арифметическое 3, 4, 5 и 6 чисел было целым числом, необходимо, чтобы их сумма делилась на 3, 4, 5 и 6 соответственно.

Рассмотрим остатки делимости на 6 (с 3, 4 и 5 ситуация аналогична): всего их 6 штук (0; 1; 2; 3; 4; 5)

Рассмотрим 2 случая:

I Все остатки одинаковы, тогда любое $n_i$ можно представить как $n_i = 6k_i + n$, где $n < 6$

Среднее арифметическое (а), получается

$$a = \frac{6k_1 + 6k_2 + 6k_3 + 6k_4 + 6k_5 + 6k_6 + 6n}{6} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 + k_6 + n$$ (результатом всегда будет целое число)

II Остатки разные:

~~Тогда среди 10 чисел мог~~ Если среди 10 чисел нету чисел ~~пару~~ подходящих под условие, то очевидно, что такой вариант не подходит. Если же такой набор есть, то в нём можно заменить одно число на число с другим остатком и получить неподходящий набор, что не удовлетворяет условию

задачи. ~~Следов~~
Следовательно все числа должны быть равны по модулям 3, 4, 5 и 6
По условию на доске уже есть число 30 021, следовательно любое $n$ должно иметь такие же остатки, т.е
$n_i \equiv 0 \pmod 3$
$n_i \equiv 1 \pmod 4$
$n_i \equiv 1 \pmod 5$
$n_i \equiv 3 \pmod 6$
Проверим, подходит ли 351 ~~под~~ по остаткам:
$351 \equiv 0 \pmod 3$
$351 \equiv 3 \pmod 4$
Нет, не подходит => оно не может быть частью последовательности
б) ~~При у т.к. Из~~ Пользуясь доказанным в пункте а утверждение про остатки посмотрим, что ~~проверим~~ может ли числа $x$ и $11x$ иметь одинаковые остатки
если $x \equiv 0 \pmod 3$, то $11x \equiv 0 \pmod 3$
если $x \equiv 1 \pmod 4$, то $11x \equiv 3 \pmod 4$
Получается, что не может, т.к остатки будут различны, что не подходит по условиям задачи (см. пункт а)
в) Для это необходимо найти наименьшее число, чтобы оно ~~удовлетв~~ ~~б~~ имело такие же остатки как как 351 (переберем по мод6)
9 не подходит т.к $9 \equiv 4 \pmod 5$, 16 не подходит т.к $16 \equiv 0 \pmod 4$,
21 - подходит
Ответ: а) нет б) нет в) 21

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. Решение пункта *б* необосновано. Ответ в пункте *в* не обоснован.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 19.1.4**

На доске записано 10 натуральных чисел, среди которых нет одинаковых. Оказалось, что среднее арифметическое любых трёх, четырёх, пяти, шести чисел из записанных является целым числом. Одно из записанных чисел равно 30 021.

а) Может ли среди записанных на доске чисел быть число 351?

б) Может ли отношение двух записанных на доске чисел равняться 11?

в) Отношение двух записанных на доске чисел является целым числом $n$. Найдите наименьшее возможное значение $n$.

**Ответ:** а) нет; б) нет; в) 21.

№ 19

10 натуральных чисел: $a_1; a_2; a_3, \dots, a_n$

Так как нам надо чтобы все ~~числа делились на 3,~~ суммы троек делились на 3, и т. к. $30021 \vdots 3$ надо чтобы все числа делились на 3, потому что иначе найдутся какие-либо 3 числа, сумма которых $\not\vdots\, 3$

Рассмотрим остатки при делении суммы 4 чисел на 4

$351 \equiv 3 \pmod 4$

$30021 \equiv 1 \pmod 4$

любое число можно представить в виде $l + 4 \cdot k$; $k \in \mathbb{Z}$; $l \in [0; 3]$

рассмотрим возможные значения остатков от деления на 4 у 4 последовательности:

| число | $a_1 = 351$ | $a_2 = 30021$ | $a_3$ | $a_4$ |
|---|---|---|---|---|
| ост | 3 | 1 | $\{0; 1; 2; 3\}$ | $\{0; 1; 2; 3\}$ |

так как любые 4 числа должны делиться на 4, но сумма остатков любых чисел должна делиться на 4; 3+1 (остаток от деления на 4 $a_1, a_2$) $\Rightarrow$ возможны только пары остатков от $a_3; a_4$: $(0; 0) \vee (2; 2) \vee (1; 3)$, но тогда при всех данных значениях остатков остальные числа будут иметь остатки не делящиеся на 4. Противоречие

Ответ: а) Нет, противоречие.

***Комментарий.***

Необоснованно получен ответ в пункте *а*.

**Оценка эксперта: 0 баллов.**

**Пример 19.2.1**

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.
а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?
б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?
в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 90.

№19. а) Да, например:

С песком — $\boxed{60}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}$ — 160 т.

Без песка — $\boxed{20}\boxed{20}$ — 40 т.

$\frac{160}{160+40}=\frac{160}{200}=\frac{4}{5}=0,8$ $\frac{6}{6+2}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}=0,75$

Ответ: а) да.

б) Т.к. количество контейнеров с песком составляет 75% или $\frac{3}{4}$ от общего кол-ва контейнеров, то общее кол-во контейнеров кратно 4 и отношение кол-ва с песком к кол-ву без песка равно 3:1.

Попробуем взять конт. с песком минимальной массы, а конт. без песка с максимальной массой, чтобы получить минимальный процент.

Если кол-во конт. 4: с песком: $\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}$ — 60 т; без песка: $\boxed{60}$ — 60 т. $\frac{60}{60+60}=0,5>0,4$

Если кол-в конт. 8: с песком: $\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}\boxed{20}$ — 120 т; без песка: $\boxed{60}\boxed{60}$ — 120 т. $\frac{120}{120+120}=0,5>0,4$

При дальнейшем увел. конт. процент не изменится
$\Rightarrow$ процент $\geq 50$

Ответ: б) нет

в) Попробуем взять конт. с песком макс. масс, а конт. без песка с мин. массой, чтобы процент был максимален.

Если кол-во конт. 4: с песком: $\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}$ — 180 т; без песка: $\boxed{20}$ — 20 т. $\frac{180}{180+20}=\frac{180}{200}=0,9$

Если кол-в конт. 8: с песком: $\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}\boxed{60}$ — 360 т; без песка: $\boxed{20}\boxed{20}$ — 40 т. $\frac{360}{360+40}=0,9$

При дальнейшем увел. кол-ва конт. процент не увеличится:
$\Rightarrow$ процент $\leq 90$

Ответ: в) 90

***Комментарий.***

Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 19.2.2**

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.
а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?
б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?
в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 90.

№13
б). Пусть всего – $x$ ~~ящиков~~ контейнеров $\Rightarrow$ ~~ящиков~~ контейнеров с сахаром $0,75x$;
без сахара $\to 0,25x$.
максимальная масса ~~ящ~~ контейнеров без сахара $= 0,25x \cdot 60 = 15x$.
минимальная масса контейнеров с сахаром $= 0,75x \cdot 20 = 15x$
$\Downarrow$
$z = \frac{15x}{15x+15x} = \frac{1}{2} = 50\% \to$ это минимально возможное
$50\% > 40\% \to$ значит нельзя.
Ответ: б) нельзя; нет.
в) Пусть контейнеров также $x$; с сахаром – $0,75x$; без – $0,25x$
$\Downarrow$
максимальная масса контейнеров с сахаром $= 0,75x \cdot 60 = 45x$
минимальная масса контейнеров без сахара $= 0,25x \cdot 20 = 5x$
$\Downarrow$
$z = \frac{45x}{45x+5x} = \frac{90}{100} = 0,9 = 90\% \to$ максимальное значение
$z = 90\%$.

а) максимально $z = 90\%$; минимально $z = 50\%$;
$z = 80\%$ меньше $90\%$ и больше $50\%$
$\Downarrow$
можно.
Ответ: а) да; б) нет; в) $90\%$.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*, пункт *а* не выполнен, так как попадание в нужный интервал не гарантирует, что это реализуется.

**Оценка эксперта: 3 балла.**

**Пример 19.2.3**

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.
а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?
б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?
в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 90.

19

пусть есть $a$ конт по 20т; $b$ по 60;
$c$ из $a$ зап песком; $d$ из $b$ зап песком. ясно, что $a \geq c$; $b \geq d$

тогда по усл $(c+d) = 0.75(a+b) \Rightarrow 4c+4d = 3a+3b$

а) $(c \cdot 20 + d \cdot 60) = 0.8(a \cdot 20 + b \cdot 60)$

$20c + 60d = 16a + 48b \mid :4$

$\begin{cases} 5c + 15d = 4a + 12b \\ 4c + 4d = 3a + 3b \end{cases}$

Пример: $a = 14$; $c = 10$; $b = 2$; $d = 2$. тогда

$5 \cdot 10 + 15 \cdot 2 = 4 \cdot 14 + 12 \cdot 2$

$4 \cdot 10 + 4 \cdot 2 = 3 \cdot 14 + 3 \cdot 2$ ✓ Ответ: да, можно

б) $(20c + 60d) = 0.4(20a + 60b)$

$20c + 60d = 8a + 24b \mid :4$

$\begin{cases} 5c + 15d = 2a + 6b \quad (2) \\ 4c + 4d = 3a + 3b \mid \cdot 2 \quad (1) \end{cases}$

умножу (1) на 2 и вычту (2):

$3c - 7d = 4a \rightarrow 3c = 4a + 7d$

з-у, что по усл $a \geq c \Rightarrow 4a + 7d \geq 4c + 7d$ это не может равняться 3c противоречие $\Rightarrow$ ответ: нет

***Комментарий.***

В заданиях пунктов *а* и *б* обоснованно получены верные ответы, задание пункта *в* не решено. Решение пункта *в* отсутствует.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 19.2.4**

В порту имеются только заполненные контейнеры, масса каждого из которых равна 20 тонн или 60 тонн. В некоторых из этих контейнеров находится сахарный песок. Количество контейнеров с сахарным песком составляет 75 % от общего количества контейнеров.

а) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 80 % от общей массы всех контейнеров?

б) Может ли масса контейнеров с сахарным песком составить 40 % от общей массы всех контейнеров?

в) Какую наибольшую долю (в процентах) может составить масса контейнеров с сахарным песком от общей массы всех контейнеров?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 90.

№19

а) Отв.: может

Пример: с сахаром 1 конт. с 20 тонн и 5 с 60 тонн

всего: 2 конт. с 20 тонн и 6 с 60 тонн

$\frac{(1+5)}{2+6} = \frac{3}{4}$ – истина

$\frac{20+5\cdot 60}{2\cdot 20+6\cdot 60} = \frac{320}{400} = 0,8$ – истина.

б) Пусть $x$ – число контейнеров с 20 тонн – сахар

$y$ – число контейнеров с 60 тонн сахар

$a$ – число контейнеров с 20 тонн

$b$ – число контейнеров с 60 тонн

$x+y = \frac{3}{4}(a+b)$ (по усл.) $a+b=S$ $0 \le b \le S$

$\frac{20x+60y}{20a+60b} = \frac{x+3y}{a+3b} = \frac{\frac{3}{4}S+2y}{S+2b} = \frac{3S+8y}{4S+8b} = \frac{3}{4} + \frac{4y-b}{2S+4b}$

найдем наим. знач. $\frac{4y-b}{2S+4b}$, макс. знач. при $y=0$, $b=S$ $\frac{-S}{6S} = -\frac{1}{6}$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} > \frac{b}{S}$ ⇒ такого не может быть

Ответ: не может.

***Комментарий.***

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*. В решении пункта *б* использована необоснованная оценка.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 19.3.1**

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 25.

№19.

Пусть мальчиков – $x$; девочек – $y$: $x, y \in N; 10 < x+y \le 26$.

а) Да, например $x=21$; $y=5$. Всего 26: $10<26\le 26$.

При этом: $\frac{5}{26} \vee \frac{21}{100} \Leftrightarrow \frac{500}{2600} \vee \frac{546}{2600} \Leftrightarrow 500<546 \Rightarrow \frac{5}{26} < \frac{21}{100}$

б) По условию: $\frac{y}{x+y} \le 0{,}21 \to y \le 0{,}21x+0{,}21y \to 0{,}21x \ge 0{,}79y$

$x \ge \frac{0{,}79y}{0{,}21}$

Если в класс придет новая девочка, то их будет $(y+1)$.

По усл.: $\frac{y+1}{x+y+1} = 0{,}3 \Leftrightarrow y+1 = 0{,}3x+0{,}3y+0{,}3$

$0{,}7y - 0{,}3x + 0{,}7 = 0 \quad |\cdot 10$

$7y - 3x + 7 = 0$

$3x = 7y+7$

$x = \frac{7y+7}{3}$

Подставим $x$ в $x \ge \frac{0{,}79y}{0{,}21}$:

$\frac{7y+7}{3} \ge \frac{79y}{21} \quad |\cdot 21 \Rightarrow 7(7y+7) \ge 79y$

$49y+49 \ge 79y$

$30y \le 49 \qquad y \le \frac{49}{30}$

Т.к. $y \in Z$, то единственное возможное $y=1$.

Тогда $x = \frac{7\cdot 1+7}{3} = \frac{14}{3} \notin N$.

Нет, такое невозможно.

***Комментарий.***

В заданиях пунктов *а* и *б* обоснованно получены верные ответы, задание пункта *в* не решено.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 19.3.2**

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 25.

№19.

а) Да, например 5 девочек и 26 всего.

Доля девочек: $\frac{5}{26}\cdot 100\% = 19\frac{6}{26}\%$

$$\begin{array}{r|l} 500 & 26 \\ \underline{26} & 19 \\ 240 & \\ \underline{234} & \\ 6 & \end{array}$$

б) Пусть девочек $x$, $n$ — всего.

Тогда $\frac{x}{n} \le 0,21$, $\frac{x+1}{n+1} = \frac{3}{10}$

~~$\frac{0,3n-0,7}{n} \le 0,21$~~

~~$0,3 - \frac{0,7}{n} \le 0,21$~~

~~$\frac{0,7}{n} \ge 0,09$~~ ~~$n \le \frac{700}{9}$~~

Т.к. $x$ и $n$ — целые, Тогда $x+1$ может быть:

| $x+1$ | 3 | 6 | 9 | ... |
|---|---|---|---|---|
| $n+1$ | 10 | 20 | 30 | ... |

Но т.к. $11 \le n \le 26$, то $12 \le n+1 \le 27$

Единств. возможный вариант — $x = 5$, $n = 19$.

Но тогда изначально доля девочек была $\frac{5}{19}\cdot 100\% = 26\frac{6}{19}\%$, что противоречит условию. Невозможно.

в) Пусть $x$ — девочек, $y$ — мальчиков. Новая доля девочек: $\frac{x+1}{x+y+1}$

Видно, что чем меньше $y$, тем больше доля.

***Комментарий.***

В заданиях пунктов *а* и *б* обоснованно получены верные ответы, задание пункта *в* не решено.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 19.3.3**

В классе больше 10, но не больше 26 учащихся, а доля девочек не превышает 21 %.

а) Может ли в этом классе быть 5 девочек?

б) Может ли доля девочек составить 30 %, если в этот класс придёт новая девочка?

в) В этот класс пришла новая девочка. Доля девочек в классе составила целое число процентов. Какое наибольшее число процентов может составить доля девочек в классе?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 25.

№ 19

10 < учеников ≤ 26 девочек ≤ 21 %

а) если девочек 5 шт, то предположим, что это 20% от общего количества учеников; составим пропорцию

~~человек~~ процент, %

5 – 20 %

x – 100 %, $x = \frac{5 \cdot 100}{20} = 25$ учеников

условия выполняются, значит, такое может быть

Ответ: да, может

б) предположим, что девочек было 5 шт, а когда пришла новая, их стало 6, которые составляют 30% от общего кол-ва учеников; составим пропорцию

~~человек~~, шт от общего кол-ва

6 – 30 %

x – 100 %

$x = \frac{6 \cdot 100}{30} = 20$ учеников

в таком случае условия выполняются, значит, такое может быть

Ответ: да, может

в) если в класс пришла новая девочка, то общее количество учеников теперь не должно превышать 27 штук.

составим пропорцию

X девочек – max. ~~процент~~ %

Y человек – 100 %

~~X девочек = Y~~

X девочек·100 должно нацело делиться на y по условию ← $max \cdot \% = \frac{X_{девочек} \cdot 100}{y}$

предположим, что девочек в классе 9, а всего 12 человек, тогда:

$\% = \frac{9 \cdot 100}{12} = 75\%$

если девочек 12, а всего 15 учеников, тогда

$\% = \frac{12 \cdot 100}{15} = 80\%$

если девочек 16, а всего учеников 20, то

$\% = \frac{16 \cdot 100}{20} = 80\%$

если девочек 9, а всего человек 15, то

$\% = \frac{9 \cdot 100}{15} = 60\%$

При дальнейшем подборе девочек уменьшается, значит

максимальный процент является 80%

Ответ: а) да

б) да

в) 80 %

***Комментарий.***

Задание пункта *а* выполнено верно, в заданиях пунктов *б* и *в* получены неверные ответы.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 19.4.1**

В последовательности $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1,\ a_n = 235$. Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.

а) Приведите пример такой последовательности.

б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?

в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

**Ответ:** а) например, 1, 2, 3, 0, 5, $-2$, 7, $-4$, …, 233, $-230$, 235; б) нет; в) 23.

б) Нет т.к. в этой посл. $a_i + a_{i+1} = \left[\begin{matrix}5\\3\\25\end{matrix}\right.$ =>

=> т.к. $a_1$ - неч., то все четные члены - чет,

а нечетные - неч => $a_n$ = 235 - неч член т.е.

n не 1000 => ~~невозможна~~ не может.

~~в) (1; 2; -1; 6; ...~~

а) 1; -26; 51; -46; 71; -66; 91; -86; 111; -106; 131;

-126; 151; -146; 171; -166; 191; -188; 213; -210; 235

***Комментарий.***

В пункте *а* допущена ошибка: сумма первых двух чисел равна –25. При ответе на вопрос пункта *б* участник экзамена верно показал, что случай $n = 1000$ невозможен. Решение пункта *в* отсутствует.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 19.4.2**

В последовательности $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$, состоящей из целых чисел, $a_1 = 1,\ a_n = 235$.
Сумма любых двух соседних членов последовательности равна 3, 5 или 25.
а) Приведите пример такой последовательности.
б) Может ли такая последовательность состоять из 1000 членов?
в) Из какого наименьшего числа членов может состоять такая последовательность?

**Ответ:** а) например, 1, 2, 3, 0, 5, $-2$, 7, $-4$, …, 233, $-230$, 235; б) нет; в) 23.

А) Пример такой последовательности:

1, 2, 3, 0, 5, −2, 7, −4, 9, −6, 11, −8, 13, −10, 15, −12, 17, −14, 19, −16, 21, −18, 23, −20, 25, −22, 27, −24, 29, −26, 31, −28, 33, −30, 35, −32, 37, −34, 59, −56, 81, −78, 103, −100, 125, −122, 147, −144, 169, −166, 191, −188, 213, −210, 235.

Б) Да, например, последовательность, членами которой являются чередующиеся числа 0 и 3.

0, 3, 0, 3, 0, 3…

Сумма любых двух соседних членов в последовательности равна 3, что соответствует условию.

В последовательности, состоящей из 1000 членов, будет пятьсот 0 и пятьсот 3. Все нечётные члены последовательности будут нулями, все чётные — тройками.

***Комментарий.***

В пункте *а* верно приведён пример. Решение пункта *б* неверно. Решение пункта *в* отсутствует.

**Оценка эксперта: 1 балл.**

**Пример 19.5.1**

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 6.

а) Да, пример:

$\underbrace{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \ldots 87}_{\text{зелены}}$ ; $\underset{\text{красное}}{21}$

Сумма чисел $= {}^{1326} < 1395$, ~~т.к. ма зачитается~~ ~~на~~.

б) Найдем минимально возможную сумму с одним красным числом.

Т.к. сумма → min ⇒ красное число = 7,

зеленые — 3, 6, 9, 12, 15, 18, ..., 87.

$\sum$ чисел = 1305 + 7 = 1312 > 1067 ⇒ Не может

Ответ: нет.

в) Пусть $f(n)$ – функция, значение которой равно минимально возможной сумме при данном $n$, где $n$ – кол-во красных чисел.

$$f(n) = 7\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right) + 3\cdot\left(\frac{(30-n)(31-n)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(7n^2 + 7n + 3n^2 - \underset{183n}{3\cdot 61n} + \underset{2790}{3\cdot 30\cdot 31}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(10n^2 - 176n + 2790\right) = 5n^2 - 88n + 1395.$$

найдем минимальное $n$ ($n \in \mathbb{Z}^+$), такое что $f(n) \leq 1067$.

$$5n^2 - 88n + 1395 \leq 1067$$
$$5n^2 - 88n + 328 \leq 0$$
$$\frac{D}{4} = 44^2 - 328 \cdot 5 = 1936 - 1640 = 296.$$
$$n \in \left[\frac{44-\sqrt{296}}{5}; \frac{44+\sqrt{296}}{5}\right] \Rightarrow n = 6.$$

$$f(6) = 7 \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} + 3 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 3(49 + 12 \cdot 25) = 3 \cdot 349 = 1047.$$

$f(5) = 1380 > 1067 \Rightarrow$ для 5 - неверно.

Ответ: 6 - наименьшее кол-во красных.

пример:

7; 14; 21; 28; 35; 56.

3; 6; 9; 12; .... 69; 78;

***Комментарий.***

Обоснованно получены верные ответы во всех пунктах.

**Оценка эксперта: 4 балла.**

**Пример 19.5.2**

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 6.

а) 1395 = 3+6+...+90 – 30 чисел. Предположим изначально все они зелёные.
Да, может, т.к. мы можем заменить число 90 на число 21, при написанное другим цветом (красным), и все тогда общая сумма уменьшится на 69 – ч.т.д.

б) Возьмём наименьшую сумму чисел написанных только зелёными.
Это 1395=3+6...+90 Нам разрешено добавить одно красное число. Для того, чтобы минимизировать сумму мы убираем самое большое зелёное – 90 и добавляем минимально возможное красное – 7 Итоговая сумма 1395−90+7=1312 > 1067 => это невозможно.

в) Числа кратные 3ём дают остатки при делении на 7 в таком порядке: 3 6 2 5 1 4 0
Число 1067 даёт остаток 3 при делении на 7 =>
Зел. зелёные числа должны наименьшие быть следующие к ней
Они не могут попасть и на 87 т.к. 3...+87 = 1312 > 1067 =>
=они должны попасть на 63.
3+...+63 = 63·11 = 759 26, 1067−759 = 308 308 | 7 = 44

*Комментарий.*

Приведено верное решение пункта *а*. Приведено верное решение пункта *б*. Решение в пункте *в* не завершено.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 19.5.3**

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395 = 3 + 6 + \ldots + 90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 6.

аз индекс обозначает цвет, которым написано число

а) Может, так как одно и то же число может быть записано разными цветами.

пример: $3_з, 6_з, \ldots, 87_з, 21_к$

б) Нет.

Если только одно число красное, то в ~~последовательности~~ наборе с наименьшей суммой ($3_з, 6_з, \ldots, 87_з, 7_к$) сумма равна 1312, что больше, чем 1067

в) 6.

В ~~последовательности~~ наборе с пятью красными числами и наименьшей суммой ($3_з, 6_з, \ldots, 78_з, 7_к, 14_к, \ldots, 35_к$) сумма равна 1077, $1077 > 1067$

Однако сумма будет равна 1067, если в приведенном выше наборе заменить $66_{зк}$ на $56_к$.

***Комментарий.***

Обоснованно получен ответ в пунктах *а* и *б*. В решении пункта *в* есть логическая ошибка: не доказано, что красных чисел не может быть меньше 5. Взяв 5 красных чисел, нужно взять 25 зелёных чисел, а не 26. Кроме того, сумма чисел найдена неверно.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 19.5.4**

а) Да, может. Например, вместо зеленого числа 24 можно написать красное число 21 (сказано, что красное число может равняться зеленому). Тогда сумма примет вид $3+6+\ldots+21+21+27+\ldots+90=1392<1395$.

Ответ: да, может.

б) Число 1067 имеет остаток 2 при делении на 3. Следовательно, красное число тоже должно иметь остаток 2 при делении на 3 (т.к. все зеленые числа имеют остаток 0). Наименьшее такое число – 14. Как известно из пункта а), сумма 30 наименьших зеленых чисел равна 1395. Даже если заменить наибольшее из них (90) на 14, то сумма будет равна $1395-90+14=1319>1067$. Следовательно, такого быть не может.

Ответ: нет, не может.

в) $1395-1067=328 \Rightarrow$ в сумме $3+6+\ldots+90$ необходимо так заменить несколько зеленых чисел на красные, чтобы суммарная разница между ними составила 328.

Во-первых, заметим, что за 5 замен это сделать невозможно, поскольку даже если заменить самые большие зеленые числа (90, 87, 84, 81, 78) на самые маленькие красные (7, 14, 21, 28, 35), то суммарная разница составит $305<328$.

Во-вторых, заметим, что если вдобавок заменить 72 на 49 ($72-49=23$), то суммарная разница составит как раз 328 ($305+23=328$) $\Rightarrow$ искомое наименьшее количество красных чисел – 6.

Ответ: 6.

***Комментарий.***

Обоснованно получен ответ в пунктах *а* и *б*. В пункте *в* неверное обоснование, поскольку не доказано, что набор с минимальным количеством красных чисел получается заменой максимальных чисел из набора 3, 6, ..., 90 на минимально возможные различные красные числа. Кроме того, разница между пятью самыми большими зелёными числами и пятью самыми маленькими красными числами составляет 315.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 19.6.1**

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 26.

а) ~~в~~ среднее арефм. $= \dfrac{\text{сумма}}{\text{кол-во.}}$

$\Rightarrow$ сумма $=$ с.А $*$ кол-во.

Пусть сума синих $L$, а красных $M$, тогда $L + M = 14 \cdot 40$ — это в 1м случае.

Во втором $3L + M = 39 \cdot 40$

$$\begin{cases} L + M = 14 \cdot 40 \Rightarrow M = 14 \cdot 40 - L \quad (1) \\ 3L + M = 39 \cdot 40 \quad (2) \end{cases}$$

$1 \to 2 \qquad 3L + 14 \cdot 40 - L = 39 \cdot 40$

$2L = 40 \cdot 25$

$L = 20 \cdot 25 = 500$ — сумма всех синих $= 500 \Rightarrow 500$ надо получить 10 различными числами. Это можно сделать, например:

46 ~~+~~54; 30; 70; 20; 80; 10; 90; 60; 40

б). $L = 500$; $M = 14 \cdot 40 - L \Rightarrow M = 520 - 500 = 20$.

Красных карточек 10. $\Rightarrow$ ~~числа с.А = 20~~.

среднее арефметическое должно быть 2.

Такими числами могут быть.

2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2; 2 $\Rightarrow$ Да.

***Комментарий.***

В решении пункта *а* есть только описание чисел, написанных на синих карточках. Указание чисел, написанных на красных карточках, отсутствует. В решении пункта *б* допущена вычислительная ошибка. Решение пункта *в* отсутствует.

**Оценка эксперта: 2 балла.**

**Пример 19.6.2**

На столе лежит 40 карточек, часть из которых красного цвета, а остальные синего (есть хотя бы по одной карточке каждого цвета). На каждой карточке написано натуральное число. Все числа, написанные на синих карточках, различны. Любое число на красной карточке меньше любого числа на синей карточке. Среднее арифметическое всех чисел на карточках равно 14. Если утроить числа на синих карточках, то среднее арифметическое всех чисел станет равно 39.

а) Может ли на столе быть ровно 10 синих карточек?

б) Может ли на столе быть ровно 10 красных карточек?

в) Какое наибольшее количество синих карточек может быть на столе?

**Ответ:** а) да; б) нет; в) 26.

x - сумма чисел на красных карточках

y - сумма чисел на синих карточках

$$\begin{cases} x+y=14\cdot 40=560 \\ x+3y=39\cdot 40=1560 \end{cases} \Rightarrow 2y=1000 \Rightarrow y=500,$$

$x=60 \Rightarrow$ сумма ~~чисел~~ неповторяющихся синих чисел $=500$, а красных 60

а) Да, может. Пример: на 30 красных карточках написано число 2, а на 10 синих числа 100, 150, 3, 7, 5, 4, 9, 21, 175, 21. Каждое число на синей карточке больше любого на красной и не повторяется.

б) Нет. Если на столе ровно 10 красных карточек, то самое маленькое из возможных максимальное число, написанное на карточке будет равно 6, тогда на синих карточках не должно быть числа меньше 7, синих карточек должно быть 30, а сумма на них равнять.

ся 500, самый меньший возможный шаг между числами $d=1$, тогда, если $a_1=7$, то сумма всех чисел $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$, где $n=30$, так как синих карточек всего 30, $a_n=29d+a_1$ =>

=> $S_n=\frac{7+29\cdot 1+7}{2}\cdot 30=(14+29)\cdot 15=43\cdot 15=645$, что больше 500, $S_n$ - минимальная сумма, которая может получится, т.к. $S_n>500$ при данных условиях на столе не может быть ровно 10 красных карточек.

в) Ответ: 11, т.к. в других случаях общая сумма чисел на синих карточках превышает 500

***Комментарий.***

В решении пункта *а* приведён пример чисел на синих карточках, в котором есть повторяющееся число 21, да и сумма этих чисел равна 495, а не 500. Обоснованно получен ответ в пункте *б*. Решение пункта *в* фактически отсутствует.

**Оценка эксперта: 1 балл.**