Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки
ФГБНУ «Федеральный институт педагогических измерений»

И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий, А.В. Семенов

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2022 года

по **МАТЕМАТИКЕ**

Москва, 2022

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) по математике представляет собой форму государственной итоговой аттестации. ЕГЭ по математике проводится в целях определения уровня подготовки обучающихся по предмету «Математика» и соответствия требованиям ФГОС результатов освоения образовательных программ среднего общего образования по математике. ЕГЭ проводится в соответствии с Федеральным законом от 29.12.2012 № 273-ФЗ «Об образовании в Российской Федерации» и Порядком проведения государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования, утверждённым приказом Минпросвещения России и Рособрнадзора от 07.11.2018 № 190/1512.

Контрольные измерительные материалы (КИМ) представляют собой стандартные варианты, соответствующие спецификации и демонстрационному варианту. Содержание КИМ определяется федеральным компонентом государственного стандарта основного общего и среднего (полного) общего образования (приказ Минобразования России от 05.03.2004 № 1089).

С 2015 г. ЕГЭ по математике проводится на двух уровнях: базовом и профильном. ЕГЭ базового уровня предназначен для проверки достижения участниками экзамена основных предметных результатов, в частности способности производить бытовые расчёты и использовать математические знания для решения задач, возникающих в повседневной жизни. ЕГЭ профильного уровня предназначен для проверки освоения более широкого круга математических понятий и методов, необходимых для продолжения математического образования. ЕГЭ базового уровня по математике в 2022 г. проводился после двухгодичного перерыва, связанного с неблагоприятной эпидемической ситуацией.

Варианты КИМ единого государственного экзамена по математике составляются на основе спецификации и кодификаторов проверяемых элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников общеобразовательных организаций.

КИМ ЕГЭ 2022 г. по математике профильного уровня в значительной степени сохранили преемственность с экзаменационной моделью прошлых лет, при этом было завершено содержательное разделение экзаменов: из ЕГЭ по математике профильного уровня исключены три задания базового уровня, и добавлены в него два задания, направленные на проверку готовности к продолжению образования в вузах – по теории вероятностей и на использование графика функций. В ЕГЭ по математике базового уровня добавлено два практико-ориентированных задания. Подробно схема КИМ отражена в демонстрационной версии КИМ[1] на сайте ФИПИ.

Каждый вариант КИМ по математике профильного уровня содержит:

– 11 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности;

– 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

Каждый вариант КИМ по математике базового уровня содержит 21 задание базового уровня сложности.

Задания относятся к трём учебным курсам: «Алгебра и начала математического анализа», «Геометрия» и «Вероятность и статистика». Наличие логических навыков у выпускников проверялось во всех заданиях, особенно в заданиях 12–18 с развёрнутым ответом вариантов экзамена профильного уровня и в заданиях 18, 19, 21 вариантов экзамена базового уровня.

Характеристика КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня

Задания 1–11 с кратким ответом составляют часть 1 варианта, задания 12–18 составляют часть 2 варианта КИМ ЕГЭ профильного уровня. К учебному курсу «Алгебра и начала математического анализа» относятся задания 1, 4, 6, 7, 8, 9, 11 с кратким ответом и задания 12, 14, 15, 17, 18 с развёрнутым ответом.

К учебному курсу «Геометрия» относятся задания 3 и 5 части 1 и задания 13 и 16 части 2.

---

[1] См.: «https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2».

При общем сокращении количества заданий в экзамен включено задание (9), проверяющее умения использовать график функции для описания её свойств. При этом было исключено графическое задание базового уровня сложности. Теперь профильный экзамен содержит два задания повышенного уровня сложности, проверяющих умения распознавать графики изученных функций, интерпретировать графики, пользоваться свойствами и определением производной. Более подробно изменения, произошедшие в составе КИМ профильного уровня, описаны ниже.

В 2022 г. в соответствии с действующим ФГОС впервые КИМ профильного уровня содержали два задания различного уровня сложности, проверяющих освоение курса «Вероятность и статистика»: задание 2 базового уровня и задание 10 повышенного уровня сложности. Задание 2 предполагает понимание вероятности события как доли благоприятных элементарных событий в множестве всех равновозможных исходов случайного опыта. Задание 10 требует знания фактов и теорем теории вероятностей, изучаемых в курсе основной школы.

По количеству баллов, начисляемых участнику за выполнение заданий, все задания разделяются на дихотомические (0 или 1 балл) и политомические (есть промежуточные баллы). Все задания второй части (12–18) – политомические. В большинстве из них требования на промежуточные баллы однозначно определяются условием задания за счёт разбиения задания на естественные части (пункты).

Современная модель ЕГЭ по математике профильного уровня выделяет по результатам экзамена 5 групп участников в соответствии с их уровнем предметной подготовки (табл. 1). Такая группировка обусловлена качественными различиями между уровнями подготовки участников экзамена. Разумеется, группировка условна, а границы групп нечёткие.

Таблица 1. Группы по уровню подготовки (ЕГЭ профильного уровня)

Группа	1 (мин.)	2 (базовый)	3 (базовый)	4 (повыш.)	5 (высокий)
Границы первичных баллов	0–5	6–9	10–13	14–22	23–31
Границы тестовых баллов	0–27	34–52	58–68	70–86	88–100

Анализ выполнения заданий участниками по группам будет дан ниже. Традиционно важно выделение группы наиболее подготовленных участников, намеренных продолжать образование по IT, инженерным, естественно-научным и математическим специальностям. В то же время экзамен содержит материал, достаточный для диагностики общих математических умений, применяемых при изучении иных предметов, в быту и массовых профессиях. В большинстве своём эти задания сгруппированы в части 1 экзамена и охватывают широкий круг математических объектов, методов и практических сюжетов: оптимальный выбор, финансовая грамотность, бытовые расчёты, оперирование процентами, прикладная геометрия, вычисление вероятностей событий.

Задания части 2 предназначены для проверки математических знаний на уровне, необходимом для абитуриентов технических и математических специальностей. Традиционно в их число входит исследование функций, задачи по стереометрии, планиметрии, решение уравнений и неравенств, текстовая задача.

Действовавшая 2014–2021 гг. модель профильного ЕГЭ по математике показала достаточный диагностический потенциал и послужила основой для разработки перспективной модели профильного ЕГЭ и КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня 2022 г.

Минимальный пороговый первичный балл ЕГЭ по математике профильного уровня в 2022 г. с учётом сокращения количества заданий и повышения сложности двух заданий был снижен с 6 до 5, при этом минимальный пороговый тестовый балл сохранён на прежнем уровне – 27 тестовых баллов. Таким образом обеспечена сопоставимость результатов экзамена с предыдущими годами.

Изменения в КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня

В 2022 г. в модель КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня внесены следующие изменения.

1. Удалены задания 1 и 2, проверяющие умение использовать приобретённые знания и умения в практике и повседневной жизни.

2. Удалено задание 3, проверяющее умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами на базовом уровне.

Эти изменения связаны с назревшей необходимостью освободить профильный экзамен от избыточного количества заданий базового уровня, поскольку за восемь лет, прошедших с момента введения базового экзамена в условиях, когда участник может выбрать только один из уровней, окончательно сформировалось два потока участников, и профильный экзамен перестал нести функцию проверки сформированности базовых умений у обучающихся, осваивающих математику на базовом уровне.

3. Добавлено задание (9), проверяющее умение выполнять действия с функциями и их графиками.

4. Добавлено задание (10), проверяющее умение решать задачи по теории вероятностей, в том числе с применением изученных фактов и формул, графических методов представления случайных опытов.

Данные задания стало возможно ввести в экзаменационные материалы без увеличения общего объёма материала благодаря исключению заданий 1–3.

5. Внесены изменения в систему оценивания:

- максимальный балл за выполнение задания 13 повышенного уровня (стереометрия) стал равен 3;
- максимальный балл за выполнение задания 15 повышенного уровня (практико-ориентированная задача, требующая построения математической модели) стал равен 2.

Таким образом усилен акцент на проверку освоения элементов содержания, необходимых для успешного продолжения образования в вузах по IT, инженерным, естественно-научным специальностям.

В результате внесённых изменений общее количество заданий уменьшилось с 19 до 18, максимальный первичный балл за выполнение всей работы уменьшился с 32 до 31.

Характеристика КИМ ЕГЭ по математике базового уровня

Модель КИМ ЕГЭ по математике базового уровня по сравнению с моделью 2020 г. претерпела незначительные изменения. Все задания, как и прежде, предполагают краткий числовой ответ, множественный выбор из данного перечня вариантов либо установление соответствия между двумя характеристиками процесса или объектов.

Традиционно задачи 19 и 21 имеют более высокий уровень сложности и предполагают не столько применение известных фактов или формул, сколько числовое конструирование (предъявите число, обладающее определёнными свойствами) и математическое рассуждение.

Задача 20 является классической практико-ориентированной задачей на движение или совместную работу, заданной текстовым условием.

Минимальный балл ЕГЭ по математике базового уровня в 2022 г. остался неизменным с 2019 г. и составляет 7 первичных баллов.

Изменения в КИМ ЕГЭ по математике базового уровня

В 2022 г. в модель КИМ ЕГЭ по математике базового уровня по сравнению с моделью 2020 г. внесены следующие изменения.

1. Объединены два задания, проверяющие умение выполнять вычисления и преобразования (данное требование проверяется заданием 7 по новой нумерации).

2. Добавлено задание 5, проверяющее умение выполнять действия с геометрическими фигурами.

3. Добавлено задание 20, проверяющее умения строить и исследовать простейшие математические модели.

В результате внесённых изменений общее количество заданий и первичный балл увеличились с 20 до 21.

Указанные изменения – ещё один шаг на пути к формированию стройной системы итоговой аттестации за курс средней школы, состоящей из двух чётко обозначенных комплексов требований. Система базовых требований подразумевает возможность подтвердить минимальное владение математическими знаниями и умениями, достаточными для применения в повседневной жизни. Система профильных требований включает в себя проверку знаний и умений, необходимых для продолжения образования в высшей школе по специальностям, требующим хорошей математической подготовки.

Некоторые предложения, сформулированные в ходе разработки перспективной модели, не отражены в модели 2022 г. Например, в 2022 г. в КИМ ЕГЭ профильного уровня не включены задачи, связанные с представлением и арифметикой комплексных чисел.

Общие результаты ЕГЭ по математике профильного уровня[2]

Статистику результатов ЕГЭ профильного уровня нужно рассматривать в контексте особых условий, в которых проходил экзамен. Во-первых, участники ЕГЭ текущего года не сдавали ОГЭ в 2020 г. в связи с неблагоприятной эпидемиологической обстановкой; таким образом, практически все участники не имели опыта прохождения итоговой аттестации в форме ОГЭ. Во-вторых, завершающие годы обучения нынешних выпускников пришлись на период пандемии. Оба эти фактора должны были отрицательно сказаться на распределении баллов. Кроме того, следует учесть и описанное выше изменение содержания экзамена, связанное с завершением его разделения на два уровня и, как следствие, ориентирующее выпускников на более осмысленный выбор уровня экзамена в соответствии с их целевыми установками в части продолжения образования. Это сказалось на общей численности участников экзамена профильного уровня. В 2022 г. их было на 17,5 % меньше, чем в 2021 г.

В результате распределение первичных баллов (диагр. 1) стало менее вариативным на участке от моды 9 баллов до 18 баллов, при этом доля участников, набравших от 9 до 18 баллов заметно выросла. В распределении наблюдаются нечётко выраженные аномалии в точках 15 и 17 баллов. Это явление, как и в прошлые годы, объясняется эффектом «склеивания баллов» при решении ряда задач части 2, которое возникает, когда промежуточный балл за решение задания получает незначительная часть участников. Это свидетельствует о повышении уровня математической культуры участников: находя верный ход решения, всё большая доля участников экзамена верно доводит решение до конца, избегая ошибок.

[2] Данные приведены по результатам основного периода проведения экзамена. Последующие изменения несущественно влияют на статистику и выводы.

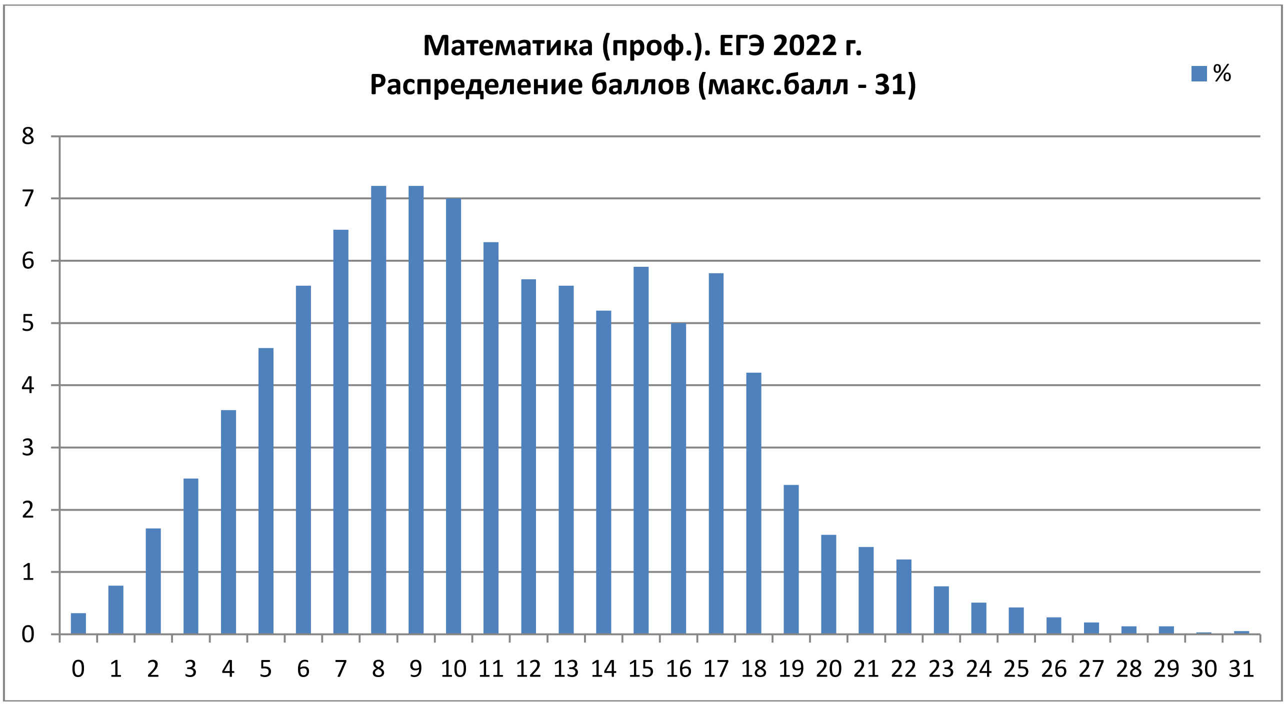


Диаграмма 1. Распределение первичных баллов (профильный уровень)

Средний тестовый балл ЕГЭ 2022 г. повысился в сравнении с предыдущими годами и составил 56,9. Также следует отметить заметный рост доли участников, показавших результат в интервале 61–80, то есть основного контингента IT, инженерных, естественно-научных специальностей вузов. Эта важная группа и обеспечила рост среднего тестового балла в 2022 г.

Общие результаты ЕГЭ по математике базового уровня[3]

ЕГЭ по математике базового уровня не проводился в 2020 и 2021 г. в связи с неблагоприятной эпидемиологической обстановкой. Отмеченные выше факторы (обучение в период пандемии, отсутствие экзамена ОГЭ) формально не сказались на статистике экзамена базового уровня, более того, результаты в целом выше, чем в 2019 г. Это, в частности, связано с тем, что ряд выпускников, с одной стороны, не чувствуя достаточной подготовки, а с другой стороны, имея меньшую мотивацию к продолжению образования по IT, инженерным, естественно-научным специальностям, выбрал экзамен базового уровня. Следует отметить, что получившие на экзамене базового уровня тестовый балл «5» после небольшой подготовки могли бы успешно сдать экзамен профильного уровня на балл, достаточный для поступления на бюджетные места по IT, инженерным, естественно-научным специальностям. Эта, достаточно большая в количественном отношении группа представляет важный резерв контингента вузов.

В основной период ЕГЭ 2022 г. по математике базового уровня сдавали 343 049 участников (против 305 999 участников в 2019 г.). Значительный рост числа участников обусловлен переходом на новую, более специализированную модель профильного ЕГЭ. При этом доли тех, кто выбирал в этом году ЕГЭ базового уровня, росли по регионам неравномерно. В ряде регионов число участников ЕГЭ базового уровня по математике не изменилось или даже немного снизилось. Это объясняется изменениями в численном составе выпускников школ регионов в большей степени, чем выбором значительной части выпускников экзамена профильного уровня.

На диаграмме 2 представлено распределение первичных баллов участников ЕГЭ по математике базового уровня.

---

[3] Данные приведены по результатам основного периода проведения экзамена. Последующие изменения несущественно влияют на статистику и выводы.

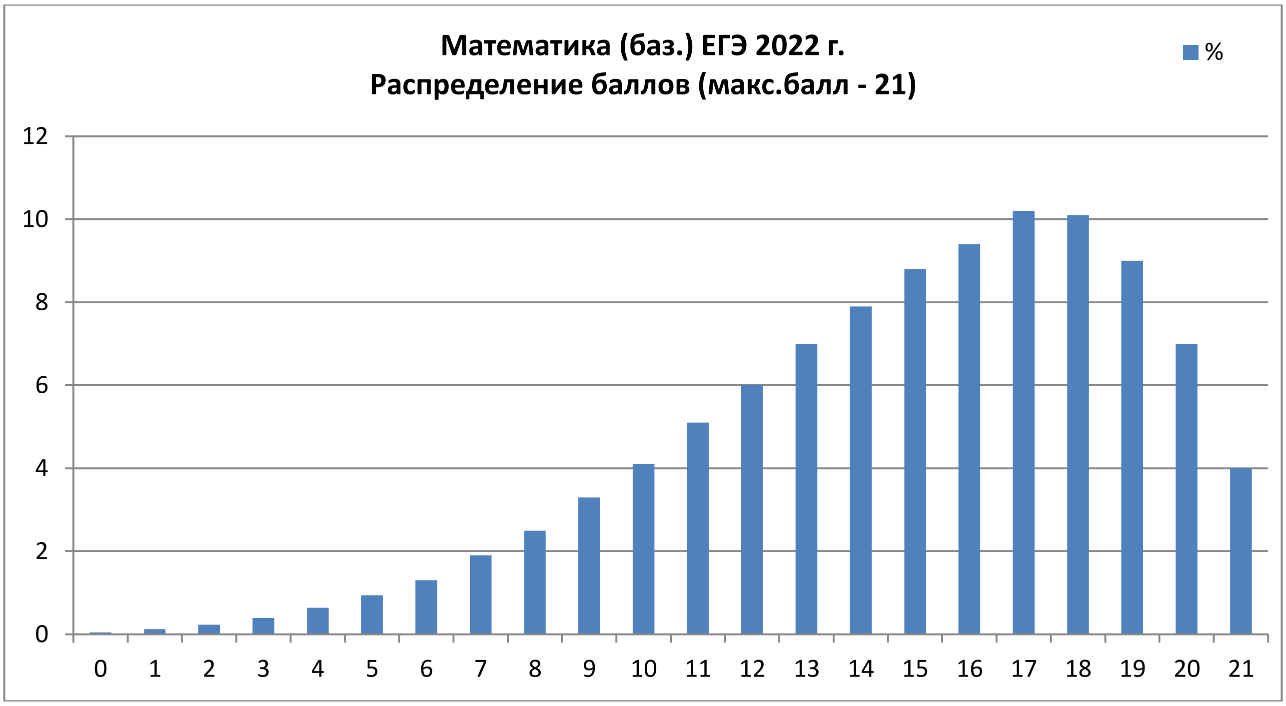


Диаграмма 2. Распределение первичных баллов (базовый уровень)

По сравнению с 2018 и 2019 г. характер распределения первичных баллов практически не изменился; на него не повлияли ни появление нового задания при сохранении пороговых значений первичных баллов на тестовый балл «3», «4» и «5», ни численный рост участников экзамена.

Средний тестовый балл в 2022 г. составил 4,16, что соотносится с аналогичными показателями ЕГЭ прошлых лет.

Переход в группу сдающих базовый экзамен некоторой части тех, кто в модели прошлых лет мог бы планировать участие в ЕГЭ на профильном уровне с невысоким результатом, ожидаемо привёл к некоторому росту результатов: выросла доля тех, кто сдал на 5 баллов, и снизилась доля тех, кто сдал на 2 или 3 балла. Это явление могло бы проявиться ярче, если бы участники ЕГЭ этого года имели больший опыт выполнения экзаменационных заданий в два прошедших года, когда интенсивность учёбы в большинстве регионов была снижена.

***

Можно утверждать, что проверяемые элементы содержания, изучаемые в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа», традиционно осваиваются лучше, чем элементы курса «Геометрия». Результаты профильного и базового экзаменов в этом году не стали исключением. И на базовом, и на профильном уровне участники в целом продемонстрировали приемлемую технику преобразований, вычислений и решения уравнений. Тем не менее вычислительные ошибки остаются основной причиной неверного выполнения заданий: при правильных рассуждениях и разумном алгоритме решения экзаменуемые часто получают неверный ответ за счёт ошибок в решении простейших уравнений и при выполнении арифметических действий.

В геометрии иная картина. Изучение геометрии намного хуже алгоритмизируется, чем изучение алгебры: количество геометрических конфигураций, возникающих даже в несложных задачах с двумя-тремя объектами, огромно. У школьников создаётся ложное представление о том, что геометрия «необозрима» и потому намного сложнее алгебры. К сожалению, эта убежденность часто подпитывается учителями, которые полагают, что изучать алгебру легче и продуктивнее, поскольку алгебраических заданий на экзамене больше, чем геометрических. При этом определённый рост акцента в экзамене профильного уровня на важные для инженерных специальностей геометрические задания способствовал росту геометрической подготовки выпускников.

Результаты экзамена показали, что российские школьники и учителя математики в целом готовы к введению в экзаменационные материалы задач по теории вероятностей. Можно было ждать низких результатов выполнения задачи 10 профильного уровня, однако этого не произошло. Таким образом, следует подумать об увеличении количества задач по теории вероятностей в открытом банке заданий ЕГЭ профильного уровня и о дальнейшем расширении тематического спектра задач по вероятности и статистике в экзамене.

К сожалению, непреодолённой остаётся главная проблема: перекос в математической подготовке школьников в сторону решения большого количества тренировочных работ по специализированным сборникам или вариантам прошлых лет. Давая своим ученикам клонированные варианты один за другим, учитель добивается, как ему кажется, безусловного и безукоризненного выполнения работ почти всеми учащимися. У него создается ложное мнение, что школьники готовы к сдаче ЕГЭ, и похожее впечатление возникает у самих школьников и их родителей. Проблема в том, что, решая экзаменационные задачи предыдущих лет, школьник готовится *к прошлогоднему экзамену*, а не к предстоящему.

Полноценно подготовиться к экзамену можно, лишь изучая математику во всём разнообразии её методов; необходимо уделять должное внимание развитию логики и математической речи, в том числе устной, а также умению выражать мысли на бумаге доходчиво, просто и доказательно. В этом могут помочь открытый банк ФИПИ, сборники задач и вариантов, если их использовать как источник идей и для проверки собственных достижений, но не как коллекцию репетиционных материалов.

Ниже содержится краткий обзор результатов выполнения типичных заданий профильного и базового ЕГЭ по математике в 2022 г. с указанием вероятных причин низкой результативности ряда заданий.

Содержательный анализ результатов ЕГЭ по математике профильного уровня

Для анализа выполнения заданий КИМ ЕГЭ использованы иллюстрации с заданиями вариантов 2022 г. Каждый из использованных для анализа вариантов выполняли не менее 8000 участников экзамена из разных регионов. Выборку можно считать репрезентативной.

Задание 1 проверяет умение решать уравнения, приводящиеся к линейным с помощью изученного преобразования.

Пример 1

1 Найдите корень уравнения $6^{x-5}=36$.

Пример 2

1 Найдите корень уравнения $4^{x-3}=64$.

Комментарий

Оба задания выполнили более 90 % участников экзамена профильного уровня, что говорит о достаточно высоком уровне владения базовыми алгебраическими навыками. При этом обращает на себя внимание любопытный факт: задания из примеров 1 и 2, казалось бы, совершенно одинаковы, но процент выполнения задания из примера 2 ниже. Видимо, то, что шестью шесть – тридцать шесть, видят практически все, а заменить число 64 выражением 4^3 не сумело примерно 7 % тех, кто представил бы 36 как 6^2. Очевиден вывод: имеется проблема чисто арифметического характера, не имеющая отношения к алгебре. Следовательно, на уроках в основной школе в блоках повторения недостаточно уделялось внимания представлению чисел в виде степеней.

Задание 2. Простейшая задача по теории вероятностей на подсчёт доли благоприятствующих элементарных событий.

2 *Пример 1*

В чемпионате по гимнастике участвуют 45 спортсменок: 6 из России, 21 из США, остальные — из Китая. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Китая.

Пример 2

2 На конференцию приехали учёные из трёх стран: 5 из Австрии, 4 из Германии и 6 из Сербии. Каждый из них делает на конференции один доклад. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что десятым окажется доклад учёного из Сербии.

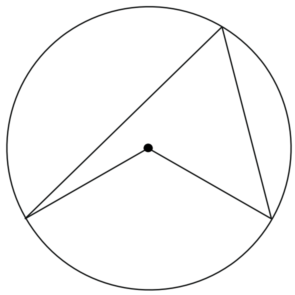
Комментарий

Задания выполнило около 90 % участников экзамена, что говорит о успешном освоении базовых навыков анализа простейших вероятностных моделей. Однако процент выполнения задания из примера 2 ниже, вероятно, объясняется тем, что в примере 1 речь идет о *первой* спортсменке, а в примере 2 – о *десятом* докладе. Здесь явно недоработка учителей, которые не стали объяснять, что неважно, о каком именно по счёту объекте идёт речь. Нужно лишь найти долю объектов, удовлетворяющих нужному условию (спортсменка из Китая или доклад из Сербии).

Задание 3. Задача по планиметрии с данным чертежом.

Пример

3 Найдите величину центрального угла, если он на $69°$ больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу. Ответ дайте в градусах.



Комментарий

Задание выполняется на уровне чуть выше 70 %. Невыполнение данного задания связано с неготовностью составить простейшее уравнение при решении геометрической задачи. Умение составить уравнение на основе любых данных, в частности из геометрии, должно быть постоянно активным. Алгебраический способ решения с помощью уравнений или систем следует подавать как облегчение решения задачи, которую трудно решить с помощью последовательных вычислений. Здесь сказывается распространённая проблема – отсутствие восприятия математики в целом. Геометрия и алгебра воспринимаются как отдельные, несвязанные науки. Точно так же особняком в сознании школьников стоят физика и теория вероятностей. Задача учителя – сделать из математических знаний универсальный арсенал решения самых разных задач, которым школьник может пользоваться независимо от школьного предмета.

Задание 4. Значение тригонометрического выражения.

Пример 1

4 Найдите значение выражения $5\sqrt{2}\sin\frac{3\pi}{8}\cdot\cos\frac{3\pi}{8}$.

Пример 2

4 Найдите значение выражения $6\sqrt{3}\cos^2\frac{11\pi}{12}-3\sqrt{3}$.

Комментарий

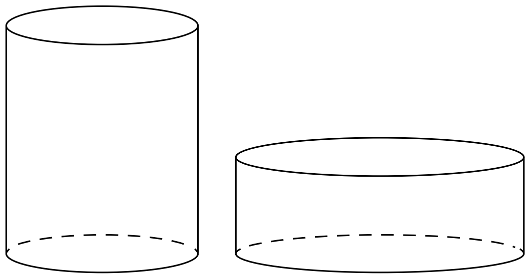
Задание из примера 1 выполнила примерно половина участников. Анализ веера ответов показывает, что заметная доля учащихся не справилась именно с возникающим множителем 2 в формуле синуса двойного угла, дав ответ 5 вместо верного ответа 2,5.

Задание из примера 2 выполнило меньше половины участников. 13,2 % не дали никакого ответа, 7 % дали ответ 3, а 5,4 % дали ответ 1,5. Оба эти неверных ответа получаются при неаккуратном обращении с множителями, возникающими после применения формулы косинуса двойного аргумента.

Задание 5. Наглядная стереометрическая задача с чертежом.

Пример

5 Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 18. У второго цилиндра высота в 3 раза меньше, а радиус основания в 2 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



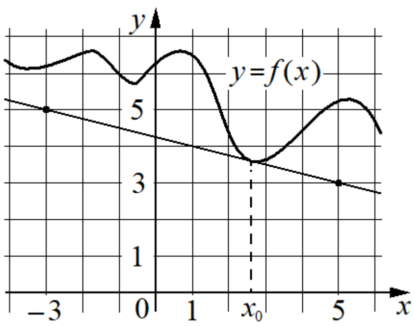
Комментарий

Задание выполнило чуть более половины участников. Типичная ошибка – неверный учёт масштаба. Из-за неразвитости пространственных представлений более четверти участников экзамена провели умножение на 2/3, а не на 4/3 – они не учли, что если радиус вдвое больше, то площадь основания больше вчетверо. Требуется не формальное, а развитое наглядное представление об отношениях площадей и объёмов подобных фигур. К сожалению, многие учителя пренебрегают объёмными моделями при изучении объёмных фигур и соотношений в них, ограничиваясь лишь изображением, часто компьютерным.

Задание 6 – поиск производной по изображению касательной к графику функции на клетчатой бумаге.

Пример

6 На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



Комментарий

Задание выполнило более половины участников экзамена. Эта задача одна из «самых старых» в банке заданий ЕГЭ. В 2010 г. подобную задачу решало не более 30 % участников экзамена. Процент выполнения рос год от года. Большая часть ошибок связана со знаком производной. Ответ 0,25 дали 14,7 %, а ещё часть участников дала ответ 4, неверно вычислив тангенс.

Задание 8. Текстовая задача на движение.

Пример

8 Теплоход проходит по течению реки до пункта назначения 80 км и после стоянки возвращается в пункт отправления. Найдите скорость теплохода в неподвижной воде, если скорость течения равна 2 км/ч, стоянка длится 4 часа, а в пункт отправления теплоход возвращается через 13 часов. Ответ дайте в км/ч.

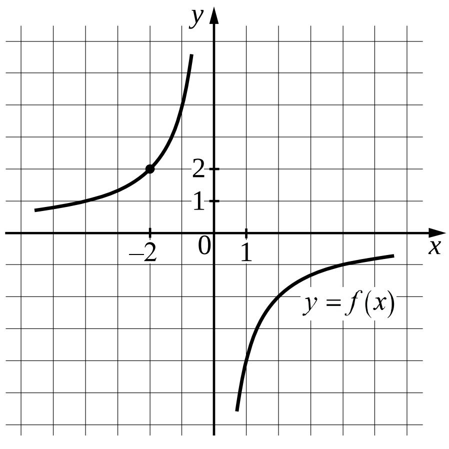
Комментарий

Задание выполнило более половины участников экзамена. Задачи на движение, совместную работу, смеси и сплавы традиционно составляют важную часть школьной математики, которая всегда присутствовала на выпускных и вступительных экзаменах. Возвращаясь к вопросу об уместности составления уравнений (см. комментарий к заданию 3), заметим, что здесь уравнение или система не кажется большинству участников чем-то чужеродным, тем не менее неразвитость умений прочитать условие задачи, верно составить математическую модель в виде уравнения, решить полученное уравнение, проверить ответ мешает выполнить задание заметной доле участников экзамена. Уровень выполнения данной задачи должен быть существенно выше, особенно среди участников экзамена профильного уровня.

В **задании 9** требуется знать свойства функций и внешний вид их графиков.

Пример

9 На рисунке изображён график функции вида $f(x)=\dfrac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Комментарий

Задание выполнило более двух третей участников экзамена, что является очень хорошим результатом. Сложности вызывают функции с отрицательными коэффициентами. Проблема уходит корнями в 6 класс: не выработаны навыки работы с отрицательными числами. В примере самый популярный неверный ответ $0,4$ (4 %). Заметим, что ответ на эту задачу отсутствует в 11 % работ.

Задание 10. Теория вероятностей.

Пример

10 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Комментарий

Задание выполняет более двух третей участников экзамена. Задачи по теории вероятностей, отличные от задач на простой подсчёт отношений, впервые вошли в ЕГЭ, хотя уже несколько лет соответствующие темы содержатся в примерных общеобразовательных программах. Выполнение задач этого типа на показанном уровне хорошо для группы задач, впервые вошедших в варианты экзамена. Основные причины неуспешного выполнения этих задач – неустойчивые вычислительные навыки и непонимание вероятностной сути задачи.

Задание 12. Тригонометрическое уравнение.

Пример

12 а) Решите уравнение

$$\sin 2x + 2\sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Комментарий

Задание выполняет на 1 балл половина участников. К сожалению, пятая часть участников экзамена, верно решивших уравнение, ошибается в отборе корней, при этом часть участников, к сожалению, получив верный ответ в отборе, забывает, что в заданиях части 2 необходимо привести обоснованное решение задачи, и ограничивается только указанием корней, принадлежащих отрезку, что оценивается 0 баллов за второй пункт. Способ отбора может быть любым: математически корректным и обоснованным как с помощью окружности, так и прямой или неравенств. Но в каждом из этих способов должны быть указаны ключевые элементы решения.

Задание 13. Стереометрия.

Пример

13 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точки M и N — середины рёбер AB и AD соответственно.

а) Докажите, что прямые B_1N и CM перпендикулярны.

б) Плоскость α проходит через точки N и B_1 параллельно прямой CM. Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если $B_1N = 6$.

Комментарий

Задание выполнило на ненулевой балл 20 %, на полный балл 5 % участников экзамена. Рост баллов за данное задание свидетельствует об увеличении внимания к изучению стереометрии, что и приводит к росту уровня выполнения стереометрических заданий в частях 1 и 2 экзамена. Задание разбито на два пункта. Первый пункт считается выполненным, если проведено верное доказательство. Появление заданий на доказательство в ЕГЭ привело к возвращению этого традиционного и очень важного математического умения в школьный курс. Учителя всё больше внимания уделяют правильному применению фактов и теорем курса, развитию у обучающихся умения совершать логические переходы.

Наиболее трудными, как правило, являются логические построения, связанные с доказательством от противного. Отмечая важность развития умений выполнять такие заданий для успешного продолжения образования не только по инженерным, но и по IT специальностям, следует особенно обратить внимания учителей на необходимость усиления внимания к курсу стереометрии, прежде всего к выработке умения решать задачи различными методами, как геометрическими, так и аналитическими.

Задание 14. Неравенство.

Пример

14

Решите неравенство $3^x + \dfrac{243}{3^x - 36} \geq 0$.

Комментарий

Задание выполняют на ненулевой балл более 40 % участников экзамена, бо́льшая часть из которых – на полный балл. Неравенства решают преимущественно экзаменуемые с высоким и средним уровнями подготовки, а слабо подготовленные участники к этому заданию не приступают. Важно отметить, что подавляющее большинство участников экзамена, нашедших путь решения, верно доводит его до конца, что показывает рост математической культуры выпускников.

В последние годы, особенно в связи с задачами ЕГЭ, всё бо́льшую популярность приобретает так называемый обобщённый метод интервалов. Название метода стихийно возникло в учительской среде и не является общеупотребительным термином. Суть сводится к решению уравнения и определению знаков функции произвольного вида (не обязательно рациональной) на интервалах знакопостоянства. К сожалению, школьники, даже понимая суть метода, часто не могут грамотно описать последовательность своих действий и теряют логику рассуждений, пытаясь повторить решение по памяти или по аналогии с похожими примерами, которые они решали раньше, и, как следствие, допускают грубые ошибки.

Задание 15. Практико-ориентированная задача.

Пример

15

В июле 2026 года планируется взять кредит на три года. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг будет возрастать на 20 % по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
— платежи в 2027 и в 2028 годах должны быть по 300 тыс. рублей;
— к июлю 2029 года долг должен быть выплачен полностью.
Известно, что платёж в 2029 году будет равен 417,6 тыс. рублей. Какую сумму планируется взять в кредит?

Комментарий

Задание выполнило более половины участников экзамена на ненулевой балл, бо́льшая часть из которых выполняет его на полный балл. Участники экзамена, которые не смогли выполнить данное задание, делятся на две группы: те, кто не смог составить математическую модель решения (или составил её неверно), и те, кто допустил ошибки (как правило, вычислительные) при решении полученного уравнения. Следует отметить резкое снижение за последние годы доли участников экзамена, которые допустили ошибки при составлении математической модели. Это является следствием в том числе резкого усиления внимания к практико-ориентированным заданиям в школьном курсе. Важно отметить, что подавляющее большинство участников экзамена, нашедших путь решения, верно доводит его до конца, что показывает рост математической культуры выпускников.

Задание 16. Планиметрическая задача.

Пример

16 На стороне BC параллелограмма $ABCD$ выбрана точка M такая, что $AM = MC$.
а) Докажите, что центр вписанной в треугольник AMD окружности лежит на диагонали AC.
б) Найдите радиус вписанной в треугольник AMD окружности, если $AB = 5,$ $BC = 10,$ $\angle BAD = 60°.$

Комментарий

Выполнение на полный балл – на уровне пятой части участников, на полный балл – на уровне 5 %. Планиметрические задачи традиционно входили в состав вступительных испытаний технических и математических специальностей вузов. Растущий, но все ещё относительно низкий процент выполнения геометрических заданий повышенного и высокого уровней сложности свидетельствует о сохраняющихся проблемах в преподавании геометрии. Одна из причин – рассмотрение тех типов задач, которые встречались на экзамене в предыдущие годы, а не обучение полноценной геометрии. Эта практика распространена повсеместно и касается, конечно, не только геометрии, но именно в геометрии ярче проявляются пагубные результаты, поскольку однотипные геометрические конфигурации различаются между собой гораздо больше, чем однотипные уравнения или неравенства.

Задание 17. Уравнение с параметром.

Пример

17 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 + x - 7a = |7x + a|$$

имеет больше двух различных корней.

Комментарий

Выполнение на ненулевой балл – чуть более 15 %, на полный балл – менее 1 %. Задача даёт возможность участнику экзамена, претендующему на поступление в вуз с высокими требованиями к уровню математической подготовки, показать умение верно проводить рассуждения, проверки, преобразования. Поэтому за задачу берутся в основном выпускники с высоким уровнем подготовки. Выполнение задания является одним из характерных признаков наиболее сильной группы участников. Навыки, необходимые для верного выполнения данного задания, формируются на протяжении многих лет обучения математике.

Задание 18. Целочисленная арифметика, перебор вариантов, доказательство.

Пример

С трёхзначным числом производят следующую операцию: вычитают из него сумму его цифр, а затем получившуюся разность делят на 3.
а) Могло ли в результате такой операции получиться число 300?
б) Могло ли в результате такой операции получиться число 151?
в) Сколько различных чисел может получиться в результате такой операции из чисел от 100 до 600 включительно?

Комментарий

Задание на ненулевой балл выполнило более половины участников экзамена, на полный балл – менее 1 %. Задача имеет исследовательский характер, требуя подчас проверки подтверждения или опровержения гипотез. Верное выполнения всего задания даёт возможность продемонстрировать готовность к продолжению образования в ведущих вузах. При этом первый пункт задачи имеет конструктивный характер и доступен многим участникам экзамена, поэтому последние годы задача стала приобретать популярность не только у наиболее сильной группы, но и у выпускников с недостаточной общей алгебраической подготовкой, но развитым логическим мышлением. Здесь важно, чтобы учитель верно сориентировал, показал на примерах, что первый пункт не требует специальных знаний – достаточно умения прочитать и понять условие задачи, небольшой сообразительности и минимального терпения, чтобы обнаружить нужную математическую конструкцию.

Содержательный анализ результатов ЕГЭ по математике базового уровня

Для анализа использованы иллюстрации с заданиями вариантов 2022 г. Каждый из использованных для анализа вариантов выполняли не менее 6000 участников экзамена из разных регионов. Выборку можно считать репрезентативной. Варианты базового экзамена полностью собраны из банка заданий. Наличие открытого банка заданий позволяет учителю использовать эти задания как при обучении, так и при организации повторения.

Задание 1. Вычисление значения выражения.

Пример

1 Найдите значение выражения $\frac{1}{3}\cdot 3{,}6-1.$

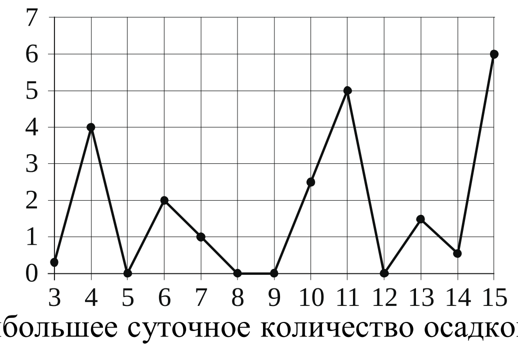
Комментарий

Анализ результатов выполнения данного задания показывает, что более 20 % участников экзамена имеют недостаточно сформированные арифметические навыки и, как следствие, у них заведомо есть сложности в освоении не только курса математики, но и других естественных наук. Отметим, что использование калькуляторов при отсутствии арифметических навыков не страхует от грубых ошибок, в том числе на практике. Необходимо своевременно выявлять указанные пробелы и ликвидировать их путем систематических упражнений.

Задание 4. Практико-ориентированная задача.

Пример

4 На рисунке жирными точками показано суточное количество осадков, выпадавших в Казани с 3 по 15 февраля 1909 года. По горизонтали указаны числа месяца; по вертикали — количество осадков, выпавших в соответствующий день, в миллиметрах. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линиями.



Определите по рисунку наибольшее суточное количество осадков в Казани за данный период. Ответ дайте в миллиметрах.

Комментарий

Данное задание наиболее явно выделяет участников, имеющих затруднения с чтением условия задачи, которые при выполнении данного задания отвечают не на тот вопрос.

Задание 9. Уравнение.

Пример

9 Решите уравнение $x^2 + 4 = 5x$.

Если уравнение имеет больше одного корня, в ответе запишите больший из них.

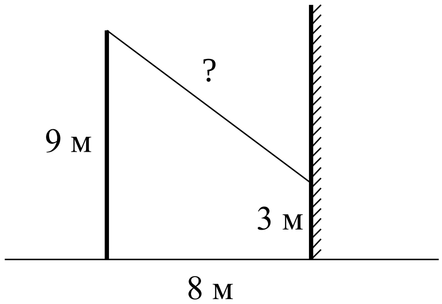
Комментарий

Заметный процент участников экзамена базового уровня имеет сложности при решении уравнений, в которых необходимо провести минимальное одношаговое преобразование, например перенос выражения из одной части в другую.

Задание 10. Наглядная геометрия.

Пример

10 От столба высотой 9 м к дому натянут провод, который крепится на стене дома на высоте 3 м от земли (см. рисунок). Расстояние от дома до столба – 8 м. Найдите длину провода. Ответ дайте в метрах.



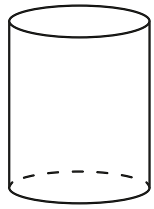
Комментарий

Более 10 % участников экзамена даже не приступают к несложной практической задаче по геометрии. При решении этой задачи наиболее распространёнными являются арифметические ошибки.

Задание 13. Наглядная стереометрия.

Пример

13 Высота бака цилиндрической формы равна 40 см, а площадь его основания равна 150 квадратным сантиметрам. Чему равен объём этого бака (в литрах)? В одном литре – 1000 кубических сантиметров.



Комментарий

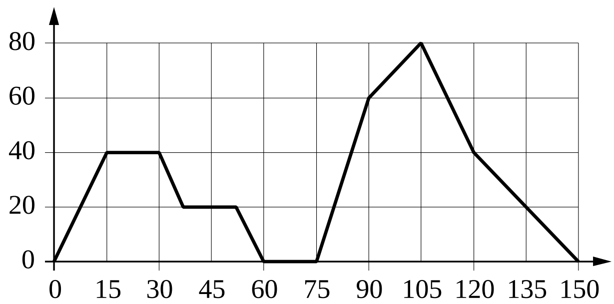
Базовое задание по стереометрии выполняет заметно менее половины участников экзамена, что в сочетании с уровнем решения планиметрических задач показывает, что требуется существенная перестройка курсов стереометрии базового уровня, так как более половины школьников фактически не готовы к его освоению.

Задание 14. Графическое представление процесса или функции.

Пример

14

На графике изображена зависимость скорости движения легкового автомобиля от времени. На вертикальной оси отмечена скорость легкового автомобиля в км/ч, на горизонтальной — время в секундах, прошедшее с начала движения автомобиля.



Пользуясь графиком, поставьте в соответствие каждому интервалу времени характеристику движения автомобиля на этом интервале.

ИНТЕРВАЛЫ ВРЕМЕНИ

А) 0–30 с
Б) 30–60 с
В) 60–90 с
Г) 90–120 с

ХАРАКТЕРИСТИКИ

1) скорость достигла максимума за всё время движения автомобиля
2) скорость автомобиля не уменьшалась и не превышала 40 км/ч
3) автомобиль сделал остановку на 15 секунд
4) скорость автомобиля не увеличивалась на всём интервале

Комментарий

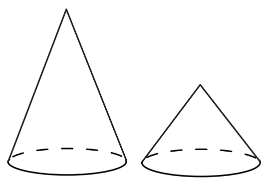
Высокий уровень решения данной задачи (более 90 %) показывает, что наглядные идеи математического анализа успешно осваиваются школьниками.

Задание 16. Стереометрия.

Пример

16

Даны два конуса. Радиус основания и высота первого конуса равны соответственно 2 и 9, а второго — 2 и 2. Во сколько раз объём первого конуса больше объёма второго конуса?



Комментарий

Выполнение данное задания менее чем половиной участников показывает, что, как и отмечено выше, следует больше уделять внимание наглядным пространственным представлениям, а аксиоматический, формальный курс стереометрии базового уровня очень плохо осваивается слабо подготовленными школьниками.

Задание 18. Логические высказывания.

Пример

18 На соревнованиях сборная России завоевала медалей больше, чем сборная Канады, сборная Канады — больше, чем сборная Германии, а сборная Норвегии — меньше, чем сборная Канады. Выберите все утверждения, которые верны при указанных условиях.

1) Сборная Германии завоевала больше медалей, чем сборная России.
2) Из названных сборных команда Канады заняла второе место по количеству медалей.
3) Среди названных сборных есть три, завоевавшие равное количество медалей.
4) Сборная России завоевала больше медалей, чем каждая из остальных трёх сборных.

В ответе запишите номера выбранных утверждений без пробелов, запятых и других дополнительных символов.

Комментарий

Высокий процент выполнения данного задания (более 80 %) означает, что базовые логические навыки есть почти у всех выпускников школы, и при своевременном выявлении пробелов в знаниях, правильном построении курса математики многие участники, имеющие по результатам отметки 3 и 4, могут успешно решать и алгебраические, и геометрические задания и иметь более высокий результат освоения курса математики.

Задание 20. Текстовая задача на движение.

Пример

20 Расстояние между городами А и В равно 360 км. Из города А в город В выехал первый автомобиль, а через три часа после этого навстречу ему из города В выехал со скоростью 55 км/ч второй автомобиль. Найдите скорость первого автомобиля, если автомобили встретились на расстоянии 250 км от города А. Ответ дайте в км/ч.

Комментарий

Задание выполнило чуть менее половины участников экзамена; это показывает, что умения верно прочитать условие текстовой задачи, составить математическую модель, решить полученную задачу и проверить ответ, к сожалению, недостаточно развиваются в школе. Следует продолжать работу по переносу акцентов в изучении математики с формальных технических упражнений на развитие навыков математического мышления, умений применять математику при решении практических задач.

Задание 21. Целая арифметика. Рассуждения, перебор вариантов.

Пример

21 В доме всего десять квартир, их номера от 1 до 10. В каждой квартире живёт не меньше одного и не больше трёх человек. В квартирах с 1-й по 8-ю включительно живёт суммарно 10 человек, и в квартирах с 7-й по 10-ю включительно живёт суммарно 10 человек. Сколько всего человек живёт в этом доме?

Комментарий

Высокий процент выполнения данного задания (половина участников) показывает, что заметный процент выпускников, выбравших экзамен базового уровня, обладает развитой базовой логической культурой, умениями анализа условия задачи, и они потенциально способны освоить на высоком уровне и курс математики на повышенном уровне.

Общие результаты ЕГЭ по математике профильного уровня по группам участников с различным уровнем подготовки

Кластеризация в соответствии с ожидаемым уровнем подготовки дана в табл. 1. Распределение участников по группам показано в табл. 2. Для сравнения приведено распределение участников по группам в 2019 г., когда последний раз проводились параллельно экзамены на обоих уровнях. Нужно учитывать небольшой сдвиг границы в тестовых баллах (при сохранении границ в первичных баллах).

Таблица 2. Распределение участников (профильный уровень) по группам

Группа	1 (мин.)	2 (базовый)	3 (базовый)	4 (повыш.)	5 (высокий)
Границы первичных баллов	0–5	6–9	10–13	14–22	23–31
Границы тестовых баллов	0–27	34–52	58–68	70–86	88–100
Доля участников в 2022 г., %	13,7 %	26,6 %	24,7 %	32,5 %	2,5 %
Границы тестовых баллов в 2019 г.	0–27	33–50	56–68	70–86	88–100
Доля участников в 2019 г., %	9,6 %	33,6 %	24,7 %	29,2 %	2,9 %

Доля участников из группы 1 выросла. Это означает, что, даже в условиях более сложной модели ЕГЭ и уменьшения общего числа участников, в экзамене профильного уровня участвует значительное число школьников, не преодолевших минимального порога.

Участники из группы 1, как правило, ограничиваются 10–12 заданиями с кратким ответом и не приступают к задачам, требующим развёрнутых ответов. Геометрические задачи, задачи на понимание методов математического анализа и свойств графиков выполняются участниками из этой группы плохо. В большинстве своём это школьники, слабо мотивированные к изучению математики. Их участие в профильном экзамене часто нецелесообразно.

Доля участников из группы 2 значительно сократилась. На этой группе компенсирующий фактор сказался сильнее, чем на других. Эту группу можно характеризовать, как тех, кто осваивал базовый курс, но не приобрёл устойчивых навыков. Это не позволяет им продолжать образование по технической специальности. Многочисленность группы 2 на профильном ЕГЭ по математике часто объясняется противоречивыми требованиями ряда вузов к абитуриентам: обязательный профильный экзамен, результаты которого учитываются
в сумме баллов, но при этом относительно невысокие требования к математической подготовке.

В отличие от группы 1, участники из группы 2 часто принимаются за решение заданий части 2, о чем свидетельствуют, например, результаты решения тригонометрического уравнения (около 17,3 % набравших от 21 до 40 т.б., а это преимущественно участники из группы 2, выполнили задание 12 хотя бы на 1 балл). Наличие вычислительных навыков позволяет им относительно успешно справиться с заданиями части 1 экзамена, но, начиная с задания 13 (стереометрия), их результаты почти не отличаются от результатов группы 1, то есть близки к нулевым значениям.

Доля участников из группы 3 мало изменилась. Группа 3 характеризуется как группа участников экзамена, успешно освоивших базовый курс математики и способных обучаться на технических специальностях большинства вузов, не предъявляющих высоких требований к математическим знаниям абитуриентов. Эта группа участников выполняет задания 1–12, как правило, с небольшим количеством ошибок вычислительного характера.

Доля участников из группы 4 выросла. Группа 4 – выпускники, имеющие достаточный уровень математической подготовки для продолжения образования по большинству специальностей, требующих повышенной и высокой математической компетентности. Эта группа, продолжающая укреплять свои позиции в генеральной совокупности участников экзамена, составляет основу абитуриентов и успешных студентов технических вузов. Именно эту группу следует считать целевой при составлении части 2 профильного ЕГЭ. Важную роль в росте доли участников данной группы играет своевременная профориентационная работа со школьниками, в том числе в 9 и 10 классах, с тем чтобы большее число обучающихся выбирало профильный курс математики, хорошо его осваивало и ориентировалось на дальнейшее поступление в вузы на современные перспективные специальности. В эту группу может перейти заметное число сдавших на «отлично» экзамен базового уровня.

Доля участников из группы 5, с самым высоким уровнем подготовки, несущественно выросла по сравнению с 2020 и 2021 г., но по сравнению с 2019 г. незначительно сократилась. Численный состав этой группы всё же можно считать стабильным по результатам нескольких лет. Это выпускники, которые могут продолжать обучение при самых высоких требованиях к математической подготовке на технических и фундаментальных естественнонаучных и математических специальностях вузов. Но даже в этой, наиболее подготовленной группе требуется внимание повышению качества геометрической подготовки. Следует отметить, что ряд участников данной группы имеет внеконкурсное поступление или существенные льготы при поступлении как победители и призёры Всероссийской олимпиады школьников и олимпиад, входящих в Перечень Минобрнауки России.

В табл. 3 показано распределение процентов выполнения заданий участниками с результатами 0–26, 27–60, 61–80, 81–100 т.б. Проценты округлены до десятых долей.

Таблица 3. Выполнение заданий участниками ЕГЭ с различным уровнем подготовки, проценты

Задание/балл	Среднее	Гр_1, 0–4 ПБ (26 860 уч.)	Гр_2, 5–11 ПБ (134 369 уч.)	Гр_3, 12–19 ПБ (120 011 уч.)	Гр_4, 20–31 ПБ (19 943 уч.)
1/0	2,7	17,7	1,9	0,65	0,31
1/1	97,3	82,3	98,1	99,3	99,7
2/0	7,0	33,0	6,9	2,3	1,2
2/1	93,0	67,0	93,1	97,7	98,8
3/0	20,0	70,0	24,4	6,7	2,7
3/1	80,0	30,0	75,6	93,3	97,3
4/0	36,8	88,2	51,4	14,5	3,4
4/1	63,2	11,8	48,6	85,5	96,6
5/0	28,6	86,7	40,2	7,0	1,7
5/1	71,4	13,3	59,8	93,0	98,3
6/0	32,6	90,3	45,5	10,2	2,3
6/1	67,4	9,7	54,5	89,8	97,7
7/0	18,6	79,9	22,0	4,0	1,8
7/1	81,4	20,1	78,0	96,0	98,2
8/0	28,4	90,1	39,7	6,5	1,5
8/1	71,6	9,9	60,3	93,5	98,5
9/0	19,9	84,8	26,0	1,8	0,47
9/1	80,1	15,2	74,0	98,2	99,5
10/0	40,1	91,2	51,1	21,3	10,1
10/1	59,9	8,8	48,9	78,7	89,9
11/0	24,4	78,9	30,1	9,1	4,6
11/1	75,6	21,1	69,9	90,9	95,4
12/0	51,8	99,6	82,8	14,6	2,2
12/1	7,6	0,35	8,3	9,0	3,1
12/2	40,7	0,04	8,9	76,4	94,6
13/0	94,7	100,0	99,8	94,7	53,2
13/1	4,0	0,01	0,17	5,0	28,8
13/2	0,4	0,0	0,0	0,14	4,8
13/3	0,9	0,0	0,0	0,1	13,2

Задание/балл	Среднее	Гр_1, 0–4 ПБ (26 860 уч.)	Гр_2, 5–11 ПБ (134 369 уч.)	Гр_3, 12–19 ПБ (120 011 уч.)	Гр_4, 20–31 ПБ (19 943 уч.)
14/0	63,9	99,9	95,1	31,2	2,5
14/1	1,7	0,06	1,0	2,9	1,1
14/2	34,4	0,02	3,9	66	96,5
15/0	63,3	99,8	92,6	32,7	1,6
15/1	5,2	0,14	3,3	8,8	3,3
15/2	31,5	0,04	4,1	58,6	95,1
16/0	91,6	100	99,6	90,3	34,1
16/1	5,9	0,0	0,35	8,9	33,2
16/2	0,5	0,0	0,0	0,34	5,5
16/3	2,0	0,0	0,0	0,5	27,1
17/0	89,9	100,0	99,7	88,6	18,7
17/1	4,9	0,0	0,28	9,1	17,3
17/2	0,98	0,0	0,01	1,2	7,4
17/3	0,32	0,0	0,0	0,24	3,4
17/4	3,9	0,0	0,0	0,88	53,2
18/0	75,6	97,4	89,2	64,3	23,8
18/1	19,3	2,5	10,2	30,1	37,5
18/2	4,1	0,03	0,56	5,2	26,9
18/3	0,27	0,0	0,03	0,27	2,3
18/4	0,69	0,0	0,01	0,17	9,4

Выделяется задание 18, которое на 1 балл выполняет около 2,5 % участников из группы 1 и около 10 % участников из 2 группы. Похожие результаты выполнения последнего задания наблюдались и в прошлые годы. Это говорит о том, что в этих группах есть участники, обладающие математической культурой, достаточно высокой для того, чтобы разобраться в тексте абстрактной математической задачи, экспериментировать с натуральными числами или целыми последовательностями и найти пример, удовлетворяющий условию задачи. Вместе с тем эти участники не выполняют, казалось бы, простейшие алгоритмы решения тригонометрических уравнений. Таким образом, проявляется существование заметной доли выпускников школ, которые не в полной мере осваивают основную программу по математике, несмотря на то что обладают более чем достаточными для этого математическими способностями. Следует отметить, что данное задание показывает также степень развития математической культуры, умения найти путь решения задачи в новой ситуации, навыков логического мышления, а это является одним из основных личностных результатов математического образования профильного уровня.

Важно отметить, что при явном видимом росте выполнения геометрических заданий в 2022 г., по сравнению с прошлыми годами сохраняется заметный разрыв между уровнем алгебраической и геометрической подготовки выпускников. Наиболее явно сравнительный анализ успешности освоения курса алгебры и курса геометрии виден на результатах наиболее успешной группы 4. При этом достаточно ограничиться заданиями части 2, поскольку задания части 1 участники из этой группы выполняют практически полностью.

Если задания 12, 14, 15, 17 и 18 на полный балл выполняют соответственно 94,6 %, 96,5 %, 95,1 %, 53,2 % и 9,4 % участников из группы 4, то задания 13 и 16 на полный балл выполняют лишь соответственно 13,2 % и 37,1 % участников. Основная причина в том, что даже у наиболее подготовленных школьников геометрия вызывает опасения, в то время как главным ресурсом на экзамене является время.

Конечно, задача 16 требует немало времени на выполнение и анализ чертежа, поиск ключевых элементов конфигурации, решения множества вспомогательных подзадач.

Однако даже стандартная стереометрическая задача 13 у хорошо подготовленного и мотивированного участника экзамена занимает больше времени, чем, скажем, задача 15, которая требует объективно намного большего времени для обработки информации, иногда составления таблицы, применения нескольких алгоритмов и арифметических вычислений с многозначными числами. Можно предположить, что участник экзамена, выполняющий задание 15 и пропускающий задание 13 или выполняющий его с ошибкой, не видит стандартных алгоритмов, которые он мог освоить на уроках. И следовательно, этих алгоритмов не видит или не понимает его учитель, ибо при должной подготовке решение задачи 13 занимает в 1,5–2 раза меньше времени, чем задача 15, и не больше, чем задача 14.

Часто наиболее подготовленные участники, которые заранее планируют время и выстраивают тактику решения задач на экзамене, относят решение стереометрической задачи на оставшееся время. Отработка стандартных алгоритмов построения сечения, нахождения элементов призмы, правильной пирамиды по-прежнему остаётся неиспользованным ресурсом повышения уровня математической подготовки выпускников.

В прошлом году в наиболее многочисленной группе 2 явно выделялась «граница успешности», совпадающая с границей между заданиями с кратким и развёрнутым ответами. В этом году эта граница стала ещё более явной. Выполнение заданий 1–11 в группе 2 на уровне не менее чем 48,6 %. Задание 12 – наиболее успешно выполненное задание части 2 – лишь на уровне 8,9 %. Возникает гипотеза, что значительная часть, если не большинство, участников из этой группы попадает в эту группу лишь потому, что не обучены математической речи в той степени, которая необходима для ясного изложения мыслей при выполнении заданий с развёрнутым ответом. При этом уровень математического мышления, техника математических преобразований и вычислений у них могут быть достаточно развиты. Можно предположить также, что проблема кроется в злоупотреблении письменными видами работы, тестами, краткими ответами; при этом школьники имеют мало практики в устных ответах, развёрнутых письменных математических сочинениях. Такой школьник может решить уравнение или неравенство, понимает математический смысл задачи, но в силу отсутствия практики не может ясно и последовательно записать решение.

Общие результаты ЕГЭ по математике базового уровня по группам участников с различным уровнем подготовки

Базовый экзамен не предназначен для тонкого различения степени овладения математическими умениями. Это отражается в первую очередь в четырёхбалльной системе тестовых баллов – от 2 до 5. Собственно, эта шкала и определяет естественную кластеризацию участников экзамена. Группа 1 – это участники, не преодолевшие минимального балла (0–6 п.б.), с наиболее низким уровнем математической подготовки, не обладающие приемлемыми навыками счёта и чтения; доля – 3,75 %.

Группа 2 – участники с низким уровнем математической подготовки (преодолели минимальный балл, но получили тестовый балл «3» (7–11 п.б.)). Они, как правило, выполняют задания, требующие прямого подсчёта. За задания, требующие знания элементов содержания 10–11 класса, часто не берутся; доля – 16,89 %.

Группа 3 (тестовый балл «4», 12–16 п.б.) имеет базовые математические знания, нужные в бытовых расчётах, жизненных ситуациях. Слабое выполнение последних заданий КИМ, требующих логических построений, знания функций, изученных в старших классах, компенсируется устойчивыми вычислительными навыками и решением базовых текстовых задач; доля – 39,14 %.

Группа 4 (тестовый балл «5», 17–21 п.б.) – наиболее подготовленные участники базового экзамена. Участники из этой группы при небольшой дополнительной подготовке в рамках итогового повторения могут успешно сдать экзамен профильного уровня на балл, достаточный для поступления и успешной учебы в массовых вузах по IT, экономическим и инженерным специальностям. Их выбор базового экзамена в основном осознанный – они планируют продолжение образования в областях, не связанных с математикой. Однако не исключено, что заметная часть этой группы состоит из участников, которые выбрали базовый экзамен либо по собственной ошибке, либо будучи неверно сориентированными в выборе дальнейшей траектории продолжения образования. С потенциальными участниками из данной группы следует вести профориентационную работу не только учителям, но и вузам, особенно региональным. Заметная доля (40,22 %) данной группы показывает высокий потенциал роста числа абитуриентов технических вузов.

Группа 1 имеет явные особенности в выполнении отдельных заданий, например, задача на вычисления со степенями вызывает большие затруднения по сравнению с другими задачами. Группы 2 и 3 эту задачу решают не хуже других задач, а в группе 4 эта задача имеет почти 100%-ное выполнение.

Группа 1 хорошо справляется только с задачей на установление соответствия между величинами и их значениями при условии, что величины отличаются друг от друга на порядок. Наибольшие трудности – в наглядной стереометрии и тригонометрии. Можно сделать вывод о том, что значительная часть участников, получивших тестовый балл 2, незнакома с математическими фактами курса средней школы.

Группа 2, в целом испытывая те же трудности, что и группа 1, все же выполняет большую часть задач на уровне 50–60 %. Наиболее низкие результаты – опять же по геометрии. Другие массовые особенности при анализе агрегированной статистики и вееров ответов не выявлены.

В группе 3 «провалы» в геометрии не столь заметны, но всё же имеются. И даже в группе 4 задача 13 (наглядная стереометрия) вызывает определенные трудности; в выполнении этой задачи – самый низкий результат, за исключением последней, где требуются нестандартные рассуждения.

Выделим наиболее значимые направления работы с каждой группой обучающихся, исходя из их уровня подготовки и типичных проблем, которые необходимо компенсировать.

Группа 1. Эту группу можно кратко охарактеризовать как выпускников, имеющих слабую математическую подготовку, в том числе плохо умеющих считать. Безусловно, внимание учителя и родителей должно быть направлено в первую очередь на развитие устойчивых навыков бытового счета, умения находить часть от числа и число по его части. Вряд ли есть смысл глубоко изучать с такими учащимися в старшей школе тригонометрические и другие функции, когда основная проблема учеников – полное отсутствие базовой арифметической подготовки. Участники из данной группы, как правило, имеют очень низкие результаты на ОГЭ. Необходимо своевременно (не позднее чем в начале учебного года, а желательно в 10 классе) выявлять учеников, потенциально входящих в такую группу, и организовывать индивидуализированную подготовку, в том числе по ликвидации пробелов начальной и основной школы. Школам, в которых высока доля участников из данной группы, следует обратить особое внимание на качество математического образования в начальной школе и в 5–6 классах.

Говоря о группах 2 и 3, заметим, что помимо слабого решения геометрических задач, эти участники ЕГЭ не имеют серьезных проблем. Недостаточная отработка вычислительных навыков и невнимательность в чтении условия – основные проблемы этой группы участников. Здесь также следует добиваться отработки уже имеющихся навыков, прежде чем браться за более сложные умения или новые объекты. Вместе с тем, важно обратить внимание на решение типовых задач по геометрии, не отказываться от изучения геометрии ради алгебры. Но вместо рассмотрения теорем и решения абстрактных задач лучше сосредоточиться на простых практико-ориентированных задачах, в которых фигурирует объем цилиндра, наглядное деление фигуры на две части, видимое подобие, используются простые планы и чертежи на клетчатой бумаге.

Группа 3 наиболее массовая. Учитель обычно хорошо умеет работать именно с такими школьниками. Повторив все рекомендации, актуальные для группы 2, отметим, что здесь учитель может опираться на имеющие вычислительные навыки, следовательно, нужно давать больше задач на оценку и прикидку, на сопоставление результата со здравым смыслом и жизненным опытом при решении не только практико-ориентированных, но и типовых задач школьной геометрии и алгебры.

Несмотря на наличествующие вычислительные навыки, обучающиеся с сопоставимой с группой 3 подготовкой испытывают некоторый дефицит опыта в преобразовании логарифмов, корней и степеней. Следовательно, при подготовке к ЕГЭ целесообразно чаще включать в тренировочные материалы несложные преобразования функций с целью выработать навык, используя многократное повторение.

Группа 4 – пограничная между базовым и профильным экзаменами. Вероятно, значительная часть участников экзамена, попавших в эту группу, в состоянии успешно сдать профильный экзамен. Учителю важно понимать, насколько разумен выбор базового экзамена для потенциально сильного ученика, вести соответствующую профориентационную работу вместе с региональными вузами.

Для выработки конкретных рекомендаций был проведён анализ типичных ошибок участников ЕГЭ по математике базового уровня.

В группу заданий, с которыми участники экзамена справились несколько хуже, чем с другими, но на достаточно высоком уровне, вошли как задания, тематически относящиеся к курсу математики старшей школы, так и задания, «перешедшие» из основной школы: нахождение значения числового выражения; преобразование степенного выражения; решение практической задачи с процентами; решение квадратного уравнения; решение планиметрической задачи; решение вероятностной задачи, на работу с информацией, представленной в таблице; решение планиметрической задачи; решение стереометрической задачи на объём круглого тела, на задание с числовыми неравенствами, на задание с числами.

Изменение структуры КИМ базового уровня незначительно. Поэтому можно считать, что данные по годам сравнимы. Можно утверждать, что в целом результаты меняются год от года не очень существенно, и констатировать стабильность в уровне математической подготовки школьников.

***

Более подробно остановимся на некоторых заданиях, результаты выполнения которых выявляют типичные методические или предметные недостатки подготовки участников ЕГЭ. Ниже приведены рекомендации и возможные способы преодоления затруднений, возникающих у школьников при выполнении этих задач.

По-прежнему одной из самых типичных ошибок на экзамене является неверно прочитанное условие задачи. Следует уделять особое внимание развитию навыка понимания условия, умения перевести его на математический язык. Также важно отметить, что в условии задачи (не только экзаменационной!) важна каждая деталь. К сожалению, заметное число участников экзамена, увидев задачу, похожую на ту, которую они уже решали, или, например, на задачу демонстрационного варианта, не обращают внимания на небольшие различия, что приводит к решению, по сути, другой задачи и оценке 0 баллов.

В разделе «Содержательный анализ результатов» мы столкнулись с тем, что заметная часть школьников испытывает трудности в выделении целого основания степени, если эта степень не является квадратом. Например, представление числа 64 в виде 4^3 или 2^6 вызывает трудности у некоторых школьников, которые легко представят это число в виде 8^2. В таком случае рекомендуется преобразовывать степени в два этапа. Например, уравнение $4^{2x-1}=64$ можно вначале представить в виде $4^{2x-1}=8^2$, а уже после этого перейти к степеням двойки: $2^{2(2x-1)}=\left(2^3\right)^2$. Это решение трудно считать рациональным, однако школьник, совершивший несколько таких преобразований в учебном порядке, самостоятельно
и быстро приходит к более рациональному способу решения подобных уравнений.

Рекомендуется включать преобразования степеней и выделение оснований в устный счёт в начале урока.

О пользе и назначении устного счёта

Устный счёт является важнейшей частью математического образования, причем не только на уроке, но и во внеурочных и даже внешкольных формах. Традиционно урок математики начинается с устного счёта. К сожалению, многие учителя неверно понимают значение и цель этого элемента урока. Они часто дают нестандартные задачи, которые можно решить устно, считая, что это развивает вычислительные навыки и способствует закреплению изученного материала. Это верно лишь отчасти. Устный счёт будет эффективным обучающим средством, если он способствует многократному повторению важных мыслительных фигур и математических конфигураций.

Любой из нас, учителей математики, не испытывает никаких затруднений в разложении на множители числа 132 или 156, автоматически находит медиану равностороннего треугольника со стороной 1, сумму дробей 1/2 и 1/3 или сумму геометрической прогрессии: 1, 0,5, 0,25… И делаем мы это быстро не потому, что знаем формулы или умеем хорошо считать в уме, а просто потому, что для нас это – известные факты. Мы слишком много раз повторяли эти вычисления и потому запомнили результат. А много раз мы их повторяли потому, что это действительно важные умения, которые экономят нам время и силы, а главное, на их основе развиваются более общие представления.

Поэтому чем чаще на этапе устного счёта повторяются одни и те же важные задачи, тем лучше. Идеальный устный счёт состоит из задач, от которых мы ждём, что школьники их выполняют автоматически просто потому, что должны знать ответ.

Навыки устного счёта также развивают чувство числа, помогают увидеть путь решения задачи, провести прикидку и оценку результатов вычисления. При этом на экзамене устные вычисления следует обязательно подкреплять проверкой на черновике.

Анализ условия задачи. О составлении и использовании простых уравнений

Рассмотрим две задачи из вариантов ЕГЭ.

1. Центральный угол на $29°$ больше острого вписанного угла, опирающегося на ту же дугу окружности. Найдите вписанный угол.
2. Отрезки AC и BD – диаметры окружности с центром в точке O. Угол ACB равен $41°$. Найдите угол AOD.

Казалось бы, вторая задача намного сложнее первой. Однако субъективная сложность второй задачи оказалась ниже. Многим школьникам выполнять последовательные вычисления на основе некоторого факта проще, чем просто напрямую применить этот факт. При решении второй задачи последовательность действий такова: $\angle AOB = 2 \cdot 41° = 82°$, $\angle AOD = 180° - 82° = 98°$.

Решение первой задачи сводится к тому, что раз центральный угол вдвое больше вписанного, значит, вписанный равен как раз $29°$. И вот эту мыслительная фигура оказывается сложнее последовательности двух вычислений. Здесь на помощь традиционно приходит алгебра. Если вписанный угол равен x, то центральный равен $2x$, а их разность $2x - x = 29°$, откуда $x = 29°$. Эта задача является прекрасным способом показать, что уравнения полезны при решении не только сложных, но и простых задач. Школьников приучают к мысли, что уравнения помогают решать сложные задачи. Ассоциация со сложностями отпугивает. Регулярное использование уравнений (не спорим, приведённое решение не является самым рациональным, но рациональность мы сейчас не учитываем) в простейших случаях помогает понять саму суть появления математической модели. Проблема ещё и в том, что мы традиционно используем не очень удачные слова «переменная» или «неизвестное». Представим, что x – это не неизвестное, а известное число. И тогда мы можем обращаться с x, как с любым другим числом. Часто этот подход позволяет школьникам преодолеть боязнь перед введением в задачу числа x. Этот приём должен стать обычным и естественным для любого школьника: «если мы не знаем какое-то число, то попробуем назвать его x и будем обращаться с ним, как будто это число известно».

Представление о геометрических величинах, масштабе. Отношение площадей и объёмов подобных фигур

Важным метапредметным умением, которое развивается на уроках математики, является представление о масштабе, изменении геометрических величин при пропорциональном изменении размеров фигуры. В учебниках геометрии есть теорема о том, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия. Доказательство этой теоремы обычно опирается на вспомогательную теорему об отношении площадей треугольников, имеющих одинаковый угол. В результате школьники плохо понимают последовательность рассуждений и общность самого факта.

Изучение вопроса лучше всего начинать на клетчатой бумаге, нарисовав квадратик со стороной 1, квадратик со стороной 2 и квадратик со стороной 3. Очевидно, что площади их равны 1, 4 и 9, то есть площади относятся как квадраты линейных размеров. Это прослеживается в самом наименовании единиц площади: квадратные сантиметры или квадратные метры. Аналогично, используя, например, кубик Рубика, легко заметить, что объёмы относятся как кубы линейных размеров.

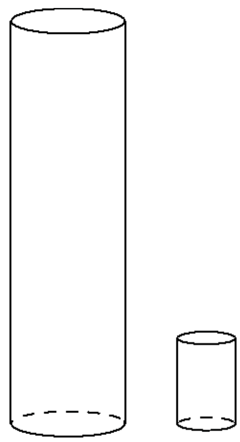
Лучше всего принести на урок две модели похожих автомобилей или две разные по размеру мягкие игрушки (кошки, собаки, слоны) и обсудить, во сколько раз площадь поверхности (количество материала, нужного для пошива) одного слона больше или меньше площади поверхности другого, во сколько раз один тяжелее или легче другого. При этом достаточно линейки или гибкого швейного метра для измерения только высоты фигурки или только её длины.

Таким образом, следует развить представление об отношении площадей и объёмов подобных фигур на плоскости и в пространстве и только потом можно это формализовать, доказав соответствующую теорему.

Более общий факт состоит в следующем: при сжатии или растяжении в одном направлении площадь (объём) фигуры изменяется во столько раз, во сколько раз фигуру сжали или растянули. Это представление крайне наглядно. Оно также иллюстрируется на клетчатой бумаге или с помощью кубиков. Тогда решение задач на отношение объёмов, которые обычно встречаются в базовом и профильном ЕГЭ, не вызывает трудностей.

Пример

Даны два цилиндра. Радиус основания и высота первого цилиндра равны соответственно 4 и 18, а второго – 2 и 3. Во сколько раз площадь боковой поверхности первого цилиндра больше площади боковой поверхности второго цилиндра?



Решение. Будем мысленно превращать первый цилиндр во второй. Нужно сжать цилиндр в 2 раза со всех сторон (по длине, ширине и высоте). Получится цилиндр радиусом 2 и высотой 9. Площадь поверхности при этом уменьшится в 4 раза. Теперь нужно полученный цилиндр сжать ещё раз, но только сверху вниз в 3 раза, чтобы высота с 9 уменьшилась до 3. Площадь уменьшится ещё в 3 раза. То есть всего площадь уменьшилась в 12 раз.

Такое решение можно также перепроверить на черновике соответствующими выкладками, используя известные формулы:

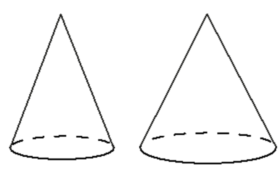
$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 18}{2\pi \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 6 = 12 .$$

Преимущество первого способа, помимо того, что он нагляден, заключено ещё и в универсальности. В самом деле, неважно, что именно мы сжимаем или растягиваем – цилиндры, конусы, призмы или пирамиды. Поэтому не важны формулы площадей или объёмов. Школьник должен знать, что для решения таких задач не обязательно даже знать формулы. Больше нужно полагаться на интуицию, рисунок и здравый смысл.

Отметим, что в таких рассуждениях очень важно внимательно отслеживать, какие параметры пропорционально изменяются. Например, если увеличивается вдвое ширина прямоугольника при неизменной высоте, то площадь увеличивается вдвое. А если вдвое увеличивается сторона квадрата, то площадь увеличивается в 4 раза.

Закрепить понимание данной темы можно, например, решив следующую задачу.

Даны два конуса. Радиус основания и образующая первого конуса равны соответственно 4 и 7, а второго – 6 и 7. Во сколько раз площадь боковой поверхности второго конуса больше площади боковой поверности первого конуса?

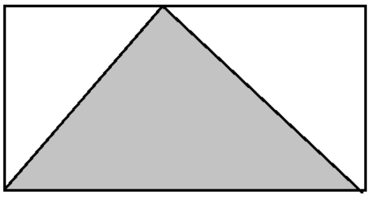


В заключение отметим, что подобные задачи как раз являются хорошим материалом и для развития навыка устного счёта. Не нужно, повторим, стремиться очень разнообразить числовые данные. Пусть школьнки привыкнут к наиболее распространенным случаям – увеличение или уменьшение в 2 или 3 раза.

Геометрическая интуиция. Об отношении площадей и объёмов вписанных фигур

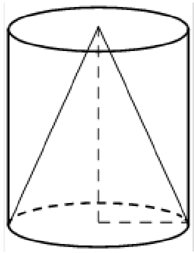
Одной из важнейших целей изучения геомерии в школе является развитие геометрических, в том числе пространственных, представлений, геометрической интуиции, умения видеть геометрическую конструкцию и затем умения применять необходимые формулы.

Какую часть площади прямоугольника занимает вписанный в него треугольник?

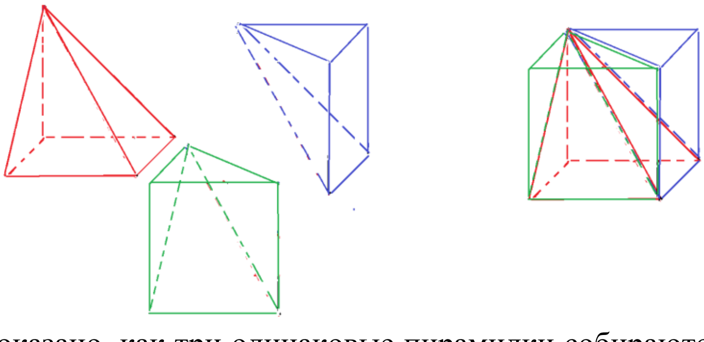


Зависит ли это от того, как именно треугольник вписан, то есть где именно расположена «верхняя» вершина, которая может скользить по стороне прямоугольника. Ответ очевиден: половину, то есть площадь треугольника вдвое меньше. Чтобы понять это, не нужны формулы. Здесь хорошо подойдёт метод, заимствованный из оригами, – загните белые углы внутрь, и окажется, что они полностью покроют треугольник. Можно использовать клетчатую бумагу, а лучше в различное время обучения использовать разные средства, чтобы придать изученным формулам площади наглядность.

А теперь рассмотрим следующую задачу: какую часть объёма цилиндра занимает вписанный в него конус?



Сначала многие школьники дают ответ по аналогии: половину. И некоторые даже пытаются аргументировать ответ. Они представляют себе цилиндр и конус как результат вращения прямоугольника, в который вписан треугольник. Ответ «половина» неверный. Чтобы это понять, удобно начать с аналогичной задачи, но про куб и вписанную пирамиду.



На рисунке показано, как три одинаковые пирамидки собираются в один куб. Следовательно, куб по объёму втрое больше, чем вписанная в него пирамида. Значит, это должно быть верно и для пары «цилиндр – конус». Теперь это наглядный факт. Доказательство соответствующих теорем и вывод формул лишь закрепляют и обосновывают то, что школьник и так видит. Развитие наглядных представлений позволит не только уверенно решать задачи в экзаменационной работе, но и применять знания в жизненных ситуациях, в профессии.

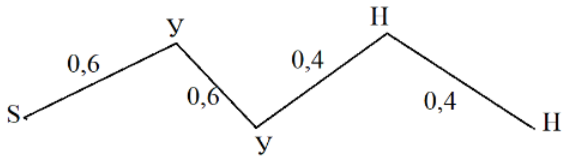
Выбор подходящего метода решения. Дерево как средство решения задач

Рассмотрим задачи по теории вероятностей, которые в этом году в вариантах экзаменационной работы были на позиции 10. Наряду с использованием формул, большинство из них удобно решить графическим методом – с помощью дерева или цепи. Вообще, изображение случайного опыта по условию задачи в виде дерева – универсальный и очень наглядный способ решения самых разных задач. Более того, изучение данного метода позволит глубже разобраться в сути вероятностных моделей, а также избежать ошибок, связанных с непродуманным, формальным применением формул.

Пример 1

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Решение. В данном случае дерево тривиально сводится к одной цепи, поскольку нас интересует только одно элементарное событие – два успеха и две неудачи подряд. Ненужные ветви дерева можно не изображать.



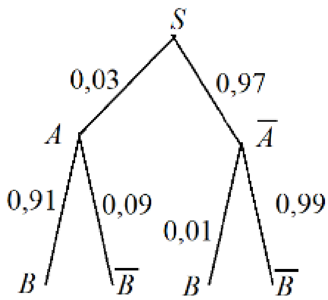
Каждая подписанная около рёбер вероятность условная. Поскольку по условию задачи вероятности не меняются с течением времени и не зависят от предыдущих результатов стрельбы, две первые вероятности попадания (успеха) равны 0,6, а вероятности двух последующих промахов равны 0,4. Пользуясь правилом умножения, получаем:

$$0,6\cdot 0,6\cdot 0,4\cdot 0,4=0,0576.$$

Пример 2

Автоматическая линия изготавливает батарейки. Вероятность того, что готовая батарейка неисправна, равна 0,03. Перед упаковкой каждая батарейка проходит систему контроля качества. Вероятность того, что система забракует неисправную батарейку, равна 0,91. Вероятность того, что система по ошибке забракует исправную батарейку, равна 0,01. Найдите вероятность того, что случайно выбранная изготовленная батарейка будет забракована системой контроля.

Решение. Здесь лучше изобразить полное дерево, в котором отражены события A «батарейка неисправна» и B «батарейка забракована системой контроля», что не одно и то же. Дерево получается такое, как на рисунке.



Искомая вероятность складывается из вероятностей цепей SAB и $S\bar{A}B$:

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(SAB)+\mathrm{P}(S\bar{A}B)=0,03\cdot 0,91+0,97\cdot 0,01=0,037.$$

Этот метод исследования дерева универсален. Попутно школьникам полезно сообщить, что формула, которая получается в результате сложения вероятностей цепочек, называется формулой полной вероятности.

Выбор подходящего метода решения. Использование векторов

Очень обидно видеть, как трудно и тяжело школьники решают задачи, который можно было бы решить очень кратко, применяя соответствующий аппарат. Освоение ФГОС профильного уровня предполагает умения решать задачи повышенного и высокого уровней сложности и выбрать подходящий метод решения задачи.

Так, наряду с геометрическими методами, в ряде задач удобно применять аналитические методы. Например, в задаче, которую мы рассматривали (см. п. 4) фигурирует прямоугольный параллелепипед, а это означает, что очень удобно ввести векторный базис. Повторим условие.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через середину M диагонали AC_1 проведена плоскость α перпендикулярно этой диагонали, $AB = 5, BC = 3, AA_1 = 4.$

а) Докажите, что плоскость α содержит точку D_1.

б) Найдите отношение, в котором плоскость α делит ребро A_1B_1.

Доказательство. Введём базис $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}$. Длины базисных векторов известны: 5, 3 и 4 соответственно. Чтобы решить п. а) достаточно показать, что вектор $\overrightarrow{MD_1}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{AC_1}$:

$$\overrightarrow{MD_1}\cdot\overrightarrow{AC_1} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right).$$

Поскольку попарные произведения базисных векторов равны нулю, выражение принимает вид:

$$\overrightarrow{MD_1}\cdot\overrightarrow{AC_1} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1}^2 = \frac{1}{2}\left(-25+16+9\right) = 0.$$

Для решения п. б) достаточно найти точку T на ребре A_1B_1 такую, что $\overrightarrow{MT}\cdot\overrightarrow{AC_1} = 0$:

$$\left(\overrightarrow{MA_1} + t\overrightarrow{A_1B_1}\right)\cdot\overrightarrow{AC_1} = 0, \text{ где } 0 \le t \le 1.$$

Тогда

$$\left(\left(t-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA_1} + t\overrightarrow{A_1B_1}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA_1}\right) = 0;$$

$$\left(t-\frac{1}{2}\right)\cdot 25 - \frac{1}{2}\cdot 16 + \frac{1}{2}\cdot 9 = 0;\ 25t - 16 = 0;\ t = \frac{16}{25}.$$

Значит, точка T делит ребро A_1B_1 в отношении $16:9$, считая от точки A_1.

Изучение векторов в школе по большинству учебников, к сожалению, недостаточно. Изученные действия над векторами остаются без применения. А ведь если речь идёт о прямоугольном параллелепипеде, правильной четырёхугольной пирамиде или любой другой фигуре на плоскости или в пространстве, где удобным и естественным образом вводятся базисные векторы, связанные с самой фигурой, то в ряде задач удобно применять векторный метод. Отметим, что в проекте обновлённого ФГОС усилен акцент на векторный метод в геометрии, а также уделено определённое внимание пропедевтическому изучению основ линейной алгебры.

В 2022 г. внесены важные содержательные изменения в структуру профильного ЕГЭ и небольшие изменения в базовом ЕГЭ. Прошедший экзамен показал успешность реализации модели 2022 г. В 2023 г. не планируется содержательных изменений, однако будут проведены структурные изменения, связанные с тематической группировкой заданий в вариантах, что позволит участникам экзамена более эффективно организовать работу как при итоговом повторении, так и на самом экзамене.

Методическую помощь учителям и обучающимся при подготовке к ЕГЭ могут оказать материалы с сайта ФИПИ (www.fipi.ru):

- документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ 2023 г.;
- открытый банк заданий ЕГЭ;
- Навигатор самостоятельной подготовки к ЕГЭ (fipi.ru);
- Учебно-методические материалы для председателей и членов региональных предметных комиссий по проверке выполнения заданий с развёрнутым ответом экзаменационных работ ЕГЭ;
- Методические рекомендации на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет (2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021 гг.);
- Методические рекомендации для учителей по преподаванию учебных предметов в образовательных организациях с высокой долей обучающихся с рисками учебной неуспешности. Математика;
- журнал «Педагогические измерения»;
- видеоконсультации для участников ЕГЭ (https://fipi.ru/ege/videokonsultatsii-razrabotchikov-kim-yege).

Приложение 1

Основные характеристики экзаменационной работы ЕГЭ 2022 г. по МАТЕМАТИКЕ (профильный уровень)

Анализ надёжности экзаменационных вариантов по математике (профильный уровень) подтверждает, что качество разработанных КИМ соответствует требованиям, предъявляемым к стандартизированным тестам учебных достижений. Средняя надёжность (коэффициент альфа Кронбаха)КИМ по математике (профильный уровень) – 0,84.

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний % выполнения
1	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1	2.1	Б	1	97,3
2	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3	Б	1	93,0
3	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 5.2	5.1, 5.5	Б	1	80,0
4	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.1–1.4	Б	1	63,2
5	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2	5.2–5.5	Б	1	71,4
6	Уметь выполнять действия с функциями	3.1–3.3	4.1–4.3	Б	1	67,4
7	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1–6.3	2.1, 2.2	П	1	81,4
8	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1	2.1, 2.2	П	1	71,5
9	Уметь выполнять действия с функциями	3.1, 5.1	2.1, 2.2, 3.1–3.3	П	1	80,1
10	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	5.4	6.3	П	1	59,9
11	Уметь выполнять действия с функциями	3.1–3.3	4.1, 4.2	П	1	75,6
12	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3	2.1, 2.2	П	2	44,4

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний % выполнения
13	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.2, 4.3, 5.2, 5.3	5.2–5.6	П	3	2,5
14	Уметь решать уравнения и неравенства	2.3	2.1, 2.2	П	2	35,2
15	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1, 6.3	1.1, 2.1.12	П	2	34,1
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами	4.1, 4.3, 5.2, 5.3	5.1, 5.5	П	3	4,3
17	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1–2.3, 5.1	2.1, 2.2, 3.1–3.3	В	4	5,8
18	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 5.3	1.1–1.4, 2.1, 2.2, 3.1–3.3	В	4	7,8

Приложение 2

Основные характеристики экзаменационной работы ЕГЭ 2022 г. по МАТЕМАТИКЕ (базовый уровень)

Анализ надёжности экзаменационных вариантов по математике (базовый уровень) подтверждает, что качество разработанных КИМ соответствует требованиям, предъявляемым к стандартизированным тестам учебных достижений. Средняя надёжность (коэффициент альфа Кронбаха) КИМ по математике (базовый уровень) – 0,84.

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний % выполнения
1	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1	1.1.1, 1.1.3, 1.4.1	Б	1	73,0
2	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.4.3–1.4.5	Б	1	88,8
3	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.1	2.1.12, 6.3.1	Б	1	96,5
4	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.2, 3.1	6.2.1, 3.1.3	Б	1	95,1
5	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.2	5.1.1–5.1.7, 5.5.1–5.5.5	Б	1	74,6
6	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.3	1.1.3	Б	1	84,9
7	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1–1.3	1.1–1.4	Б	1	69,8
8	Уметь использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни	6.2, 3.1	6.2.1, 3.1.3	Б	1	89,0
9	Уметь решать уравнения и неравенства	2.1	2.1.1–2.1.6	Б	1	79,4
10	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.1, 5.2	5.1.1–5.1.3, 5.5.1, 5.5.3, 5.5.5	Б	1	76,6
11	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.4	6.3.1	Б	1	78,1
12	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 6.1, 6.2	1.4.1	Б	1	93,9
13	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.2, 5.2	5.3.1–5.3.5, 5.4.1–5.4.3, 5.5.5–5.5.7	Б	1	44,9
14	Уметь выполнять действия с функциями	3.3, 6.2, 6.3	3.1.1–3.1.3, 3.2.1, 3.2.5, 3.2.6, 4.1.1, 4.1.2, 6.2.1	Б	1	90,1
15	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.1	5.1.1–5.1.5, 5.5.1, 5.5.3, 5.5.5	Б	1	58,6
16	Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами	4.2	5.3.1–5.3.3, 5.4.1–5.4.3, 5.5.5–5.5.7	Б	1	60,7

Номер задания	Проверяемые требования (умения)	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Средний % выполнения
17	Уметь решать уравнения и неравенства	2.3, 6.1	2.2.1–2.2.5	Б	1	44,1
18	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.3	2.1.12	Б	1	87,6
19	Уметь выполнять вычисления и преобразования	1.1	1.4.1, 1.4.2	Б	1	55,2
20	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1, 2.1–2.3	1.4.1, 1.4.2, 2.1	Б	1	21,2
21	Уметь строить и исследовать простейшие математические модели	5.1	1.4.1, 1.4.2, 2.1, 2.2	Б	1	21,0